DOI: 10.18411/vntr2025-178-2

УДК. 3054

МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ МАШИН, КАК БОЛЬШИХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Леонид Борисович Матусов
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт машиноведения им. А.А. Благонравова Российской академии наук, Москва, Россия
matusoff.l@yandex,ru

Аннотация. *Допустим, что имеется математическая модель проектируемой машины, например, система дифференциальных уравнений, причем время ее расчета при фиксированном наборе коэффициентов (параметров) не позволяет провести оптимизацию в достаточно полном объеме. Допустим, что исследуемая система может быть разделена на подсистемы. Однако такая декомпозиция далеко не всегда решает проблему проведения оптимизации параметров этих систем. В этой связи естественно возникает вопрос: нельзя ли оптимизировать всю исследуемую систему по многим критериям качества путем оптимизации ее подсистем, имеющих существенно меньшую размерность, т.е. нельзя ли, зная допустимое и паретовское множества для каждой подсистемы, построить соответствующие множества всей системы?*
Ключевые слова**:** *система, подсистема, допустимое множество, множество Парето, псевдодопустимое множество.*

Работа выполнена за счет средств Государственного задания, код (шифр) научной темы, присвоенной учредителем (организацией) FFGU-2024-0016.

MULTICRITERIA DESIGN OF MACHINE PARAMETERS AS LARGE MECHANICAL SYSTEMS

L.B. Matusov
Mechanical Engineering Research Institute the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia
matusoff.l@yandex,ru

Abstract. *Suppose there is a mechanical system. Suppose we have a mathematical model of the machine being designed, for example, a system of differential equations, and the computation time for a fixed set of coefficients (parameters) does not allow for a sufficiently comprehensive optimization. Let's assume that the system under study can be divided into subsystems. However, such decomposition does not always solve the problem of optimizing the parameters of these systems. This naturally raises the question: is it possible to optimize the entire system under study across multiple quality criteria by optimizing its subsystems with significantly lower dimensionality? i.e., given the feasible and Pareto sets for each subsystem, is it possible to construct the corresponding sets for the entire system?*
Keywords: *system, subsystem, feasible set, Pareto set, pseudo feasible set.*

Acknowledgements. *The work was carried out using funds from the State Assignment, scientific topic code assigned by the organization FFGU-2024-0016.*

1. **Введение.** Пусть имеется механическая система. Пусть теперь данная система декомпозируется на m подсистем [1], каждая из которых описывается системой уравнений существенно меньшего порядка. Покажем, как зная псевдодопустимое множество (см. ниже) каждой из подсистем, получить допустимое и паретовское множество всей систем. Предположим, как и в [2], что имеется математическая модель исследуемой системы, и модель эта зависит от n изменяемых параметров $\alpha_1,...,\alpha_n$.Пусть $\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_n)$, $\Phi_\nu(\alpha)$ – критерии качества механической системы и D — множество точек α, которые удовлетворяют всем, обеспечивающим нормальное функционирование рассматриваемого объекта, ограничениям [2].

Определение 1. Точка $\alpha^0 \in D$, называется Парето оптимальной, если не существует точки $\alpha \in D$ такой, что $\Phi_\nu(\alpha) \le \Phi_\nu(\alpha^0)$ для всех $\nu=1,...,k$ и $\Phi_{\nu_0}(\alpha) < \Phi_{\nu_0}(\alpha^0)$ по крайней мере для одного $\nu_0 \in \{1,\ldots,k\}$. Множество $P \subset D$ называется Парето оптимальным, если оно состоит из Парето оптимальных точек.

Под аппроксимацией или построением допустимого множества с заданной точностью понимают выделение из D такого конечного подмножества точек D_ε, которые удовлетворяют всем требованиям, обеспечивающим нормальное функционирование объекта, и которое с заданной точностью приближало бы любое значение каждого критерия, вычисленное в произвольной точке из области D.

Пусть $\Phi(\alpha)$- набор всех критериев качества в точке α и пусть ε_ν есть допустимая погрешность (по мнению эксперта) по критерию Φ_ν. Обозначим через ε набор $\{\varepsilon_\nu\}$, $\nu = 1,...,k$. Будем говорить, что область $\Phi(D)$ аппроксимирована конечным множеством $\Phi(D_\varepsilon)$ с точностью до набора ε, если для любого вектора $\alpha \in D$, существует вектор $\beta \in D_\varepsilon$ такой, что $\left|\Phi_\nu(\alpha)-\Phi_\nu(\beta)\right| \le \varepsilon_\nu$, $\nu=1,...,k$.

Предположим, что критерии являются непрерывными функциями, удовлетворяющими условию Липшица, т.е. для всех векторов α и β из области определения критерия Φ_ν существует число L_ν такое, что

$$\left|\Phi_\nu(\alpha)-\Phi_\nu(\beta)\right| \le L_\nu \max_j \left|\alpha_j-\beta_j\right|.$$

Пусть константы Липшица L_ν $\nu=1,...,k$, определены , и пусть N_1 это подмножество точек допустимого множества D, которые являются либо Парето оптимальными, либо лежат в ε-окрестности некоторой Парето оптимальной точки по крайней по какому либо одному критерию. Иными словами, $\Phi_\nu(\alpha^0) \le \Phi_\nu(\alpha) \le \Phi_\nu(\alpha^0) + \varepsilon_\nu$, где $\alpha^0 \in P$, и P- это Парето оптимальное множество. Пусть также $N_2 = D \backslash N_1$ и $\bar{\varepsilon}_\nu > \varepsilon_\nu$, где $\overline{\varepsilon_\nu}$ - набор погрешностей, больших по сравнению с предыдущими.

Определение 2. Допустимое множество решений $\Phi(D)$ называется нормально аппроксимированным, если любая точка множества N_1 аппроксимирована с точностью до ε, и любая точка из множества N_2 аппроксимирована с точностью до $\bar{\varepsilon}$.

Теорема 1. Если критерии качества системы непрерывны и удовлетворяют условию Липшица (специальному условию Липшица), то имеется нормальная аппроксимация Ф(D_ε) допустимого множества Ф(D) [3,4],

Предложенный в теореме 1 способ аппроксимации допустимой в области Ф(D) с заданной точностью позволяет решать проблему аппроксимации множества Парето. Пусть P - множество Парето в пространстве параметров (P C D), Ф (P) - образ в пространстве критериев; $\{\varepsilon_\nu\}$ - набор допустимых погрешностей. Ставится задача: построить конечное паретовское множество, аппроксимирующее Ф(P) с точностью до $\{\varepsilon_\nu\}$, ν = l,...,k. Пусть Ф($D_{\{\varepsilon_\nu\}}$) – нормальная $\{\varepsilon_\nu\}$ аппроксимация Ф(D) и P_ε - Парето -оптимальное подмножество в D_ε. Известно, что аппроксимация Ф(D) множеством Ф($D_{\{\varepsilon_\nu\}}$) не обеспечивает аппроксимации Ф(P) множеством Ф(P_ε) с заданной точностью. Это означает, что задача построения множества Парето некорректна по А.Н. Тихонову. Решением такой задачи является, как известно, построение регуляризирующей последовательности Ф(P_ε) , аппроксимирующей Ф (P). В приводимой ниже теореме дается конструкция регуляризирующей последовательности Ф(P$_{\{\varepsilon_\nu\}}$)

Теорема 2. Если критерии непрерывны и удовлетворяют условию Липшица, то существует регуляризирующая последовательность Ф(P$_{\{\varepsilon_\nu\}}$) [5],

Таким образом, в результате получаем аппроксимацию множества Парето, обладающую следующим свойством: в $\{\varepsilon_\nu\}$-окрестности любой точки из Ф(P) найдется точка из Ф(P$_{\{\varepsilon_\nu\}}$) и наоборот. Так как в практических задачах оптимального проектирования количество точек, принадлежащих множеству Парето, как правило, весьма невелико, вследствие наличия жестких функциональных ограничений процедура построения конечной аппроксимации множества Парето конструктивна для этих задач в смысле реализуемости на ЭВМ. На основании приведенных выше результатов становиться возможным вычисление допустимого и паретовского множеств большой системы с помощью допустимых и паретовских множеств ее подсистем.

2. **Методы декомпозиции и агрегирования в задачах многокритериальной оптимизации параметров большой системы.** Иногда после применения методов декомпозиции большая система может быть оптимизирована. Однако для нелинейных систем не всегда имеются достаточно эффективные и точные методы. Существуют и другие ограничения на применение методов декомпозиции. В тех случаях, когда они могут быть применены, возможность оптимизации большой системы неочевидна.

К решению данной проблемы возможен иной подход. Он возникает при рассмотрении исследуемого объекта в виде иерархической структуры [5].

Рассмотрим три типичных варианта поиска иерархически согласованных решений в задачах проектирования машин. Первые два из них (I и II) предназначены для решения задач оптимизации в сравнительно простых случаях. Вариант III применим к более сложным системам. К этим трем вариантам условно можно отнести задачи проектирования различных видов станков, вибрационных технологических машин, машин для литья и т. п.

Выделим общие положения для рассматриваемых вариантов.

1. Полагаем, что для первых трех имеются математические модели исходных систем,

которые по вектору критериев Ф не представляется возможным оптимизировать, т. е. для того, чтобы поставить и решить задачу многокритериальной оптимизации, требуется очень много времени на ЭВМ. Однако выполнить небольшое количество расчетов значений критериев Ф при заданных векторах параметров можно.

2. Система состоит из подсистем. Связи, при помощи которых одна подсистема взаимодействует с другой, назовем внешними. По аналогии действие одной подсистемы на другую определим как внешнее. Чтобы выделить подсистему в виде автономной системы, нужно рассмотреть воздействие на нее всех остальных подсистем, а также внешних возмущений со стороны окружающей среды.

3. Предполагается, что подсистемы можно оптимизировать по заданному вектору критериев.

Идея оптимизации системы в целом состоит в том, что, оптимизируя каждую из подсистем, получаем для нее допустимое или несколько большее (псевдодопустимое) множество. После этого «стыкуем» некоторым образом векторы из этих множеств в соответствующие векторы всей системы. На образованном множестве определяем, удовлетворяются ли критериальные и функциональные ограничения системы, и в итоге получаем допустимое множество D для всей системы.

Оптимальное решение ищется на множестве D. Оно является иерархически согласованным.

Вариант I. Необходимо оптимизировать исходную систему по вектору критериев Φ_1, ..., Φ_n, Φ_{n+1}, ..., Φ_{n+k}, о которой известно, что критерии Φ_1, ..., Φ_n описывают динамику машины — усилия, амплитуды перемещений, скоростей, ускорений, частоты, массы и т. п., а критерии Φ_{n+1}, ..., Φ_{n+k} — прочность, надежность, долговечность. Здесь могут быть рассмотрены и другие критерии. Предполагается, что исходную систему можно оптимизировать по критериям Φ_1, ..., Φ_n. Напрашивается идея «разбиения» критериев на две части и проведения по ним последовательной оптимизации. Важным соображением в пользу этого подхода является то, что для расчета напряженно-деформированного состояния достаточно знать динамические нагрузки на подсистемы.

Уровень 1. Решается задача оптимального проектирования системы по динамическим критериям. Итогом решения является нахождение функциональных и критериальных ограничений и допустимого множества $\bar{D}$, в том числе и допустимого множества внешних воздействий на каждую подсистему. (Ясно, что $\bar{D}$ больше истинного допустимого множества D, так как пока не рассмотрены другие ограничения, в том числе на прочностные показатели.)

Уровень 2. Определив на предыдущем уровне с помощью вектора внешних воздействий граничные условия для каждой из подсистем, рассматриваем последние, как самостоятельные системы, и решаем задачу по критериям
Φ^g_{n+1}..., Φ^g_{n+k}, g=1,2,…,p, где p — количество подсистем. Для каждой из них строим свое множество решений $\overline{D_g}$, по функциональным и критериальным ограничениям, часть из которых учитывает влияние остальных подсистем на исследуемую. Критерии g-й подсистемы рассчитываются при значениях параметров внешних связей, соответствующих векторам из $\overline{D}$.

Уровень 3. Теперь нужно «стыковать» векторы параметров из множеств $\overline{D_g}$. Возьмем два из них, $\overline{D_1}$ и $\overline{D_2}$. Рассмотрим некоторый вектор β из допустимого множества внешних связей

первой подсистемы со второй $\overline{D_{12}}$, а также множество M_1 - векторов из $\overline{D_1}$ и M_2 из $\overline{D_2}$, полученных при β. Пусть вектор $\alpha \in M_1$ Присоединим к нему β, т. е. к параметрам α в качестве новых компонентов приписываем параметры β. Добавим к полученному вектору некоторый вектор $\gamma \in M_2$. Повторим это и с другими векторами из M_2. Проделаем данную операцию при всех векторах из M_1. Далее рассматриваем все остальные векторы из $\overline{D_{12}}$ и для них выполняем все предыдущие операции. Аналогично происходит стыковка и с другими подсистемами. В результате получим подмножество векторов всей системы $\overline{D}$ которое возможно больше допустимого D, так как некоторые векторы из $\overline{D}$ могут не удовлетворять критериальным или функциональным ограничениям на систему в целом. С другой стороны, параметры, не удовлетворяющие ограничениям по напряженно-деформированному состоянию для подсистем, не могут, как известно, удовлетворять этим требованиям для всей системы.

Поэтому после получения векторов параметров $\overline{D}$ рассчитываются критерии качества всей системы и проверяется выполнение функциональных и критериальных ограничений. Таким образом, получаем допустимое множество решений D. Если же необходимо рассмотреть некоторые, ранее неучтенные критерии для всей системы (например, себестоимость), то их значения определяются на D и после введения соответствующих ограничений строится новое допустимое множество.

Вариант II. Имеется исходная математическая модель. Строится упрощенная модель. Упрощение достигается за счет сокращения числа степеней свободы подсистем исходной модели при сохранении внешних связей. Предполагается, что на уровне 1 при данных упрощениях систему можно оптимизировать по вектору критериев Ф. Здесь, так же как и в варианте I, необходимо получить допустимые векторы для определения внешних связей подсистем. На уровне 2 оптимизируется каждая подсистема с учетом тех критериев, которые не могли быть определены из упрощенной модели. При этом граничные условия на подсистемы рассчитываются по допустимым векторам упрощенной системы. Как и ранее, для подсистем находим множества $\overline{D_g}$. Их стыковка на уровне 3 осуществляется аналогично тому, как это имеет место для варианта I. Для состыкованных векторов параметров рассчитываются значения критериев качества исходной математической модели. С учетом всех ограничений получаем множество D. Очевидно, что если после определения D нет иных критериев и ограничений на систему, то D — допустимое множество решений.

Вариант III. Имеется исходная математическая модель системы и вектор критериев $Ф_1$, ..., $Ф_n$. Упрощение модели достигается главным образом за счет разумного сокращения количества внешних связей. В упрощенной модели по сравнению с исходной может оказаться меньше критериев: исключаются те, которые зависят от параметров отброшенных связей. Нужно стремиться к тому, чтобы в упрощенной модели сохранилась большая часть основных критериев. (Отброшенные критерии будут учтены в дальнейшем.) Саму упрощенную систему не предполагается оптимизировать. Если же это возможно, то построение множества D в основном аналогично варианту I.

Уровень I. Оптимизация подсистем отличается от предыдущих схем. Здесь вектор параметров внешних связей не фиксирован, а варьируется одновременно с параметрами подсистем. Граничные условия для подсистемы определяются каждый раз по заданному вектору внешних связей с помощью расчета упрощенной модели. Предполагается, что при

оптимизации можно варьировать только частью параметров системы. Для этого необходимо выполнение условия: в системе должно существовать достаточное число параметров, влияющих на критерии подсистемы, в которую они входят, и не влияющих на критерии других подсистем.

Достаточность понимается в том смысле, что каждая из подсистем может быть оптимизирована. Это условие является необходимым, так как если окажется, что критерии какой-либо из подсистем зависят от всех или почти всех параметров системы, то оптимизировать ее будет так же трудно, как и всю систему.

Решением задачи оптимизации для g-й подсистемы должно быть получение множества $\overline{D_g}$, содержащего допустимое множество D_g. Множество $\overline{D_g}$ определяется по функциональным и критериальным ограничениям. Это означает существование таких ограничений на показатели подсистем, нарушение хотя бы одного из которых влечет неудовлетворительное функционирования всей системы.

Удовлетворение этим ограничениям еще не гарантирует допустимость соответствующих параметров системы. Данное условие можно ослабить, если допустить, что оно выполняется не для всех $\Phi_v(\alpha)$, а только для некоторых. Смысл введения этих ограничений заключается в том, что при оптимизации мы удаляем множество векторов системы, которые указанным ограничениям не удовлетворяют. Рассчитывать значения критериев системы для таких векторов уже не надо. Этим также сокращается время, необходимое для оптимизации системы.

Уровень II. Операция стыковки векторов. Так как варьируются параметры связей между подсистемами, стыковка векторов из множеств $\overline{D_i}'$ и $\overline{D_j}'$ производится по равным значениям общих для этих подсистем параметров, которые одновременно влияют на критерии рассматриваемых подсистем. Стыковка выполняется аналогично соответствующей операции из варианта I.

Дальнейшее определение D на множестве $\overline{D}$ векторов, полученных в результате стыковки, происходит подобно тому, как это описано для вариантов I и II. Поскольку ранее были отброшены некоторые связи системы, то на $\overline{D}$ необходимо учесть значения всех критериев исходной математической модели. Таким образом, исходная модель рассчитывается неоднократно. Однако это делается только в точках множества $\overline{D}$, что может оказаться достаточным для оптимизации всей системы. После введения критериальных ограничений получаем допустимое множество D.

После построения аппроксимации допустимого множества аппроксимация множества Парето всей системы строится согласно алгоритмам, содержащимся в доказательствах теорем 1 и 2.

Выводы. Возможность оптимизировать всю систему путем оптимизации ее декомпозированных подсистем возникает вследствие таких факторов.

1) Расчет подсистемы производится либо из экспериментальных данных о реакциях подсистем, либо, пользуясь спецификой конкретного объекта, путем расчета некоторой части всей системы, содержащей данную подсистему. Тем самым рассчитывается каждая подсистема существенно меньшего порядка, чем вся система, т.е. время для расчета одного варианта для подсистемы намного меньше, чем если бы мы рассчитывали один вариант всей системы.

2) Введением критериальных ограничений мы удаляем из дальнейшего рассмотрения достаточно большое множество векторов параметров.
3) Результаты оптимизации каждой из подсистем учитываются при проведении оптимизации других подсистем.
4) Вследствие применения операции надстройки над множествами $\overline{D_i}$ (ввиду наличия достаточно жестких ограничений) получается множество, содержащее, как правило, небольшое количество точек. Система в целом рассчитывается только в этих точках.
5) Для оптимизации подсистем, также как и для оптимизации всей системы используются алгоритмы, содержащиеся в доказательствах приведенных выше теорем. Таким образом, применение данного метода позволяет оптимизировать большую, а также сформулировать технические условия и технические задания и к ее подсистемам, иными словами, получать иерархически согласованные решения.

Список литературы

1. Крон Г. Исследование сложных систем по частям. - М.: Наука, 1972. - 242 с.
2. Соболь И.М., Статников Р.Б. Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями. 2-е издание - М.: Дрофа, 2006. - 176 с.
3. Statnikov R.B. and Matusov L.B. Multicriteria Optimization and Engineering // New York: Chapman & Hall. 1995. 236 p.
4. Statnikov R.B. and Matusov L. Use of P_τ Nets for the Approximation of the Edgeworth-Pareto Set in Multicriteria Optimization // Journal of Optimization Theory and Applications. 1996. Vol. 91. # 3, P. 543-560.
5. Statnikov R.B. and Matusov J.B. Multicriteria Analysis in Engineering. Dordrecht/ Boston/London// 2002.Kluwer Academic Publishers. 140 p.

Дата поступления: 23 сентября 2025 г.