DOI: 10.18411/vntr2025-177-3

УДК 621.57 + 536.24

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ТЕРМОМОДУЛЕ ПЕЛЬТЬЕ

Владимир Исаакович Ивлев
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт машиноведения им. А.А. Благонравова Российской академии наук, Москва, Россия
6805158@mail.ru

Аннотация. *Большинство работ по моделированию работы термомодулей Пельтье посвящено их функционированию в установившемся режиме, что соответствует многочисленным техническим приложениям с использованием термомодулей. Однако, в ряде случаев термомодуль может работать в циклическом режиме, например, в тепловых приводах, где необходимо периодически нагревать и охлаждать рабочее тело. Для расчета динамических характеристик таких приводов необходимо учитывать переходные процессы в термомодуле, при изменении тока через его спаи. В работе рассматриваются относительно простые математические модели переходных процессов в термомодуле (без решения системы неоднородных дифференциальных уравнений в частных производных) и сравнение результатов расчета с экспериментальными данными.*
Ключевые слова: *термомодуль Пельтье, математическая модель, переходный процесс.*

MATHEMATICAL MODELS OF TRANSIENT PROCESSES IN PELTIER THERMOMODULES

V.I. Ivlev
Mechanical Engineering Research Institute the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia
6805158@mail.ru

Abstract. *Most of the works on modeling the operation of Peltier thermomodules are devoted to their functioning in a steady state, which corresponds to numerous technical applications using thermomodules. However, in some cases, its can operate in a cyclic mode, for example, in thermal actuators, where it is necessary to periodically heat and cool the working fluid. To calculate the dynamic characteristics of such actuators, it is necessary to take into account transient processes in the thermomodule, when the current through its junctions changes. The paper considers relatively simple mathematical models of transient processes in thermomodule (without solving a system of non-homogeneous partial differential equations) and a comparison of the calculation results with experimental data.*
Key words: *Peltier thermomodule, mathematical model, transient process.*

Введение. Термомодули Пельтье в настоящее время находят достаточно широкое применение во многих областях техники для регулирования температуры или охлаждения различных устройств. К их достоинствам можно отнести компактность, отсутствие подвижных частей, нет необходимости в использовании хладоагентов, возможность работы

при различных ориентациях в пространстве. Они используются в радиоэлектронике как миниатюрные охладители входных каскадов высокочувствительных приемников и усилителей, лазерных излучателей и т.д., в медицинских контейнерах для хранения биологических тканей и жидкостей, в автомобильных переносных холодильниках, в устройствах утилизации низкопотенциального тепла. К недостаткам можно отнести низкую энергоэффективность и невысокое быстродействие при термоциклировании. Хотя сам эффект Пельтье был открыт ещё в XIX веке, но и в настоящее время продолжаются исследовательские работы, направленные на повышение их технических и эксплуатационных характеристик. Этой проблеме посвящен целый ряд фундаментальных монографий, например [1], обзоров [2 - 4] так и большое количество научных статей, содержащих результаты исследований по совершенствованию конструкций термомодулей, поиску новых, более эффективных материалов, разработке новых типов устройств для регулирования температуры, а также методам расчета характеристик и оптимизации параметров термомодулей Пельтье. В [5] рассматривается архитектура термоэлектрического охладителя, использующая тонкопленочные элементы на пластиковой подложке в гофрированной структуре, зажатой между плоскими пластинами теплопроводности, что позволяет снизить стоимость устройства при сопоставимых тепловых потоков традиционных охладителей. Использование модулей Пельтье для управления тепловыми потоками в охлаждающих устройствах на основе магнитокалорического эффекта описано в [6]. Отмечается, что это позволяет существенно упростить конструкцию, за счет исключения насосных и клапанных устройств. В [7] рассматривается трехмерная сеть взаимосвязанных ферромагнитных нанопроводов, встроенных в полимерную пленку, являющуюся эффективным гибким материалом в качестве активных охладителей Пельтье. Термопары на основе нанопроволок Co-Fe показывают гораздо более высокие коэффициенты мощности и теплопроводности вблизи комнатных температур, чем другие существующие гибкие термоэлектрические системы. В [8, 9] представлены результаты работ по поиску более эффективных материалов для термоэлектрических устройств, применяемых для систем регулирования температуры и преобразователей тепла в электроэнергию.

Для выбора параметров термоэлектрических модулей Пельтье, оптимизации этих параметров в соответствии с принятой системой критериев, а также синтеза системы управления величиной тока через модуль, при решении конкретной технической задачи, необходимо иметь его математическую модель. Этой задаче посвящено большое количество работ, в частности, [10 - 14]. Некоторые фирмы, производители термомодулей предлагают онлайн калькуляторы для расчета необходимых параметров модулей, например [15]. В указанных работах в основном рассматривается режим установившейся работы термомодуля, т.к. в большинстве технических приложений (охладители, генераторы) используется именно этот режим работы. Однако, в ряде случаев , например при моделировании приводных устройств с фазовым превращением рабочего тела [16] необходимо рассматривать переходные процессы изменения температуры при изменении тока через термомодуль. В общем случае это требует формирование достаточно сложной системы неоднородных дифференциальных уравнений в частных производных, с соответствующими начальными и граничными условиями. Решение здесь может быть получено только численными методами, с использованием специальных программ, что в определенной степени затрудняет анализ результатов моделирования работы термомодуля в конкретном устройстве. Поэтому здесь часто пользуются экспериментальными данными, как например в [17].

Целью данной работы является анализ возможности использования относительно простых математических моделей, описывающих функционирование термомодулей Пельтье и сравнение результатов моделирования с экспериментальными данными.

Описание экспериментального стенда. На рис.1 представлено фото термомодуля Пельтье, используемого в настоящей работе. Модуль состоит из полупроводниковых ветвей “n” и “p” типов, последовательно соединенных медными перемычками. Данная конструкция закреплена между двумя керамическими пластинами с высокой теплопроводностью. В таблице 1 даны параметры термомодуля, необходимые для рассчета, их условные обозначения и численные величины. На рис.2 представлена схема экспериментального стенда. Питание термомодуля осуществлялось от источника постоянного тока с амплитудой пульсации тока не превышающей 3% от номинального значения. Температура воды в контейнере контролировалась ртутным термометром с ценой деления 0,2°С.

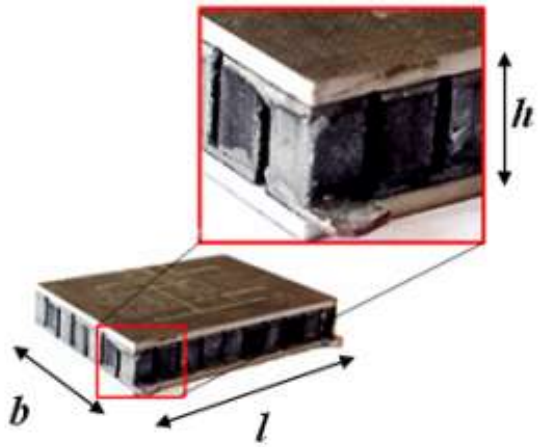


Рис.1. Термомодуль Пельтье.

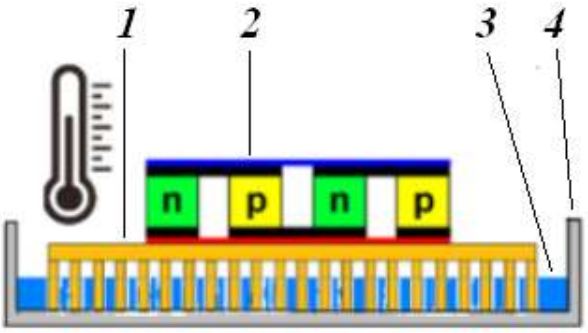


Рис.2. Схема стенда. 1- алюминиевый радиатор, 2- термомодуль, 3- вода, 4- контейнер.

Таблица 1

Параметр термомодуля	**Обозначение**	**Величина**
Габариты	l x b x h	49 x 34 x 9,7 mm
Площадь сечения ветви	f	$16\ 10^{-6}$ m^2
Высота ветви	H	6,7 mm
Число пар ветвей	n	35
Коэффициент термо э.д.с.	α	$4{,}2\ 10^{-4}$ В/К
Сопротивление модуля	r	0,6 Ом
Коэффициент теплопроводности материала ветви	δ	1,4 Вт/м К
Удельная теплоемкость материала ветви	c	150 Дж/кг К
Плотность материала ветви	γ	$8\ 10^3$ кг/$м^3$
Масса термомодуля	m	0,0732 кг
Плотность керамики BeO	σ	$3\ 10^3$ кг/$м^3$
Удельная теплоемкость BeO	C_1	807 Дж/кг К

Измерение температуры верхней поверхности термомодуля производилось высокоточным электронным термометром “Fluke 572-2” (Германия). Температура окружающей среды, воды в контейнере, радиатора и термомодуля при начале измерений составляла 293К. На рис.3 (кривая 4) представлен переходный процесс изменения температуры верхней поверхности термомодуля при токе i = -1А (режим охлаждения). Высота маркера определяет погрешность измерения температуры, ширина соответственно погрешность измерения времени. Численные значения на кривой 4 являются усредненными величинами из пяти серий измерений.

Математические модели термомодуля. Получить верхнюю оценку по быстродействию для термомодуля можно из рассмотрения одномерной модели с полубесконечными ветвями. Уравнение теплопроводности для ветви в этом случае можно записать:

$$c\gamma\frac{\partial T}{\partial t} = \delta\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + j^2(t)\rho \qquad (1)$$

где j – плотность тока, x – координата, отсчитываемая от торца ветви. Граничные и начальные условия имеют вид:

$$\left[\delta\frac{\partial T}{\partial x} - \alpha j(t)T\right]_{x=0} = 0; \quad T(x,0) = T_0; \quad \left[\frac{\partial T}{\partial x}\right]_{x\to\infty} = 0$$

Уравнение (1) решалось численно; соответствующий переходный процесс при i = -1А представлен на рис.3 (кривая 1).

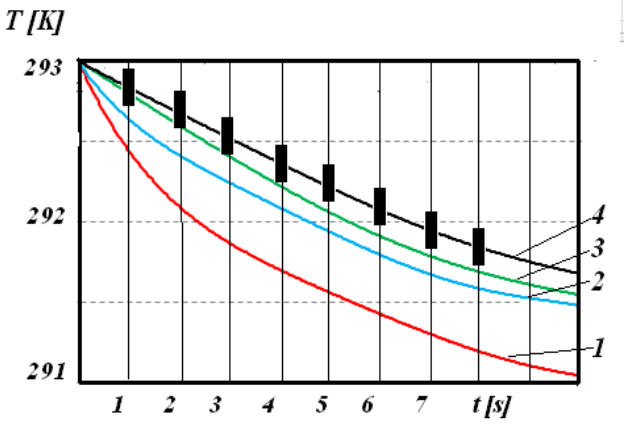


Рис.3. Переходный процесс в термомодуле.

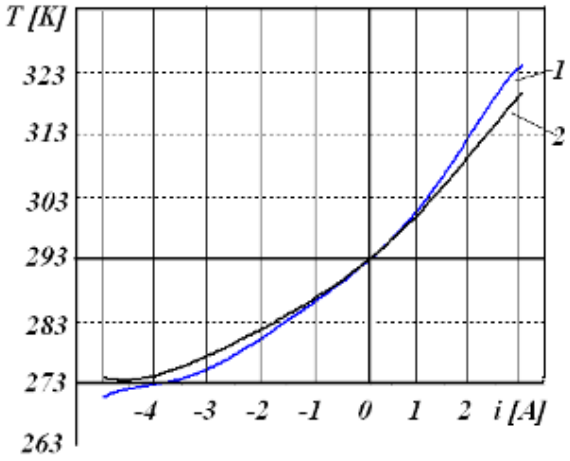


Рис.4. Зависимость установившейся температуры от тока.

Для случая, когда одна сторона термомодуля, соединенная с радиатором, имеющим развитую поверхность и массу много больше чем у термомодуля, позволяет сделать допущение о постоянстве температуры нижних спаев, соединенных с радиатором. Тогда уравнение баланса энергий для верхних спаев, включающее тепло Джоуля, тепло Пельтье и

тепло от теплопроводности между верхними и нижними спаями, в отсутствии тепловой нагрузки и теплообмена с окружающим воздухом можно записать в виде:

$$0{,}5mc\frac{dT_1}{dt} = 0{,}5i^2r + n\alpha T_1 - \frac{2nf\delta}{h}(T_1 - T_0) \qquad (2)$$

Здесь T_1 – температура верхних спаев, T_o – температура равная 293К.
Уравнение (2) является линейным дифференциальным уравнением первого порядка. На рис.3 представлено решение (2) для указанных выше параметров при i= -1А (кривая 3).
Получить уточненное уравнение, описывающее измененение температуры спаев можно исходя из следующих соображений. Так как тепло Пельтье выделяется или поглощается только в месте “p-n” перехода, то в начале переходного процесса интенсивно охлаждаются или нагреваются области материала только вблизи “p-n” перехода и, очевидно, изменение температуры T_1 будет проходить быстрее, чем это следует из решения уравнения (2). В случае, когда тепло Пельтье существенно превосходит тепло Джоуля, уравнение, описывающее изменение температуры рабочих спаев, можно записать в виде:

$$0{,}5\varphi(t)mc\frac{dT_1}{dt} + \left(\frac{2nf\delta}{h} + n\alpha i\right)T_1 = 0{,}5i^2r \qquad (3)$$

Здесь T_1 отклонение температуры спаев от температуры окружающей среды., $\varphi(t)$ – некоторая функция времени, характеризующая изменение количества материала спаев термомодуля, охлаждаемого или нагреваемого теплом Пельтье. Данную функцию можно представить в виде:

$$\varphi(t) = [(1+\varepsilon) - e^{-at}]$$

где: ε – малая величина, характеризующая массу спаев в начале переходного процесса:

$$a = \frac{0{,}48h}{\tau_0}; \quad \tau_0 = \frac{0{,}5mc}{2nf\delta/h + n\alpha i}$$

- термическая постоянная времени термомодуля.

Уравнение (3) является нестационарным линейным дифференциальным уравнением первого порядка, которое может быть представлено в виде:

$$\frac{dT_1}{dt} + P(t)T_1 = Q(t)$$

где:

$$P(t) = \frac{n\alpha i + 2nf\delta/h}{0{,}5mc[(1+\varepsilon) - e^{-at}]}; \quad Q(t) = \frac{i^2r}{mc[(1+\varepsilon) - e^{-at}]}$$

Решение уравнения (3) будем искать в виде [18]:

$$T_1(t) = e^{-S(t)}\left[\int Q(t)\,e^{S(t)}dt + C\right]; \quad S(t) = \int P(t)dt$$

C – постоянная интегрирования. После некоторых преобразований решение уравнения (3) запишется в виде:

$$T_1(t) = \frac{0{,}5i^2r}{n\alpha i + (2nf\delta/H)}\left[1 - \frac{\varepsilon^{\mu}}{[(1+\varepsilon)e^{at} - 1]^{\mu}}\right]$$

$$\mu = 2{,}083/(1+\varepsilon)H$$

Из условия, что при t=0, T_1=0, имеем:

$$C = -\varepsilon^{\mu}\frac{0{,}5i^2r}{n\alpha_0 i + 2nf\delta/h}$$

и соответственно:

$$T_1(t) = \frac{0{,}5i^2r}{n\alpha_0 i + 2nf\delta/h}\left[1 - \frac{\varepsilon^{\mu}}{[(1+\varepsilon)e^{at} - 1]^{\mu}}\right]$$

Из последнего выражения видно, что при t=0 и $\varepsilon\to 0$, величина T_1=0, а при $t\to\infty$, значение T_1 принимает установившееся значение как и по уравнению (2). На рис.3 (кривая 2) представлен переходный процесс, построенный на основании решения уравнения (3) при ε = 0,1. На рис.4 (кривая 1) представлена зависимость установившейся температуры верхних спаев в функции тока через термомодуль (статическая характеристика), рассчитанная по уравнению баланса энергий. Кривая 2 – соответственно экспериментальные значения.

Заключение. Как следует из рис.3, решение уравнения (2) дает переходный процесс более близкий к экспериментальной кривой, чем решение уточненного уравнения (3). Это связано с тем, что здесь рассматривается термомодуль с керамическими пластинами, закрывающими спаи, температура которых и рассчитывается по уравнению (3). В нашем случае уравнение (2) дает усредненное решение, которое ближе к экспериментальным значениям температуры, которые измерялись на верхней стороне керамической пластины. Для термомодуля без верхней керамической пластины, который использовался нами в экспериментальной модели привода, описанного в [16], уравнение (3) будет более точно описывать переходный процесс. Различие расчетных и экспериментальных значений температуры верхней части термомодуля также связано с тем, что представленные математические модели не учитывают теплообмен с окружающей средой. В дальнейшем это можно учесть добавлением в уравнение баланса энергий для верхней части термомодуля члена вида: $\beta S(T_1-T_0)$, где β – коэффициент теплопередачи от поверхности термомодуля к окружающей среде или к тепловой нагрузке, S – поверхность теплообмена. В общем случае коэффициент теплопередачи зависит от многих факторов, в частности от ориетации поверхности в пространстве. Его численное значение может быть определено для конкретной конструкции устройства экспериментально, или с помощью определенных процедур идентификации, например как в [19]. Ограничение интервала времени наблюдения переходного процесса на рис.3 связано с тем, что температура поверхности радиатора в области, прилегающей к зоне контакта после 10 – 15 секунд начинает увеличиваться, что нарушает принятые допущения при формировании математической модели. Из полученных результатов можно сделать вывод, что переходный процесс в собственно термопарах модуля может описываться простыми уравнениями вида (2) или (3), но при этом необходимо добавлять уравнения баланса энергий для элементов конструкции, контактирующих со спаями термопар.

Список литературы

1. CRC handbook of Thermoelectrics / edited by D.M. Rowe. 1995 by CRC Press LLC. Library of Congress Card Number 94-11425. www.crcpress.com
2. Shilpa M.K. et al. A systematic Review of Thermoelectric Peltier Devices: Applications and Limitations.// Fluid Dynamics & Materials Processing. 2023, vol. 19, №1, p. 187 – 206. DOI: 10.32604/fdmp.2022.020351
3. Sulaiman A. et al. Cooling Performance of Thermoelectric Cooling (TEC) and Applications: A review.// MATEC Web of Conferences 225, 03021 (2018) https://doi.org/10.1051/matecconf/20182250.302
4. Zoui M.A. A Review on Termoelectric Generators: Progress and Applications.// Energies. 2020, 13, 3606. https://doi:10.3390/en13143606
5. Owoyele O., Ferguson S., O'Connor B. Performance analysis of a thermoelectric cooler with a corrugated architecture.// Applied Energy. 2015, 147, p. 184 – 191. http://dx.doi.org/10.1016/j.apenergy.2015.01.132
6. Lin C. Magnetic Cooling with Thin Peltier Modules as Thermal Switches.// Journal of Magnetism and Magnetic Materials. 2023, Vol. 570, pp. 170482. doi:10.1016/j.jmmm.2023.170482 (Mitsubishi Electric Research Laboratories. https://www.merl.com
7. Gomes T. Flexible Active Peltier Coolers Based on Interconnected Magnetic Nanowire Networks.// Nanomaterials (Basel), 2023, May 25; 13(11):1735. doi: 10.3390/nano13111735
8. Song J., et al. Bismush-free Mg_3Sb_2 with enhanced room – temperature thermoelectric and mechanical properties.// Journal of Materiomics. 2024, Vol.10, Issue 5, pp. 1103 – 1108. https://doi.org/ 10.1016/j.jmat.2023.11.012
9. Manibalan K., et al. Enhanced Room – Temperature Thermoelectric Performance of 2D-SnSe Alloys via Electric – Current – Assisted Sintering.// Materials. 2023, 16, 509, pp. 2 – 10. https://doi.org/10.3390/ma16020509
10. Golebiowska J., Widomski M. Numerical Assessment of the Experimental Thermoelectric Cooling System Effectiveness.// Journal of Ecological Engineering. 2022, 23(12), pp. 99-110. https://doi.org/10.12911/22998993/154845
11. Kabeel E., et al. Theoretical study of thermoelectric cooling system performance.// Journal of Engineering Research. 2019, Vol. 3, Issue 1, Article 2. https://digitalcommons.aaru.edu.jo/erjeng/vol3/iss1/2
12. Lis S., et al. Optimizing Energy Efficiency in a Peltier – Module – Based Cooling Microunit through Selected Control Algorithms.// Energies. 2024, 17,5031. https://doi.org/10.3390/en17205031
13. Vasilyev G., Kuzichkin O., Surzhik D. Method for Modeling Dynamic Modes of Nonlinear Control Systems for Thermoelectric Modules.// Advances in Dynamical Systems and Applications. 2020. Vol. 15, №2, pp. 187 – 197. https://dx.doi.org/10.37622/ADSA/15.2.2020.187-197
14. Belovski I., et al. Mathematical Model of Thermoelectric Peltier Module.// Journal of Communication and Computer. 2017, 14, pp. 60 – 64. doi:10.17265/1548-7709/2017.02.002
15. Peltier – Thermoelectric Cooler Module Calculator. (TE technology, INC.) https://tetech.com/peltier-thermoelectric-cooler-module-calculator/
16. Ivlev V., Misyurin S., Nelyubin A. Pneumatic Actuator with Gas – Liquid Phase Change Working Fluid. Mathematical Modeling and Experimental Research.// Biologically Inspired Cognitive Architectures./ Studies in Computational Intelligence. 2024, vol. 477, pp. 146 – 154.

https://doi.org/10.1007/978-3-031-76516-2_13
17. Wang Y., et al. Thermoelectric cyclic-thermal regulation: A new operational mode of thermoelectric materials with high energy efficiency.// Joule. 2024, 8, pp. 3201 – 3216. Published by Elsevier Inc. https://doi.org/10.1016/j.joule.2024.08.002
18. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М. Наука, 1978, -831 с. (Korn G., Korn T. Mathematical Handbook. McGraw – Hill Book Company, 1968).
19. Ivlev V., Misyurin S. To Refining the Thermo – Mechanical Model of Vane Type Air Motor.// Procedia Computer Science 2021, 190, pp. 377 – 387. doi:10.1016/j.procs.2021.06047

Дата поступления: 9 июня 2025 г.