DOI: 10.18411/vntr2024-174-3

УДК. 3054

О ВЫЧИСЛЕНИИ МНОЖЕСТВА ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ В ЗАДАЧАХ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ МАШИН

Леонид Борисович Матусов

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт машиноведения им. А.А.Благонравова Российской академии наук, Москва, Россия

matusoff.l@yandex,ru

Аннотация. *Корректное определение допустимого множества решений является наиболее важным в инженерных задачах оптимизации. Для построения допустимого множества был создан и успешно внедрен в различные области науки, индустрии и технологий. Метод Исследования Пространства Параметров (Метод ИПП). Ранее были опубликованы результаты наших исследований по определению скорости сходимости этого метода, и аппроксимации допустимого множества решений. В данной работе решается задача аппроксимации и регуляризации множества Эджворт - Парето –оптимальных проектных решений с заданной точностью. Интерес к этому множеству объясняется тем, что в любой задаче многокритериальной оптимизации (в частности в задачах многокритериального проектирования параметров машин), оптимальные решения всегда принадлежат этому множеству. Аппроксимация его необходима для того, что, только имея ее, мы можем быть уверенны в получении всех наиболее важных проектных решений с заданной точностью. В силу того, что множество Эджворт - Парето- оптимальных решений не устойчиво, даже небольшие погрешности при вычислении значений критериев качества системы может существенно изменить это множество. Из этого следует, что аппроксимируя с заданной точностью допустимое множество решений, мы не можем гарантировать аппроксимации множества Эджворт -Парето- оптимальных решений. Такие задачи называются некорректными по Тихонову. В данном случае решением некорректной задачи является регуляризация множества Эджворт -Парето. Получить полное решение данной проблемы, приемлемое для большинства практических задач достаточно сложно. Тем не менее имеются методы, предложенные для определенных классов функций. В данной работе эта задача решается применительно к критериям, удовлетворяющим условию Липшица.*

Ключевые слова*: аппроксимация, регуляризация, множество Парето, допустимое множество решений, некорректная задача.*

ON THE CALCULATION OF A SET OF OPTIMAL SOLUTIONSIN IN PROBLEMS OF MULTICRITERIA DESIGN OF MACHINE PARAMETERS

L.B. Matusov

Mechanical Engineering Research Institute the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

matusoff.l@yandex,ru

Abstract. *The correct determination of the feasible solution set is a major challenge in engineering optimization problems. In order to construct the feasible solution set, a method called the Parameter Space Investigation (PSI) has been created and successfully integrated into various fields of industry, science, and technology The issues of the estimation of the PSI method convergence rate, the approximation of the feasible solution set were described early. The method of approximation of Edgvorth-Pareto optimal set and the regularization of these set are described in our paper. The interest in this set is explained by the fact that in any problem of multicriteria optimization (in particular in problems of multicriteria design of machine parameters), optimal solutions always belong to this set. Its approximation is necessary because only by having it can we be confident in obtaining all the most important design solutions with the given accuracy. Since the Edgvorth- Pareto optimal set is unstable, even slight errors in calculating criteria may lead to a drastic change in the set. This implies that by approximating a feasible solution set with a given accuracy we cannot guarantee an appropriate approximation of the Edgvorth- Pareto set. Such problems are said to be ill-posed in the sense of Tikhonov. In these case regularization of the these optimal set is a solution of ill- posed problem. A complete solution acceptable for the majority of practical problems is still to be obtained. Nevertheless, promising methods have been proposed for some classes of functions .The method described in our paper is applied for criteria, satisfied Lipshits condition.*

Key words: *approximation, regularization, Egvorth - Pareto set, feasible solution set, ill-posed problem.*

1.Введение. Предположим, что задана математическая модель исследуемой системы, и модель эта зависит от n параметров $\alpha_1,...,\alpha_n$. Пусть α =($\alpha_1,...,\alpha_n$).Как правило, специалисты задают пределы изменения каждого из параметров, которые мы будем называть *параметрическими ограничениями*

$$\alpha_j^* \le \alpha_j \le \alpha_j^{**} \qquad (j=1,2,...,n). \tag{1}$$

Ограничения (1) выделяют в пространстве параметров параллелепипед П. Кроме параметрических ограничений обычно в условия задачи включаются функциональные ограничения

$$c_l^* \le f(\alpha) \le c_l^{**} \quad (l=1,2,...,t). \tag{2}$$

Здесь $f_l(\alpha)$ — некоторые непрерывные функции от параметров.

Имеются критерии качества - непрерывные функции $\Phi_1(\alpha),...,\Phi_k(\alpha)$, которые желательно уменьшить. Очевидно, что не все значения $\Phi_\nu(\alpha)$ одинаково приемлемы в смысле допустимого функционирования системы. Чтобы избежать такой ситуации необходимо ввести *критериальные ограничения*

$$\Phi_\nu(\alpha) \le \Phi_\nu^{**} \quad (\nu=1,2,...,k). \tag{3}$$

Критериальное ограничение Φ_ν^{**} — это максимальное (минимальное) допустимое значение критерия $\Phi_\nu(\alpha)$.

Пусть D — множество точек α, которые удовлетворяют всем ограничениям (1), (2) и (3). Естественно назвать D *множеством допустимых точек(параметров).* Сформулируем одну из основных задач векторной оптимизации.

Необходимо найти такое множество $P \subset D$, для которого

$$\Phi(P) = \min_{\alpha \in D}(\Phi(\alpha), \quad (4)$$

где $\Phi(\alpha) = (\Phi_1(\alpha), \Phi_2(\alpha), ..., \Phi_k(\alpha))$ - вектор критериев [1].

P называется множеством Эджворт - Парето, также как его образ в пространстве критериев - $\Phi(P)$.

В дальнейшем для простоты изложения будем называть его множеством Парето.

Предположим, что критерии являются непрерывными функциями, удовлетворяющими условию Липшица, т.е. для всех векторов α и β из области определения критерия Φ_ν существует число L_ν такое, что

$$\left| \Phi_\nu(\alpha) - \Phi_\nu(\beta) \right| \le L_\nu \max_j \left| \alpha_j - \beta_j \right|.$$

Или эквивалентно: существует L'_ν такое что

$$\left| \Phi_\nu(\alpha) - \Phi_\nu(\beta) \right| \le L'_\nu \sum_{j=1}^{r} \left| \alpha_j - \beta_j \right|.$$

2.Аппроксимация множества Парето-оптимальных решений. Целью данного исследования является создание методов и алгоритмов аппроксимации и регуляризации множества Парето – оптимальных решений. Задача построения множества Парето, как уже говорилось, достаточно сложна. В ряде работ предлагается решение этой проблемы при достаточно сильных ограничениях, накладываемых на критерии или систему предпочтений специалиста. Предлагаемые ниже результаты получены только в предположении о непрерывности критериев и выполнении условия Липшица [2]. Пусть P – множество Парето в пространстве параметров; $\Phi(P)$ – его образ; ε - набор допустимых погрешностей для $\Phi(\alpha) = (\Phi_1(\alpha), \Phi_2(\alpha), ..., \Phi_k(\alpha))$. Необходимо построить конечное множество Парето $\Phi(P_\varepsilon)$, аппроксимирующее $\Phi(P)$ с точностью до ε. Пусть $\Phi(D_\varepsilon)$ - ε-аппроксимация $\Phi(D)$ и P_ε - Парето-оптимальное подмножество в D_ε. Как уже говорилось, задача аппроксимации $\Phi(P)$ является некорректной по Тихонову. Приведем определение этого понятия. Пусть P - функционал (оператор) на пространстве X, P: $X \to Y$. Предположим, что существует $y^* = \inf P(x)$, и $V_\varepsilon(y^*)$ - окрестность искомого решения y^*. Выделим элемент x^* (или множество элементов) в пространстве X и его δ-окрестность $V_\delta(x^*)$. Назовем решением задачи нахождения экстремального значения функционала P такое x_δ^ε, которое одновременно удовлетворяет условиям $x_\delta^\varepsilon \in V_\delta(x^*)$ и $P(x_\delta^\varepsilon) \in V_\varepsilon(y^*)$. Если по крайней мере одно из этих условий не выполняется при произвольных ε и δ, то такая задача называется некорректной по Тихонову.

Аналогичное определение может быть дано в случае, когда P - оператор из пространства X в пространство Y. Пусть $X=\{\Phi(D_\varepsilon), \Phi(D)\}$; $Y=\{\Phi(P_\varepsilon), \Phi(P)\}$, где $\varepsilon \to 0$, и пусть $P : X \to Y$ - оператор, сопоставляющий каждому элементу из X, его Парето оптимальное подмножество. Тогда в соответствии с ранее сказанным, задача построения множеств $\Phi(D_\varepsilon)$ и $\Phi(P_\varepsilon)$, принадлежащих одновременно ε-окрестностям $\Phi(D)$ и $\Phi(P)$ соответственно, является некорректной по Тихонову. В этом случае в пространствах X и Y должна быть определена метрика или топология [2,3], соответствующая системе предпочтений специалиста на $\Phi(D)$.

Зададим топологию на X с помощью окрестности произвольной точки x. Пусть

W_ε(x) состоит из таких Ф(D_ε), что для любых Ф(α) ∈x, существует Ф(β)∈Ф(D_ε), для которого $\left|\Phi_\nu(\alpha)-\Phi_\nu(\beta)\right|\le\varepsilon_\nu$, $\nu=1,...,k$. Либо к W_ε(x) принадлежат такие Ф(D_ε), что для любых Ф(α) ∈ Ф(D_ε) существует Ф(β)∈x такое, что $\left|\Phi_\nu(\alpha)-\Phi_\nu(\beta)\right|\le\varepsilon_\nu$, $\nu=1,...,k$. Аналогично зададим окрестность W_ε(y) для произвольного y ∈ У , а значит и топологию на У. Зададим V_ε-окрестность точки Ф(α^0)∈Ф(П)

$$V_\varepsilon=\{\Phi(\alpha)\in\Phi(\Pi):\left|\Phi_\nu(\alpha^0)-\Phi_\nu(\alpha)\right|\le\varepsilon_\nu,\quad \nu=1,...,k\}. \tag{5}$$

В приведенной ниже теореме 3 строится Парето оптимальное множество, Ф(P_ε) , в котором для любой точки Ф(α^0)∈ Ф(P) и любой ее ε-окрестности V_ε имеется точка Ф(β)∈Ф(P_ε), принадлежащая V_ε. Обратно, в ε-окрестности любой точки Ф(β)∈Ф(P_ε) существует точка Ф(α^0)∈Ф(P). Множество Ф(P_ε) называется аппроксимацией, обладающей свойством L.

Пусть построена Ф(D_ε)-аппроксимация множества Ф(D). Будем говорить, что аппроксимация Ф(P_ε) обладает свойством L_1, если для любой точки Ф(α^0) ∈Ф(P) любой ее ε-окрестности V_ε существует точка Ф(β)∈Ф(P_ε), принадлежащая V_ε. Пусть имеется Ф(D_ε) – аппроксимация Ф(D) [4].

Теорема 1. Если критерии непрерывны и удовлетворяют условию Липшица, то существует аппроксимация Ф(P'_ε), со свойством L_1.

Доказательство. Доказательство леммы проводится с помощью анализа окрестностей т.н. подозрительных точек из Ф(D_ε), т.е. таких, в окрестностях которых, могут находиться истинно паретовские точки. Если в окрестностях подозрительных точек имеются новые Парето-оптимальные решения, то они добавляются к Ф(P_ε). Вместе с Ф(P_ε), они образуют искомую ε-аппроксимацию множества Парето. Определим множество подозрительных точек. Рассмотрим некоторую точку Ф(α)∈ Ф(P_ε), и пусть M_α^+ ={Ф(β)∈Ф($D\varepsilon$): Фν(β) ≥ Фν(α)} ($\nu=1,2,...,k$), M_α^ε = {Ф(β)∈ M_α^+ : Фν(β) − Фν(α) ≤ ε_ν /2} при некотором ν. Пусть

M_α^- = Ф($D\varepsilon$)\(M_α^+ U Ф(P_ε)), M_α = M_α^ε U M_α^-, $M=U\,M_\alpha$.

Рассмотрим Ф(α^0) из М. Если для нее не найдется в Ф(P_ε) ни одной точки Ф(β) такой, что Фν(β) ≤ Ф$_\nu$(α^0) - ε_ν , то Ф(α^0) будем называть подозрительной точкой. Множество таких точек обозначим ПМ.

Нетрудно видеть, что только в ε-окрестностях точек из ПМ могут лежать точки из Ф(P), не аппроксимированные с точностью до ε множеством Ф(P_ε). Таким образом, если мы построили куб Π_{α^1} с центром в некоторой точке α^1такой, что Ф(α^1) ∈ ПМ, и длиной ребра min $2\varepsilon_\nu/L_\nu$ ($\nu=1,2,...,k$), то этот куб может содержать Парето- оптимальные точки из Ф(P), не аппроксимированные ни одной точкой из Ф(P_ε).

Пусть ε'_ν -столь малые погрешности, которыми можно пренебречь. Аппроксимируем пересечение множеств Ф(Π^1) и Ф(D) с точностью до ε'. По крайней мере одна из рассматриваемых точек в Π_{α^1} принадлежит окрестности Парето -оптимальной точки Ф(α^0), если такая точка существует. Обозначим такую точку Ф(μ). Если Ф(α^0) – паретовская точка, то Ф(μ) улучшает значение по крайней мере одного критерия произвольной точки Ф(α)∈Ф(P_ε).. Если такая Ф(μ) существует, то добавляем ее к Ф(P_ε). В противном случае Π_{α^1} не содержит точку Ф(α^0) ∈Ф(P) с точностью до ε'. Эта операция повторяется для всех точек,

принадлежащих ПМ. Пусть UФ(μ^i) U Ф(P_ε) = Ф(P'_ε) и Uμ^i U $D\varepsilon$ = D'_ε для всех i , где μ^i-точка, полученная после выполнения упомянутой процедуры. Так что Ф(P'_ε) может содержать точки, которые не являются Парето-оптимальными и должны быть отброшены. В результате мы получаем множество Ф(P'_ε), которое является парето - оптимальным подмножеством в Ф(Uμ^i U $D\varepsilon$) и ε -аппроксимацией Ф(P). Это завершает доказательство теоремы.

Полученная таким образом аппроксимация Ф(P'_ε) обладает свойством M_1.Однако, обратное утверждение, в общем случае, не верно, т.к. Ф(P'_ε) может содержать лишние точки, анализ которых бесполезен.

Будем говорить, что аппроксимация Парето- оптимального множества Ф(P'_ε), построенного в теореме 1, обладает свойством L_2 , если существует точка Ф(β) $\in$Ф(P) внутри ε -окрестности любой точки из Ф(α)$\in$Ф(P'_ε) .

Теорема 2. Существует подмножество Ф(P''_ε) множества Ф(P'_ε),обладающее свойством L_2.

Доказательство. Пусть Ф(α)$\in$ Ф(P'_ε) , В – произвольное подмножество в $\{1,2,\dots,к\}$ и $N'_{\Phi(\alpha)}$= $\{\Phi(\beta) \in \Phi(P'_\varepsilon): \Phi\nu(\alpha) \le \Phi\nu(\beta) \le \Phi\nu(\alpha) + \varepsilon_\nu\}$ для любого ν из В. $N''_{\Phi(\alpha)}$=$\{\Phi(\beta) \in \Phi(P'_\varepsilon): \Phi\nu(\beta) \le \Phi\nu(\alpha) - \varepsilon_\nu\}$ для любого $\nu \in \{1,2,\dots,к\}$\В. Пусть также $N_{\Phi(\alpha)}$=$N'_{\Phi(\alpha)}$U $N''_{\Phi(\alpha)}$. Как и ранее, будем исследовать окрестности точек α и β, для которых Ф(β)$\in N_{\Phi(\alpha)}$.

Если для всех точек P_τ –сетки [1], принадлежащих кубам Π_α и Π_β и, удовлетворяющих предыдущим требованиям для аппроксимации допустимых множеств выполняется условие: для любого α', принадлежащего пересечению Π_α и D , существует μ, принадлежащая пересечению Π_β и D так, что имеет место Ф$\nu(\mu) \le \Phi\nu(\alpha') + \varepsilon'_\nu$ для любого ν из В, где ε'_ν -достаточно малая величина, то точку Ф(α) можно исключить из Ф(P'_ε), т.к. ее ε-окрестность не содержит какой либо точки из Ф(P). Проводя аналогичную процедуру для всех Ф(α)$\in$ Ф(P'_ε), мы получим подмножество Ф(P''_ε) множества Ф(P'_ε),обладающее свойством L_2.

Нетрудно показать, что с помощью процедур, описанных в теоремах 1 и 2, и вычисляя Ф(P''_ε), мы в действительности доказали следующее:

Теорема 3. Если критерии непрерывны и удовлетворяют условию Липшица, то Ф(P''_ε)- есть аппроксимация множества Парето Ф(P), обладающая свойством L.

Пусть ε_j - сходящаяся к 0, убывающая последовательпость положительных чисел. Известно, что решение некорректной задачи, какой является задача аппроксимации множества Парето, сводится к построению регуляризирующей последовательности. В данном случае это последовательность множеств Ф(P_{ε_j}), j=1,2,… такая, что для любой соответствующей последовательности Ф(D_{ε_j}) и любых ε_j – окрестностях множеств Ф(P) и Ф(D), множества Ф(P_{ε_j}) и Ф(D_{ε_j}), начиная с некоторого j_0, принадлежат соответствующим окрестностям.

Предположим, что в соответствии с теоремами 1 и 2 последовательности Ф(P''_{ε_j}), Ф(D''_{ε_j}), P''_{ε_j},D''_{ε_j} построены для последовательности ε_j.

Тогда справедлива следующая

Теорема 4. Последовательность $\Phi(P^{''}_{\varepsilon_j})$ – регуляризирующая.

Доказательство. Из свойства L, справедливого для любого $\Phi(P^{''}_{\varepsilon_j})$, и определения окрестностей $W_\varepsilon(\Phi(P))$ и $W_\varepsilon(\Phi(D))$, непосредственно следует, что условия, определяющие регуляризирующую последовательность, выполнены.

Замечания.1. В ряде работ решается задача регуляризации множества Парето при помощи известной метрики Хаусдорфа. Известно, что построить на допустимой области решений метрику, соответствующую системе предпочтений специалиста, невозможно или весьма затруднительно. Класс задач, описываемых метрикой Хаусдорфа, весьма узок, т.к. при применению ее к общему случаю, как правило произойдет искажение структуры предпочтений специалиста. Кроме того, возникает вопрос: почему эта метрика должна порождаться каким- либо наперед заданным расстоянием? Ведь с изменением этого расстояния может измениться сходимость.

Поэтому в общем случае необходимо введение топологии, подобно тому, как это делалось выше. Эта топология является обобщением метрики Хаусдорфа, но при этом не искажает систему предпочтений специалиста.

2. Изложенное выше носит теоретический характер. Тем не менее, доказательства теорем содержат определенный алгоритм, согласно которому вычисляется множество Парето в любой практической задаче оптимизации параметров исследуемого объекта, описываемого математической моделью. Например, при проектировании машин (в частности вибрационных технологических машин). Как правило, качество таких систем описываются не одной, а несколькими характеристиками (критериями качества). Последнее влечет необходимость применения методов многокритериальной оптимизации. Известно, при применении этих методов все оптимальные решения принадлежат множеству Парето. Выбирая на этом множестве наиболее предпочтительное решение, проектировщик завершает процесс оптимизации.

Поэтому вычисление данного множества с наперед заданной точностью играет первостепенную роль. Без такого вычисления проектировщик может столкнутся со следующими ситуациями.

1) Допустим, что ему удастся получить удовлетворяющий его набор значений критериев качества. Но при этом у него не может быть никакой гарантии в том, что, продолжая исследования допустимой области, он не получит намного более лучшего решения.
2) Может случится так, что проектировщик не сможет найти удовлетворительного решения. Тогда имеют место вопросы. Может при данной постановке задачи такого решения не существует, и нужно корректировать постановку? Или, если продолжить исследования, не меняя постановки, то, может быть удастся найти хорошее решение?

Для того, чтобы ответить на эти вопросы надо иметь метод построения множества Парето с заданной точностью, как это имеет место в данной работе.

Список литературы

1. Соболь И.М., Статников Р.Б. Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями. - М: Дрофа, 2006. - 212 с.
2. Matusov L.B. Vector Optimization of a Complicated Intellectual and Mechanical System// European Journal of Natural History. - 2019.- №5. - P. 70-74.
3. Statnikov R, Matusov L. Multicriteria Analysis in Engineering. Dordrecht: Cluever, - 2002. - 203p.
4. Статников Р.Б., Матусов Л.Б**.** О недопустимых, допустимых и оптимальных решениях в задачах проектирования//Проблемы машиностроения и надежности машин. - 2012. № 6.- С.24-28.

Дата поступления: 9 сентября 2024 г.