УДК 62-185.7

ПОВЕРХНОСТНЫЕ И ВНУТРЕННИЕ ДВУМЕРНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ В РОТОРЕ С ПЕРЕГОРОДКАМИ

© Андрей Николаевич Никифоров
ИМАШ РАН, Москва, Россия
n.andre@mail.ru

Аннотация. *Обсуждаются течение Стокса, частоты собственных колебаний и соответствующие им угловые скорости распространения инерционных волн на поверхности и внутри невязкой, несжимаемой жидкости, которая частично и равно или целиком заполняет одинаковые отсеки в роторе, имеющем достаточно длинную цилиндрическую полость, сплошные и тонкие перегородки и постоянную скорость вращения. Решения в общем виде заслуживают внимания разработчиков роторных машин, функционирующих с жидкостью, в которых явление волнового резонанса необходимо устранить или наоборот использовать.*

Ключевые слова: *ротор, жидкость, волновой резонанс.*

Введение

Центрифуги, сепараторы, охлаждаемые изнутри газовые турбины, гироскопы, вращающиеся ракеты и автобалансирующие устройства с жидким содержимым могут испытывать особенно при частичном заполнении так называемый волновой резонанс [1]. Когда частота прецессии ротора достигает некоторой из бесчисленных частот и форм собственных колебаний жидкости, в ней и на её свободной поверхности (при наличии) возникают волны, распространяющиеся относительно ротора.

С другой стороны, вращение жидкой массы и всякое её относительное (ротора) движение создаёт гидродинамическое давление на ротор, влияющее, как возмущающая сила, на его амплитуду и частоту прецессии, а также на его критические скорости и границы устойчивого вращения. Это влияние сравнительно мало в случаях неполного смачивания боковой стенки роторной полости (по её окружности), но оказывается неожиданно большим, когда боковая стенка остается полностью смоченной при сформировавшемся радиусе прецессии ротора.

Вне диапазона волнового резонанса жидкость со свободной поверхностью изменяет вибрационные характеристики ротора так, как если бы полость была целиком заполнена жидкостью, даже тогда, когда она заполняет только малую часть объема полости [2]. При волновом резонансе жидкости со свободной поверхностью и вращении ротора с закритической скоростью может возникать «замкнутый круг» – волны раскачивают ротор, а ротор повышает волны. Прежде всего, система теряет устойчивость в условиях волнообразования первого порядка и отсутствия перегородок (рис.1,а), так как формируется крайне неуравновешенная конфигурация жидкости, перемещающаяся относительно ротора [3].

Размещение в полости ротора радиальных перегородок дает повышение частот свободных колебаний вращающейся жидкости, а также смещение в высокочастотную область и сужение диапазона неустойчивости системы [4, 5]. Вместе с тем в литературе волновые частоты для ротора, содержащего жидкость, не представлены в виде явной функции количества перегородок в нём. В данной статье этот недостаток устраняется, причем

достоверность полученных результатов обеспечивается строгой постановкой задачи и использованием известных концепций механики жидкости и математики, а также экспериментальных данных авторов.

Задача о собственных колебаниях жидкости в достаточно длинном роторе

Обозначенная проблема решается при следующих предположениях.

Случайное или систематическое возмущение от двух вероятных источников – стенок ротора и свободной поверхности жидкости – вызывает в ней двумерные нормальные колебания, т.е. такие, когда каждой частоте колебаний жидкости ω_k (k=1,2,...) соответствует пропорциональное функции[1] $\exp i(k\theta \mp \omega_k t)$ отклонение жидкостных частиц (бегущая волна), причем величина ω_k/k равна угловой скорости Ω_k распространения волны, которая во много раз меньше скорости волны сжатия, т.е. скорости звука в жидкости. При совпадении частоты возмущения с одной из собственных частот жидкости ω_k волнение не затухает.

Из-за фактической несжимаемости жидкости и волнения свободной поверхности, а если строго вследствие значительности поверхностных инерционных волн по сравнению с внутренними инерционными волнами, обусловленными упругими деформациями стенок, помимо колебательного движения поверхностных частиц жидкости (по круговым или эллиптическим орбитам), существует их переносное движение относительно ротора в направлении распространения волны. Осредненная угловая скорость этого поверхностного или так называемого «волнового» течения Стокса [6]:

$$\mp\Omega_{\mathrm{St}} = \mp\frac{r_{\mathrm{o}}^2}{r}\frac{\omega_k^2}{v_{\mathrm{w}}}. \qquad (1)$$

Здесь $r_{\mathrm{o}}=a$ - радиус орбиты поверхностных жидкостных частиц или амплитуда поверхностной волны, т.е. половина её высоты, r - радиус свободной поверхности жидкости, $v_{\mathrm{w}} = r\Omega_k$ - фазовая скорость поверхностной волны.

Угловую скорость свободной поверхности жидкости относительно ротора (1) разумно переписать как:

$$\mp\Omega_{\mathrm{St}} = \mp k\frac{a^2}{r^2}\omega_k. \qquad (2)$$

Гидродинамические уравнения Навье-Стокса и неразрывности для жидкости внутри ротора, которая свободна от массовых и поверхностных сил, в полярной системе координат rθ (рис.1,a,b), вращающейся со скоростью ротора ω, имеют вид [7]:

[1]Данная функция со знаком «–» отвечает распространению волны в сторону положительных θ на рис.1. В противном случае угловое перемещение волны описывается функцией, содержащей «+».

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial \mathrm{r}}+v\frac{\partial u}{\mathrm{r}\partial\theta}-\frac{v^2}{\mathrm{r}}-\omega^2\mathrm{r}-2\omega v=-\frac{\partial \mathrm{p}}{\rho\partial \mathrm{r}}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \mathrm{r}^2}+\frac{\partial u}{\mathrm{r}\partial \mathrm{r}}+\frac{\partial^2 u}{\mathrm{r}^2\partial\theta^2}-\frac{u}{\mathrm{r}^2}-2\frac{\partial v}{\mathrm{r}^2\partial\theta}\right)\\
&\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial \mathrm{r}}+v\frac{\partial v}{\mathrm{r}\partial\theta}+\frac{uv}{\mathrm{r}}+2\omega u=-\frac{\partial \mathrm{p}}{\rho\mathrm{r}\partial\theta}+\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial \mathrm{r}^2}+\frac{\partial v}{\mathrm{r}\partial \mathrm{r}}+\frac{\partial^2 v}{\mathrm{r}^2\partial\theta^2}-\frac{v}{\mathrm{r}^2}+2\frac{\partial u}{\mathrm{r}^2\partial\theta}\right) \quad , \quad (3)\\
&\mathrm{r}\frac{\partial u}{\partial \mathrm{r}}+u+\frac{\partial v}{\partial\theta}=0
\end{aligned}$$

где u, v, w - относительные (ротора) линейные скорости частиц жидкости, p - давление в жидкости, ρ и ν - её плотность и кинематическая вязкость.

Дополняющие (3) ключевые граничные условия на наименее и наиболее удаленных от оси вращения поверхностях жидкости, т.е. определяющие не только поведение этих уравнений, но и динамику системы «ротор-жидкость» в целом:

$$u=0 \quad \text{при} \quad \mathrm{r}=R \ \text{(на боковой стенке полости)},$$

$$u=u_r=\partial\Re/\partial t, \ \mathrm{p}=0 \quad \text{при} \quad \mathrm{r}=r \ \text{(на свободной поверхности жидкости)},$$

$$u=u_r=0, \ \mathrm{p}=0 \quad \text{при} \quad \mathrm{r}=r \ \text{(на кольцевой перегородке)}.$$

Возмущенные скорости u, v, w сопряжены с возмущенным давлением p, увеличивающим стационарное p_0, которое пропорционально квадрату скорости вращения ω^2. По аналогии с гидростатическим давлением столба жидкости, в заданной системе ускорение=ω^2(r+r)/2, а высота=r–r. Таким образом, без потери общности, давление в жидкости:

$$\mathrm{p}=p_0+p\left(\mathrm{r},\theta,t\right), \quad \text{где} \quad p_0=\rho\omega^2(\mathrm{r}^2-r^2)/2. \qquad (4)$$

Похожим образом можно определить свободную поверхность жидкости:

$$\mathrm{r}=\Re=r+e\left(\theta,t\right), \qquad (5)$$

где e - её возмущенное смещение.

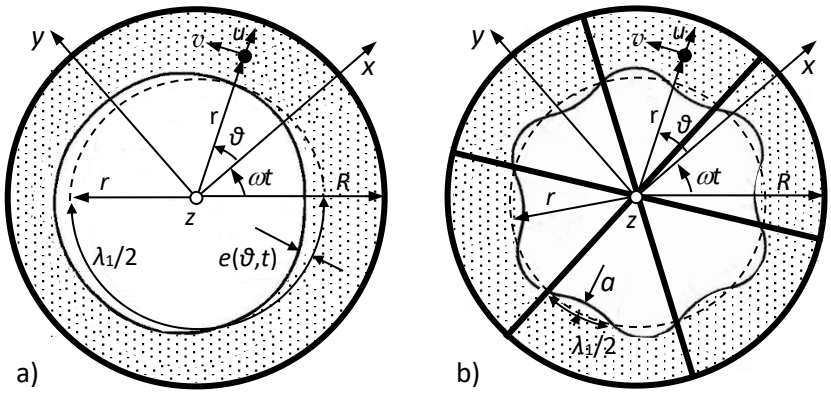


Рис.1. Полость ротора, неразделенная и с радиальными перегородками, частично и равно заполненная жидкостью, в случае самовозбуждения 2D волны первого (a), т.е. когда k=1, и шестого (b) порядка

Задача состоит в отыскании решений (законов) таких движений, которые представляют собой малое периодическое+переносное отклонение жидкости в окружном направлении от её установившегося состояния вращения как твердого тела. Если частицы вращающейся жидкости совершают незатухающие колебания с амплитудой, существенно меньшей радиуса свободной поверхности жидкости ($a/r \leq ¼$), то скорость относительного течения ($a\omega_k$) мала по сравнению с касательной скоростью ротора ($R\omega$). В этом случае можно пренебречь в уравнениях (3) вязкими частями и скоростными членами второго порядка малости, а также с учетом (4) в первом приближении получить:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} - 2\omega v = -\frac{\partial p}{\rho \partial \mathrm{r}} \\ &\frac{\partial v}{\partial t} + 2\omega u = -\frac{\partial p}{\rho \mathrm{r} \partial \theta}. \\ &\mathrm{r}\frac{\partial u}{\partial \mathrm{r}} + u + \frac{\partial v}{\partial \theta} = 0 \end{aligned} \qquad (6)$$

Подобная линеаризация общепринята при решении волновых задач гидродинамики и означает следующее. Остающиеся линейные члены в ускорениях частиц одного порядка с составляющими ускорения Кориолиса и, следовательно, частота собственных колебаний жидкости ω_k и угловая скорость распространения соответствующей волны $\Omega_k=\omega_k/k$ соизмеримы с абсолютной скоростью вращения. Отбрасываемые нелинейные члены и, следовательно, пограничные слои не имеют существенного значения.

Использование представлений (4) и (5) при отбрасывании квадрата малого приводит к преобразованию кинематических и динамических граничных условий:

$$\begin{aligned} u = 0 \quad &\text{при} \quad \mathrm{r} = R, \\ u = \partial e/\partial t, \;\; p = -\rho\omega^2 r e \quad &\text{при} \quad \mathrm{r} = r, \\ u = 0, \;\; p = 0 \quad &\text{при} \quad \mathrm{r} = r. \end{aligned} \qquad (7)$$

Условлено, что самовозбуждаемые (собственные) отклонения давления, скоростей и поверхности жидкости должны быть периодическими во времени и по окружности. В частности при существовании возмущения a на свободной поверхности и давления возмущения в жидкости:

$$e(\theta,t) = a\exp i\left(\frac{2\pi}{T_{r\theta}} r\theta - \frac{2\pi}{T} t\right), \;\; p(\mathrm{r},\theta,t) = P(\mathrm{r})\exp i\left(\frac{2\pi}{T_{\mathrm{r}\theta}} \mathrm{r}\theta - \frac{2\pi}{T} t\right).$$

Период $T_{\mathrm{r}\theta}$ ($T_{r\theta}$) есть длина внутренней (поверхностной) волны в окружном направлении:

$$\lambda_k = \frac{2\pi \mathrm{r}}{k}, \quad k = n\kappa, \quad \kappa = 1, 2, \ldots,$$

где к - число гребней/подошв в волне вдоль окружности вращающейся жидкости в каждом из n отсеков (рис.1,b), образованных n радиальными перегородками (в случае отсутствия перегородок k=к).

Таким образом:

$$\begin{aligned} e(\theta,t) &= a\exp i(k\theta-\omega_k t) \\ p(\mathrm{r},\theta,t) &= P(\mathrm{r})\exp i(k\theta-\omega_k t) \\ u(\mathrm{r},\theta,t) &= U(\mathrm{r})\exp i(k\theta-\omega_k t) \\ v(\mathrm{r},\theta,t) &= V(\mathrm{r})\exp i(k\theta-\omega_k t) \end{aligned}, \tag{8}$$

где $\omega_k=2\pi/T$ - круговая частота собственных плоских колебаний жидкости по соответствующей форме.

Подстановка функций (8) в уравнения свободного движения жидкости (6) дает:

$$\begin{aligned} -i\omega_k U(\mathrm{r}) - 2\omega V(\mathrm{r}) &= -\frac{P'(\mathrm{r})}{\rho} \\ -i\omega_k \frac{V(\mathrm{r})}{k} + 2\omega\frac{U(\mathrm{r})}{k} &= -i\frac{P(\mathrm{r})}{\rho\mathrm{r}} \\ \mathrm{r}\frac{U'(\mathrm{r})}{k} + \frac{U(\mathrm{r})}{k} + iV(\mathrm{r}) &= 0 \end{aligned}.$$

Решения первых двух из этих уравнений следующие:

$$\begin{aligned} U(\mathrm{r}) &= i\frac{1}{\rho}\frac{-\omega_k P'(\mathrm{r}) + 2\omega k\mathrm{r}^{-1}P(\mathrm{r})}{\omega_k^2 - 4\omega^2} \\ V(\mathrm{r}) &= -\frac{1}{\rho}\frac{-\omega_k k\mathrm{r}^{-1}P(\mathrm{r}) + 2\omega P'(\mathrm{r})}{\omega_k^2 - 4\omega^2} \end{aligned}. \tag{9}$$

С этими выражениями третье уравнение (неразрывности) приводит к простейшей форме уравнения Бесселя:

$$\mathrm{r}^2 P''(\mathrm{r}) + \mathrm{r}P'(\mathrm{r}) - k^2 P(\mathrm{r}) = 0,$$

общее решение, которого:

$$P(\mathrm{r}) = C_1\mathrm{r}^k + C_2\mathrm{r}^{-k}, \tag{10}$$

где C_1 и C_2 – константы, определяющиеся граничными условиями (7) или в силу (8) их альтернативной формой:

$$U(R)=0, \quad U(r)=-i\omega_k a, \quad P(r)=-\rho\omega^2 ra.$$

Свободного поверхностного волнения может и не быть (a=0). Тогда, как в том числе очевидно из граничных условий, будет самовозбуждаться волновое движение внутри жидкости. Эффект реализуется, когда на промежуточном(-ых) радиусе(ах) (r=r) есть

тонкая(-ие) кольцевая(-ые) перегородка(-и), причем жидкость целиком заполняет образованную(-ые) кольцевую(ые) полость(-и).

Альтернативные граничные условия для подобной системы:

$$U(R)=0, \quad U(r)=0, \quad P(r)=0.$$

Чтобы найти C_1 и C_2, следует вернуться к соотношению для U(r), раскрывая в нём P(r) и P'(r):

$$U(\mathrm{r})=i\frac{k}{\rho}\left(\frac{C_2\mathrm{r}^{-k-1}}{\omega_k-2\omega}-\frac{C_1\mathrm{r}^{k-1}}{\omega_k+2\omega}\right).$$

Условие $U(R)=0$ показывает, что:

$$C_2=C_1\frac{\omega_k-2\omega}{\omega_k+2\omega}R^{2k}. \qquad (11)$$

Жидкость без свободной поверхности. В силу $U(r)=0$:

$$\frac{C_2}{C_1}=\frac{\omega_k-2\omega}{\omega_k+2\omega}r^{2k}. \qquad (12)$$

Из условия $P(r)=0$:

$$\frac{C_2}{C_1}=-r^{2k}.$$

Поочередная подстановка в это соотношение выражений (11) и (12) приводит к ненулевому решению лишь после первой замены:

$$\frac{\omega_k}{\omega}=2\sigma, \quad \text{где } \sigma=\frac{1-(r/R)^{2k}}{1+(r/R)^{2k}}.$$

Это уравнение частот внутренних собственных плоских колебаний жидкости, т.е. несжимаемой и окруженной как твердой(-ыми), так и податливой(-ыми) стенками (лишенной свободной поверхности). Круговые частоты таких колебаний (во вращающейся системе отсчета):

$$\omega_k^{+,-}=\pm 2\sigma\omega, \qquad (13)$$

где ω_k^{+} - в случае волны, бегущей вперед, т.е. в сторону вращения ротора с жидкостью, ω_k^{-} - в случае обратной волны.

Жидкость со свободной поверхностью. На основании $U(r)=-i\omega_k\delta$ с учетом (11) получается:

$$C_1=-a\rho\frac{\omega_k}{k}\frac{\omega_k+2\omega}{R^{2k}-r^{2k}}r^{k+1}. \qquad (14)$$

Равенство $C_1r^k+C_2r^{-k}=-\rho\omega^2ra$ с выражениями (11) и (14) дает частотное уравнение поверхностных собственных плоских колебаний жидкости:

$$\frac{\omega_k^2}{\omega^2}-2\sigma\frac{\omega_k}{\omega}-k\sigma=0\,.$$

Корни этого уравнения с учетом течения Стокса (2):

$$\frac{\omega_k}{\omega\mp k(a/r)^2\omega_k}=\sigma\pm\sqrt{\sigma^2+k\sigma}\,.$$

Нижними знаками характеризуется волна, распространяющаяся против вращения, а верхними знаками – прямая волна, следовательно, соответствующие циклические частоты колебаний (во вращающейся системе отсчета):

$$\omega_k^{+,-}=\frac{\sigma\pm\sqrt{\sigma^2+k\sigma}}{1\pm k(a/r)^2(\sigma\pm\sqrt{\sigma^2+k\sigma})}\omega\,. \qquad (15)$$

При a=0 (течение Стокса не учитывается) из (15) получаются известные формулы для частот линейных нормальных колебаний вращающейся жидкости [8].

Согласно (4), (8-11), (14-15) искомые действительные решения:

$$\mathrm{p}=\frac{1}{2}\rho\omega^2(\mathrm{r}^2-r^2)-a\rho\frac{\omega_k^{+,-}}{k}\frac{\omega_k^{+,-}(R^{2k}+\mathrm{r}^{2k})-2\omega(R^{2k}-\mathrm{r}^{2k})}{R^{2k}-r^{2k}}\frac{r^{k+1}}{\mathrm{r}^k}\cos\left(k\theta-\omega_k^{+,-}t\right),$$

$$u=a\omega_k^{+,-}\frac{R^{2k}-\mathrm{r}^{2k}}{R^{2k}-r^{2k}}\frac{r^{k+1}}{\mathrm{r}^{k+1}}\sin\left(k\theta-\omega_k^{+,-}t\right), \qquad (16)$$

$$v=-a\omega_k^{+,-}\frac{R^{2k}+\mathrm{r}^{2k}}{R^{2k}-r^{2k}}\frac{r^{k+1}}{\mathrm{r}^{k+1}}\cos\left(k\theta-\omega_k^{+,-}t\right).$$

Анализ результатов

Из соотношений (13), (15) и (16) следует ряд выводов.

Частота ω_k нормальных плоских колебаний вращающейся жидкости и угловая скорость $\Omega_k=\omega_k/k$ распространения соответствующей инерционной волны (по модулю) повышаются с увеличением скорости вращения ω и уровня заполнения, связанного с величиной $r/R=\sqrt{1-V/V_\mathrm{o}}$, где V (V_o) - объем всей жидкости (всей полости), а также с уменьшением амплитуды поверхностной волны a, т.е. при ослаблении потока Стокса.

Для каждого волнового числа k существуют две собственные частоты (угловые скорости): одна ω_k^+ (Ω_k^+) - для волны, распространяющейся в направлении вращения ротора, а другая ω_k^- (Ω_k^-) - для волны противоположного направления. С увеличением числа k или радиальных перегородок частоты свободных колебаний жидкости $|\omega_k^{+,-}|$ при a=0 возрастают, а при $a\neq0$ после некоторого порогового ($k=k_\mathrm{th}$) убывают, в то же время угловые скорости распространения прямой и обратной волн $|\Omega_k^{+,-}|$ всегда понижаются. Расщепление частот (угловых скоростей) порождается ускорением Кориолиса $\pm2\omega\mathbf{v}$. Причем в случае внутренних

волн $\omega_k^+=|\omega_k^-|$ и $\Omega_k^+=|\Omega_k^-|$. В случае поверхностных колебаний $\omega_k^+>|\omega_k^-|$, и так как $\Omega_k^+>|\Omega_k^-|$, то поверхностная прямая волна бежит быстрее поверхностной обратной.

Частота колебаний жидкости в неподвижной системе координат (рис.2,a,c)

$$\omega_k^{+,-} = \omega_k^{+,-} + \omega, \tag{17}$$

и соответствующая угловая скорость распространения волны в случае декартовой системы отсчета (рис.2,b,d)

$$\Omega_k^{+,-} = \frac{\omega_k^{+,-}}{k} + \omega. \tag{18}$$

Как следствие, относительно неподвижного наблюдателя все четыре типа волн, за исключением самой длинной внутренней обратной волны (Ω_1^-), распространяются в сторону вращения ротора с жидкостью.

Совсем иная картина получается при полном наливе и неразделенной полости или с кольцевой перегородкой, уменьшающей полость менее чем на ⅓ от номинального объема, в этих случаях наиболее длинная волна (Ω_1^-) бежит назад в абсолютном движении. В условиях внутренней волны, распространяющейся с угловой скоростью Ω_1^-, и жидкости с уровнем $\frac{2}{3}V_o$, а также когда возбуждается волна второго порядка (Ω_2^-) в полости без кольцевых перегородок, заполненной целиком (r=0), достижимо состояние $\Omega_k^- = 0$, т.е. стоячей (не в физическом, а в буквальном смысле) относительно неподвижного наблюдателя плоской волны на любой скорости вращения (рис.2,d).

В общем рис.2 показывает, что в мелеющей полости ротора абсолютные значения жидкостных частот и волновых скоростей, за исключением $\omega_1^{+,-}, \Omega_1^{+,-}$, связанных с самыми длинными поверхностной прямой и внутренними прямой и обратной волнами, сначала мало изменяются, а затем, когда объем жидкости становится меньше 60% от номинального, устремляются к значению скорости вращения.

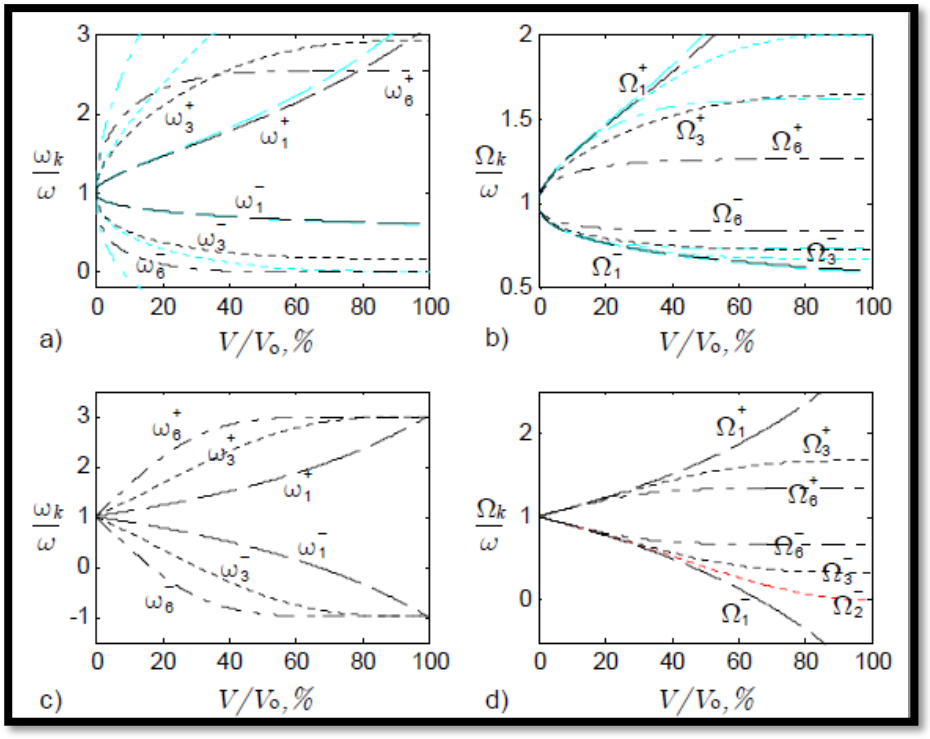


Рис.2. Безразмерные частоты нормальных поверхностных (a) и внутренних (c) плоских колебаний и им соответствующие угловые скорости распространения инерционных двумерных волн на поверхности (b) и внутри (d) вращающейся жидкости в зависимости от заполнения полого ротора и волнового числа (кол-ва в нём радиальных перегородок) при a/r=¼ и a=0, т.е. без учета поверхностного течения Стокса (светл.)

Рис.3 – это одна и та же диаграмма Кэмпбелла, в которую к скорости вращения ω и круговой частоте собственных колебаний ротора ω_o добавлены круговые частоты собственных колебаний жидкости (17) или угловые скорости распространения в ней инерционной волны (18) порядка k. Точка пересечения ω с ω_o, отмеченная квадратиком, соответствует критической скорости ротора.

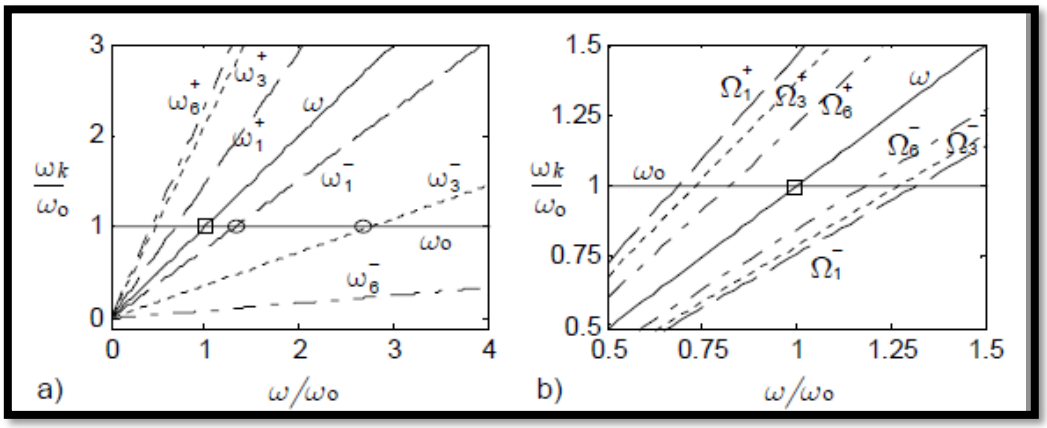


Рис.3. Безразмерные частоты нормальных поверхностных плоских колебаний жидкости (a) и им соответствующие угловые скорости распространения инерционных поверхностных двумерных волн (b) в зависимости от скорости вращения и волнового числа (кол-ва в полом роторе радиальных перегородок), в т.ч. критические скорости ротора (квадр.) и жидкости (круж.) при r/R=0.89 (V/V_o≈0.2) и a/r=¼

По аналогии точки внутри кружков отвечают скоростям волнового резонанса жидкости в гибком роторе (рис.3,a). Видно, что при его закритических оборотах и увеличении в его полости числа радиальных перегородок критическая скорость жидкости повышается и при достаточном и необязательно большом их количестве оказывается вне скоростного диапазона системы.

Влияние сплошных кольцевых перегородок на жидкостные/волновые частоты разительно отличается. Такие перегородки, установленные геометрически правильно, приводят к увеличению их числа. Действительно, например, три кольцевые перегородки дают как бы четыре слоя вращающейся жидкости, ограниченные пятью концентрическими поверхностями с радиусами r, r_1, r_2, r_3 и R (рис.4). Частота нормальных плоских колебаний первого слоя жидкости со свободной поверхностью будет определяться формулой (15) и отношением r/r_1, тогда как частоты остальных трех слоев жидкости – формулой (13) и отношениями r_1/r_2, r_2/r_3 и r_3/R. В результате вместо одной пары частот $\omega_k^{+,-}$, характерной для слоя r/R, т.е. для жидкости в неразделенной полости, получатся четыре пары меньших и близких между собой собственных частот жидкости, находящейся между кольцевыми перегородками. Очевидно, выдерживая при расстановке кольцевых перегородок единое значение у всех радиусных отношений, количество собственных частот жидкости может быть сокращено до четырех: по паре для её поверхностных и внутренних колебаний.

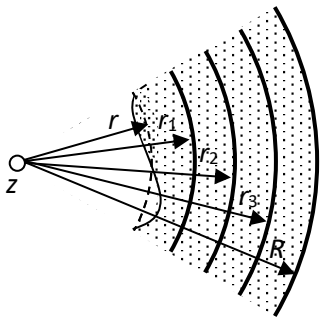


Рис.4. Часть роторной полости с тремя кольцевыми перегородками и четырьмя слоями жидкости

Полное давление жидкости на боковую стенку ротора:

$$\mathrm{p}_R = \frac{1}{2}\rho\omega^2(R^2 - r^2) - \frac{2\rho}{1 - r^{2k}/R^{2k}}\frac{r^{k+1}}{kR^k}\left[a\omega_k^{-2}\cos\left(k\theta - \omega_k^- t\right) + a\omega_k^{+2}\cos\left(k\theta - \omega_k^+ t\right)\right].$$

Полные скорости частиц на дне и свободной поверхности жидкости:

$$u_R = 0,\ v_R = -\frac{2}{1 - r^{2k}/R^{2k}}\frac{r^{k+1}}{R^{k+1}}\left[a\omega_k^-\cos\left(k\theta - \omega_k^- t\right) + a\omega_k^+\cos\left(k\theta - \omega_k^+ t\right)\right],$$

$$u_r = a\omega_k^-\sin\left(k\theta - \omega_k^- t\right) + a\omega_k^+\sin\left(k\theta - \omega_k^+ t\right),\ v_r = -\sigma^{-1}\left[a\omega_k^-\cos\left(k\theta - \omega_k^- t\right) + a\omega_k^+\cos\left(k\theta - \omega_k^+ t\right)\right].$$

Таким образом, при возмущении на свободной поверхности жидкости возникают две волны, движущиеся навстречу одна другой. Кроме того, соблюдается принцип суперпозиции инерционных волн, заключающийся в том, что волны накладываются друг на друга, не возмущая (не искажая) друг друга. При этом, когда по жидкости распространяются несколько инерционных волн, в т.ч. отраженные (от стенок ротора), то движения её частиц оказываются геометрической суммой колебаний, которые совершали бы частицы при прохождении каждой из волн в отдельности.

Конечно, в силу вязкости и потерь при отражении это волновое движение будет затухающим. Однако с приближением частоты возмущения (импульсов) к той или иной частоте свободных колебаний жидкости высота соответствующей инерционной волны станет растущей. При совпадении частот частицы будут двигаться по предельным эллиптическим траекториям с непостоянной и пропорциональной ω_k^+ или ω_k^- угловой скоростью в сторону противоположную распространению волны и амплитудой, убывающей с глубиной. Причем в случае сравнительно длинных поверхностных волн ($k \leq 6$) это колебательное движение масс жидкости будет гораздо быстрее течения Стокса ($v_{\mathrm{St}} = a^2\omega_k^{+,-}r^{-1}k$).

Интересно отметить, что вместо (15) в условиях слабого возмущения ($a \to 0$) и очень коротких поверхностных волн ($k \to \infty$):

$$\omega_k^{+,-} \approx \pm\omega\sqrt{k}\ .$$

Так как $v_{\mathrm{w}}^{+,-} = r\omega_k^{+,-}/k$ и $k = 2\pi r/\lambda_k$, то:

$$v_{\mathrm{w}}^{+,-} = \pm\sqrt{\frac{r\omega^2\lambda_k}{2\pi}},$$

что подобно известной формуле для скорости распространения гравитационных волн, в которой под корнем на месте центробежного ускорения $r\omega^2$ находится ускорение g. Обе формулы справедливы при «глубокой воде», т.е. когда λ_k меньше её глубины, что физически означает отсутствие волнового возмущения на дне. Действительно, рассмотренная ситуация при очень больших k, т.е. очень маленьких λ_k, приводит к $\lambda_k<<h$, где $h=R–r$ - толщина слоя жидкости, поэтому волновое возмущение ничтожно на стенке R. Всё волновое движение концентрируется у свободной поверхности r и зависит только от центробежного ускорения $r\omega^2$.

Другим предельным случаем является $\lambda_k>>h$. В условиях тонкого слоя ($r/R=1–\varepsilon$, где $\varepsilon=h/R$, $a=0$) и длинных поверхностных волн ($k=1\div3$):

$$\sigma \approx \frac{1-(1-2\varepsilon k)}{1+(1-2\varepsilon k)} \approx k\varepsilon \quad \& \quad \omega_k^{+,-} \approx \pm\omega k\sqrt{\varepsilon} \quad \& \quad v_w^{+,-} \approx \pm\sqrt{R\omega^2 h}\,,$$

что аналогично фазовой скорости $c=\sqrt{gh}$ длинных гравитационных волн или волн на «мелкой воде».

Следовательно, понятие «инерционные волны» завихренной или вращающейся жидкости может быть конкретизировано как «центробежные волны» жидкости.

Экспериментальное исследование

Испытания экспериментального ротора с различным количеством воды и радиальных перегородок (от 0 до 6) показали, что система по-разному реагирует на возрастание скорости вращения и сближение собственной частоты ротора (ω_o) с собственной частотой жидкости ($\omega_k^{+,-}$) и угловой скоростью волны ($\Omega_k^{+,-}$).

Во всех экспериментах форма свободной поверхности жидкости периодически менялась (в свете стробоскопа, синхронизированного с вращением) от правильной (ровной) до искаженной (локально-волнистой) окружности. На определенных скоростях вращения это волнообразование либо пропадало, либо бежало вперед (в направлении вращения), либо останавливалось (что давало эффектную картину «стоячей» волны), либо распространялось назад относительно ротора.

Такое волнение может быть связано как с образованием фигур Хладни (той или иной узловой структуры) последовательно возбуждаемых форм колебаний жидкости, так и с существованием кратных отношений между жидкостными/волновыми частотами и частотой вращения.

В случаях $\omega_k^+=\omega_o$ и $\Omega_k^+=\omega_o$ наблюдалась приливная волна, бегущая с угловой скоростью, меньшей скорости вращения. При $\Omega_k^-=\omega_o$, помимо приливной волны, обнаруживалось небольшое повышение радиуса прецессии ротора (с помощью бесконтактных датчиков). При $\omega_k^-=\omega_o$ система теряла динамическую устойчивость – была высокая приливная волна и большая амплитуда поперечных колебаний ротора.

С большой вероятностью бегущая приливная волна есть основная (к=1), т.е. результат суперпозиции вынужденной волны, обусловленной отклонением оси ротора под действием его остаточного дисбаланса, и собственной волны жидкости порядка $k=n$. На это указывает аналогия с вибрацией невращающихся емкостей как твердого тела, когда возбуждается обычно основная форма колебаний жидкости, а остальные узловые структуры, обусловленные волнами второго и более порядка, являются ортогональными (основной форме колебаний).

Результаты натурных испытаний и разработанной теории сопоставляются на рис.5, где скорость вращения в безразмерных переменных, совпадающая с критической скоростью ротора равна единице. Экспериментальные точки, объединенные черными линиями для видимости резонансного диапазона, представляют собой моменты появления или исчезновения высокой приливной волны и значительной вибрации ротора. Вычисленные

аналитически красные кривые есть точные значения частот нормальных плоских колебаний жидкости согласно формуле:

$$\frac{\omega}{\omega_k^{+,-}} = \frac{1 \pm k(a/r)^2(\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 + k\sigma})}{\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 + k\sigma} + 1 \pm k(a/r)^2(\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 + k\sigma})}.$$

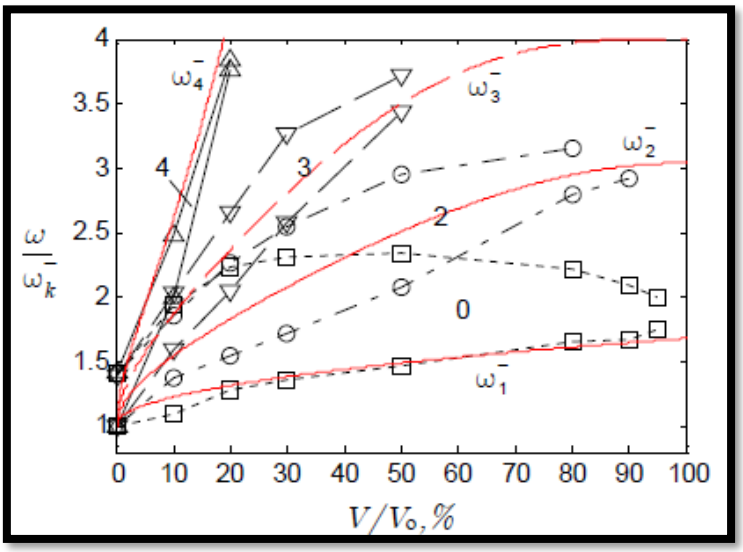


Рис.5. Экспериментальные минимальные и максимальные (черн.), а также теоретические (крас. сплош. при a/r=¼ и крас. прерыв. при a/r=⅓) скорости волнового резонанса относительно критической ротора в зависимости от кол-ва жидкости и перегородок

Рекомендации по исключению волнового резонанса в роторе, частично заполненном жидкостью

1. Полное заполнение или, если работа роторной машины сопряжена с меняющимся количеством жидкости, то вращение с докритическими скоростями.
2. Если докритических оборотов недостаточно для производительности или эффективности машины при неполном наливе, то применение рабочей жидкости с вязкостью порядка как у летних смазочных масел при глубоко минусовой температуре или использование загустителя.
3. Если рабочие условия требуют неполного налива маловязкой жидкости типа всесезонных смазочных масел и воды, то установка 4÷6 непроницаемых радиальных перегородок и 15%-е или бóльшее жидкостное наполнение всех образующихся отсеков полости. Пакет сплошных кольцевых перегородок приведет лишь к ослаблению волнового резонанса (к уменьшению его частоты и амплитуды), пусть и к значительному.
4. Если по технологическим причинам перегородки невозможны, то разгон-останов машины в пустом или заполненном состоянии и налив-слив маловязкой жидкости по достижению ротором рабочих оборотов, вынесенных за верхнюю границу волнового резонанса.
5. Если всё перечисленное по тем или иным обстоятельствам не реализуемо, то заполнение жидкостью должно быть малым (не больше чем на 10% от объема полости) или значительным (не менее чем на 80%), при этом волновой резонанс будет, но не такой сильный как с промежуточными уровнями.

Работа выполнена при поддержке РФФИ в рамках проекта № 14-08-01120_а

Список литературы

1. Дерендяев Н.В. Устойчивость вращения роторных систем, содержащих жидкость. Нижний Новгород: Изд-во ННГУ, 2014. 154 с.
2. Ehrich F.F. The Influence of Trapped Fluids on High Speed Rotor Vibration, *ASME Journal of Engineering for Industry*, Vol.89 (1967), pp.806-812.
3. Дайч И.М. Неконсервативная задача о колебаниях твердого тела с полостью, частично заполненной идеальной жидкостью // Прикладная механика, 1971, Том VII, вып.7. С.44-48.
4. Preussner C., Kollmann F.G. On the Stability of a Spinning, Fluid Filled and Sectored Rotor, *Computers and Structures*, Vol.30 (1988), No.1/2, pp.131-141.
5. Weihs D., Dodge F.T. Liquid motions in nonaxisymmetric, partially filled containers rotating at zero gravity. *Journal of Spacecraft and Rockets*, Vol.28 (1991), No.4, pp.425-432.
6. Шулейкин В.В. Физика моря. М.: Наука, 1968. 1090 с.
7. Holm-Christensen O., Traeger K. Note on rotor instability caused by liquid motions. *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol.58 (1991), No.3, pp.804-811.
8. Копачевский Н.Д. О свободных колебаниях жидкости, вращающейся в цилиндрическом сосуде в условиях невесомости // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа, 1972, № 4. С.3-9.

Дата поступления статьи: 14 ноября 2016 года.