УДК 534.1

МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ САМОПОДОБНЫХ СИСТЕМ

© Людмила Яковлевна Банах, Ольга Владимировна Бармина

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН
banl@inbox.ru

Аннотация.*Самоподобными называются системы, в которых каждая ячейка в определенном масштабе повторяет структуру предыдущей. Рассматриваются механические колебания таких систем. В качестве примеров изучаются колебания следующих систем, параметры которых меняются по длине с некоторым масштабом: продольные колебания стержня с сосредоточенными массами, балка ступенчатого сечения, двумернаясамоподобная решетка. Выявлены, характерные свойства при колебаниях таких систем, а именно:*
-самоподобные системы представляют собой механический полосовой фильтр;
- способность усиления (уменьшения) передаваемого сигнала вдоль длины.

Ключевые слова*: самоподобные системы, механические колебания, полосовой фильтр*

MECHANICAL OSCILLATIONS OF SELF-SIMILAR SYSTEMS

l.Ya.Banakh, O.V.Barmina

Federal Budget-Funded Mechanical Engineering Research Institute, RAS, Moscow, Russia.

Abstract*.Calledself-similarstructure in whicheach cell in acertain scalefollows the structure ofthe previous one.The mechanicalvibrationsof such structures are analyzed.As examples,we study theoscillations ofthesesystems,the parameters of whichvaryin lengthwith a certainscale: the longitudinal vibrations of a rodwith concentrated masses,beam with stepped section, two-dimensional self-similarlattice.Identified, thecharacteristic propertiesof such systemsin, namely:*
-self-similar systems aremechanicalband-pass filter;
- the ability toincrease(decrease) of the transmitted signal along thestructurelength.

Key words:*self-similarstructure, mechanicalvibrations,band-pass filter*

Самоподобные структуры в механике.

Регулярные структуры, обладающие трансляционной симметрией составляют достаточно ограниченный класс структур и не описывают многих природных и технических систем. Однако, его можно существенно расширить, дополнив классом самоподобных структур. К самоподобным структурам относятся, в частности:

-структуры, в которых каждая ячейка в определенном масштабе повторяет структуру предыдущей. Здесь трансляционная симметрия сопровождается преобразованием подобия (масштабирования) соседних ячеек. Это один из видов фракталов;

-структуры с винтовой симметрией с расположением ячеек вдоль винтовой линии с одинаковым шагом. К ним, в частности, относятся системы с зеркальной симметрией;

-самоподобные структуры, для которых винтовая симметрия сопровождается преобразованием подобия соседних ячеек.

Именно такого типа структуры преобладают в биологии, химии полимеров, физике. Рост и формирование полимерных молекул, кристаллов сопровождается образованием фракталов.

Многие ученые изучают фракталы, главным образом, как способ формообразования различных структур [4,5].

Что же касается изучения таких структур в механических конструкциях, то их структура, созданная человеком, более простая, чем природных образований, однако, их изучение имеет свою специфику. Первостепенное значение для них имеют динамические и вибрационные свойства. Динамические свойства самоподобных структур исследованы значительно меньше, и их изучению и посвящена настоящая работа.

В качестве наиболее распространенных в механике самоподобных структур можно указать такие, как, например, стержень со ступенчато изменяющимся сечением, вал с дисками, параметры которого меняются по участкам, коническая оболочка с оребрением, коленчатые валы (винтовая симметрия), конические пружины и т.п.[8].

Изучим принципиальные динамические свойства таких структур и методы их исследования на достаточно простых системах.

Колебания самоподобных структур. Дисперсионное уравнение и формы колебаний.

Математическое исследование динамических процессов в самоподобных структурах может быть проведено на основе единого подхода [2], который мы сейчас опишем. Исследуем продольные колебания стержня круглого сечения с закрепленными на нем сосредоточенными массами (рис.1).

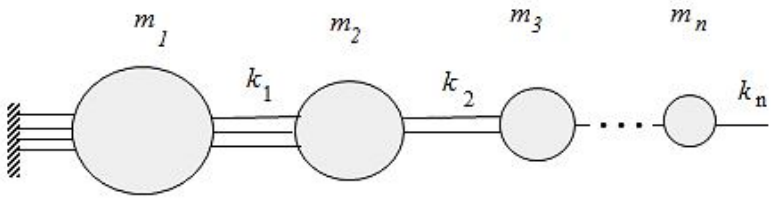


Рис. 1. Самоподобная цепная система с сосредоточенными массами.

Предположим, что геометрические параметры стержня (l - длина, r - радиус поперечного сечения)меняются с одинаковым масштабом γ и также меняются величины масс (рис.1а). Тогда жесткость и масса для s+1 –го элемента системы:

$$k_{s+1} = \frac{EF_{s+1}}{l_{s+1}} = \frac{E\pi\gamma^2 r_s^2}{\gamma l_s} = \gamma k_s , \qquad m_s = \gamma m_{s+1} \tag{1}$$

Таким образом, парциальные частоты для каждой массы одинаковы и равны $\nu_1^2 = \nu_2^2 = \ldots \nu_n^2 = k_s / m_s$. Условие (1) можно рассматривать как условие самоподобия.

Уравнение самоподобной структуры, представленной на рис. 1а, в матричной форме имеет вид:

$$\begin{bmatrix} -m_1\omega^2 + k_0 + k_1 & -k_1 & & \\ -k_1 & -m_2\omega^2 + k_1(1+\gamma) & -\gamma k_1 & \\ & -\gamma k_1 & -m_3\omega^2 + k_1\gamma(1+\gamma) & -\gamma^2 k \\ & & -\gamma^2 k & \vdots \end{bmatrix} \mathbf{X} = 0, \qquad (2)$$

$\mathbf{X}^T = [x_1, x_2, x_3 \ldots x_n]$, ω – частота собственных колебаний.

Эти уравнения можно рассматривать как уравнения в конечных разностях с переменными коэффициентами, зависящими от номера узла *s*, то есть от *x*. Так, уравнение для*s*-го узла:

$$-k_1\gamma^{s-1}x_{s-1} + (-m_1\gamma^s\omega^2 + k_1\gamma^{s-1}(1+\gamma))x_s - k_1\gamma^s x_{s+1} = 0 \qquad (3)$$

Сделаем теперь в (2) замену переменных:

$$\mathbf{X^*} = \mathbf{NX}, \qquad \mathbf{N^2} = diag\left[1/\gamma \quad 1/\gamma^2 \quad \ldots \quad 1/\gamma^n\right], \qquad (4)$$

что означает умножение матрицы $\left[\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}\right]$ справа и слева на матрицу**N**и**N**$^{\mathbf{T}}$. В результате получим:

$$\left[\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}\right]^* = \mathbf{N}^T\left[\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}\right]\mathbf{N},$$

$$\left(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}\right)^* = \begin{bmatrix} -m_1\omega^2 + \frac{k_1(1+\gamma)}{\sqrt{\gamma}} & -\frac{k_1}{\sqrt{\gamma}} & & \\ -\frac{k_1}{\sqrt{\gamma}} & -m_1\omega^2 + \frac{k_1(1+\gamma)}{\gamma} & -\frac{k_1}{\sqrt{\gamma}} & \\ & -\frac{k_1}{\sqrt{\gamma}} & -m_1\omega^2 + \frac{k_1(1+\gamma)}{\gamma} & \\ & & & \vdots \end{bmatrix} \qquad (5)$$

Уравнение (5), очевидно, описывает регулярную структуру с трансляционной симметрией с одинаковыми массами m_1, жесткость между которыми постоянна и равна $k_1\gamma^{-\frac{1}{2}}$. Но при этом имеется дополнительное закрепление масс(рис. 2), равное

$$k_1(1+\gamma)\gamma^{-1} - 2k_1\gamma^{-1/2} = k_1\left(1-\gamma^{1/2}\right)^2\gamma^{-1} = k^*).$$

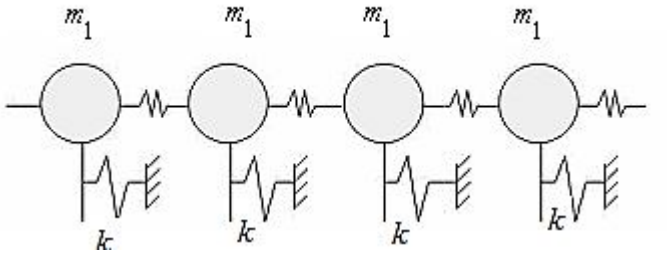


Рис.2. Эквивалентная периодическая структура с такими же собственными частотами

Уравнение (5) можно записать как уравнение в конечных разностях, но уже с постоянными коэффициентами. Уравнение для s-й массы:

$$-\frac{k_1}{\sqrt{\gamma}}x_{s-1}+(-m_1\omega^2+\frac{k_1(1+\gamma)}{\gamma})x_s-\frac{k_1}{\sqrt{\gamma}}x_{s+1}=0 \quad . \qquad (6)$$

Частное решение уравнения (6), как известно, имеет вид [5]:

$$x_s = Ce^{i(\omega t-\mu s)} \qquad (7)$$

Это решение можно трактовать как волну, где ω – собственная частота, а μ – волновой параметр, характеризующий изменение фазы при переходе от элемента *s* к s+1 и определяющий длину волны равную $L_w = 2\pi/a\mu$, где *a*- расстояние между соседними массами в исходной системе. Подставляя (7) в (6) находим дисперсионное уравнение, связывающее частоту колебаний и волновое число. Дисперсионное уравнение для системы рис. 1 имеет вид:

для действительных μ:

$$-m_1\omega^2+\frac{k_1(1+\gamma)}{\gamma}-2\frac{k_1}{\sqrt{\gamma}}\cos\mu=0 \qquad (8)$$

для чисто мнимых $\mu = i\mu'$:

$$-m_1\omega^2+\frac{k_1(1+\gamma)}{\gamma}-2\frac{k_1}{\sqrt{\gamma}}\mathrm{c}\,h\mu'=0$$

Действительные значения μ определяются из уравнения (8) при $|\cos\mu|\le 1$. Отсюда следует, что данная система - это механический полосовой частотный фильтр, полоса пропускания гармонического сигнала $\omega_0 < \omega < \omega^*$ (рис.3), где:

$$\omega_0^2 = k^*/_m = k_1(1-\sqrt{\gamma})^2/_{m\gamma} \text{ при } \mu = 0,$$

$$\omega^{*2} = k_1(1+\sqrt{\gamma})^2/_{m\gamma} \text{ при } \mu = \pi.$$

Следовательно, полоса пропускания определяется как:

$$\Delta\omega^2 = \omega_*^2 - \omega_0^2 = 4k\gamma^{-\frac{1}{2}}. \quad (9)$$

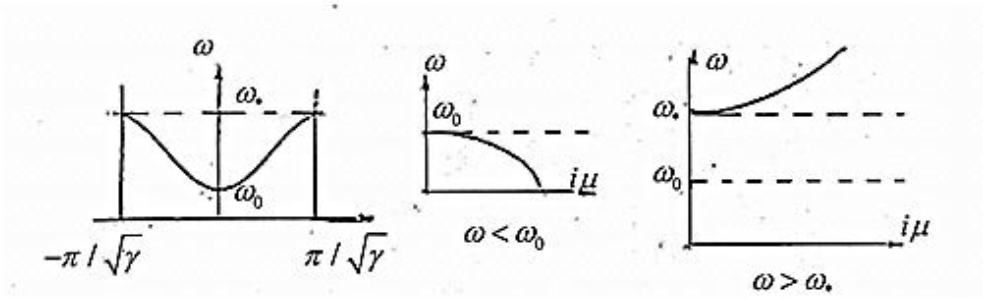


Рис.3. Дисперсионные кривые для действительных (а) и мнимых волновых значений μ (б),(в).

Таким образом, полоса пропускания обратно пропорциональна параметру подобия γ. Чем больше γ,тем меньше полоса пропускания.Для механических систем этот параметр не очень велик: порядка 1,5 - 3. Но для биологических структур этот параметр может быть больше. Если γ очень велико, то в пределе полоса пропускания становится очень узкой, что означает, что система настроена только на одну определенную частоту.

Вне полосы пропускания (рис.2) колебания экспоненциально затухают (или возрастают) и решение имеет вид [3]:

$$X_i^* = A(-1)^i e^{\eta i} + B(-1)^i e^{-\eta i}, \quad ch\,\eta = (1 - \frac{\omega^2}{2\nu_i^2} + \frac{k^*}{2k_1/\sqrt{\gamma}}) = (1 - \frac{\omega^2}{2\nu_i^2} + \frac{(1-\sqrt{\gamma})^2}{\sqrt{\gamma}})$$

Безграничное возрастание амплитуды собственных колебаний, очевидно, невозможно в реальной системе в силу отсутствия в ней источника энергии. Поскольку линейное преобразование координат (4) не меняет частотных свойств, то структуры (рис.1) и (рис.2) имеют одинаковые частоты. Следовательно,самоподобная система (рис.1а) является полосовым механическим фильтром частот.

Что касается форм колебаний, то в соответствии с преобразованием координат (4), они легко получаются из соответствующей формы колебаний регулярной структуры (рис. 1б), путем пропорционального изменения амплитуды колебаний каждого участка в γ раз. Рассмотрим в качестве примера построение высшей формы колебаний для самоподобной системы (рис.1) при закрепленных концах. Для регулярной структуры (рис.2) это, как известно, синусоида, при этом соседние массы находятся в противофазе. Следовательно, соответствующая форма колебаний исходной самоподобной структуры (рис.1) получается путем увеличения амплитуды каждой массы в γ раз. Таким образом, получаем форму колебаний с постоянно увеличивающимися амплитудами (рис.4). Огибающая этой формы колебаний – прямая с углом наклона, равным γ, а точки с максимальной амплитудой каждый раз сдвигаются вдоль оси x.

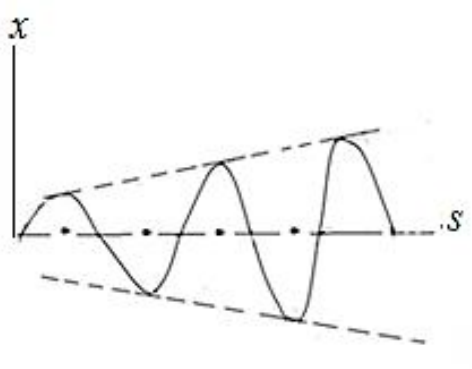


Рис.4. Высшая форма колебаний самоподобной системы рис. 1

Рассмотрим еще один пример механическойсистемы: продольные колебания балки ступенчатого сечения. Такие балки достаточно часто применяются в инженерных конструкциях.Так, в частности, они используются в ультразвуковых колебательных системах для увеличения амплитуды колебаний, передаваемых от возбудителя колебаний к инструменту [1,7].В самоподобной балке ступенчатого сечения площадь поперечного сечения каждого s-го участка меняются по степенному закону (рис.5)

$$F(s) = \gamma^s = e^{bs} \qquad (10)$$

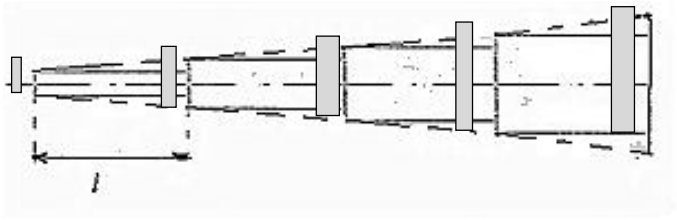


Рис.5. Стержень ступенчатого сечения.

Массаs- гоучастка балки $M_s = \rho l F_s$. Будем принимать, что эта масса разделена поровну между концами участка, так что масса, равная $M_s / 2$, сосредоточена на каждом конце s-го элемента. Тогда масса m_s в s-ом узле равна полусумме сосредоточенных масс соседних элементов балки, то есть $m_s = \frac{1}{2}\rho l(F_{s-1} + F_s)$.

Жесткость каждого участка при продольных колебаниях вдоль горизонтальной оси

$$k_s = EF_s / l$$

Парциальные частоты $\nu_s = k_s / m_s$ для каждоймассы одинаковы при *l* =*const*:

$$\nu_s = \left(k_{s-1} + k_s\right) / m_s = 2E / \rho l^2 = const ,$$

то есть для такой балки условия самоподобия (1) выполнены.

Уравнения продольных колебаний в конечных разностях для s-го узла:

$$k_{s-1}x_{s-1} + (k_{s-1} + k_s - m_s\omega^2)x_s + k_s x_{s+1} = 0 \quad (s = 1...n) . \qquad (11)$$

Учитывая соотношения (10), запишем (11) в виде:

$$k_1\gamma^{s-1}x_{s-1} + (k_0 a^{s-1} + k_1\gamma^s{}_s - m_s\omega^2)x_s + k_1\gamma^s x_{s+1} = 0 \quad (s = 1...n)$$

Отсюдавидим, что структура уравнений (11) полностью аналогична уравнениям (3).Таким образом, для данной балки справедливы все полученные выше результаты: она представляет собой полосовой фильтр с полосой пропускания (9) $\Delta\omega^2 = \omega^{*2} - \omega_0^2 = 4k_1 / \sqrt{\gamma}$. Формы колебаний характеризуются возрастанием амплитуды на тонком конце, аналогично рис. 4.

Для рассматриваемой балки ступенчатого сечения в пределе при $n \to \infty$ (n-количество участков) получим балку, поперечное сечение которой меняется по длине по экспоненциальному закону:

$$F(s) = F\exp(\rho F_0(s)/P) .$$

Покажем, что уравнение (11) в пределе для континуальной системы - это уравнение Клейна-Гордона. Действительно, можно показать, что волновое уравнение при экспоненциальном (степенном) законе изменения параметров можно привести в новых переменных к этому уравнению. Запишем волновое уравнение для продольных колебаний:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(F(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) = m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} . \qquad (12)$$

Пусть площадь поперечного сечения и погонная масса меняются, как предположено выше, в соответствии с $F(x) = \tilde{F}_0 e^{bx}$, $m = m_0 e^{bx}$.

Сделаем замену переменных $u(x) = \overline{u}(x)e^{\alpha x}$. Тогда из (12) найдем:

$$F_x'\frac{\partial\overline{u}}{\partial x} + F\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial x^2} = F_0 e^{(\alpha+b)x}\left[\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial x^2} + (b+2\alpha)\frac{\partial\overline{u}}{\partial x} + (ba+\alpha^2)\overline{u}\right] = m_0 e^{(\alpha+b)x}\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial t^2} \quad (13)$$

Положим теперь $\alpha = -b/2$. Тогда $u(x) = \overline{u}(x)e^{-\frac{b}{2}x}$, что находится в соответствии с заменой переменных (3) для дискретного случая. При этом из (13) получим уравнение Клейна-Гордона:

$$F_0\left(\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial x^2} - \alpha^2\overline{u}\right) = m_0\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial t^2}$$

Заметим теперь, что экспоненциальный закон изменения поперечного сечения имеет также брус равного сопротивления [6]. Как известно, такой вертикальный брус под действием собственного веса имеет в каждом сечении одинаковую статическую нагрузку. Это легко понять, если учесть, что изменение нагрузки (сила тяжести) по длине бруса также подчиняется экспоненциальному закону.

Экспоненциальному закону изменения параметров удовлетворяет, в частности, хорошо известное «золотое сечение», использующееся в архитектуре с древнейших времен. Это специальный случай самоподобного изменения параметров участков по закону:

$$T(s) = a^s , \quad a = \Phi = \sqrt{5} - 1 .$$

Разветвленные структуры (двумерная решетка).

Рассмотрим вертикальные колебания двумерной самоподобной решетки, представленной на рис. 6.Каждый элемент решетки имеет двойной индекс *sj*, где *s* – номер ряда (вдоль оси *x)*, *j*- номер массы в *s*-ом ряду (вдоль оси *y*).

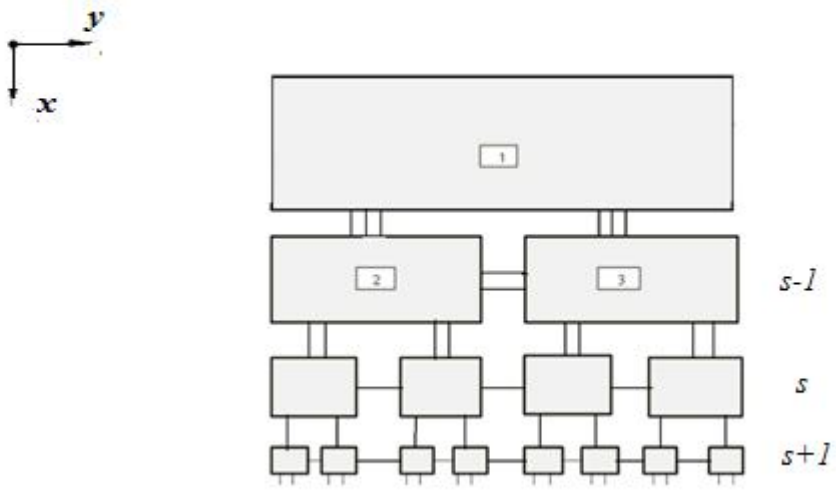


Рис. 6. Двумерная самоподобная решетка

Найдем условия самоподобия решетки. Для каждого *s*-го ряда предполагаем, что упруго-инерционные элементы меняются в соответствии с коэффициентом подобия γ, то есть:

$$k_{xs} = k_{x0} / \gamma^s, \quad m_s = m_0 / \gamma^s,$$

условия самоподобия: $\omega_{xs}^2 = k_{x0} / m_0 = const \ вдоль \ оси \ x$

Вдоль оси y все элементы в каждом из рядов предполагаются идентичными. Тогда второе условие:

$$k_{ys} / m_s = \omega_y^2 = const, \quad k_{ysj} = const \ вдоль оси \ y.$$

Уравнение колебаний в вертикальной плоскости для *sj* –го элемента решетки имеет вид:

$$-(\mathbf{M}\lambda^2 + \mathbf{K})\mathbf{Z}_{sj} - \mathbf{K}_x(\mathbf{Z}_{s-1,j} + \mathbf{Z}_{s+1,j}) - \mathbf{K}_y(\mathbf{Z}_{s,j-1} + \mathbf{Z}_{s,j+1}) = 0. \qquad (14)$$

Полагаем:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_x + \mathbf{K}_y, \qquad \mathbf{K}_x = \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{K}_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix}. \qquad (15)$$

Ищем решение дисперсионного уравнения в виде:

$$\mathbf{Z}_{sj} = \mathbf{X}_s \mathbf{Y}_j$$

и результирующие колебания представляют собой произведение волн вдоль осей *x* и *y*. При этом в силу (15) уравнения (14) по осям *x* и *y* независимы. Вдоль оси *y* происходят колебания обычной периодической структуры, дисперсионное уравнение которой:

$$(-m\omega^2 + k_y) = k_y(e^{iv} + e^{-iv})$$

откуда при закрепленных концах $y_{s0} = y_{sn} = 0,$

$$Y_{sj} = C_s \sin \nu\, j \quad при\ \omega < \omega_y$$

Дисперсионное уравнение вдоль осиx $(\nu = 0)$, найдем из (14), полагая:

$$x_{s+1} = x_s / \sqrt{\gamma / 2}$$

При этом дисперсионные уравнения совпадают с уравнениями для самоподобной структуры, представленной на рис.1. Полоса пропускания определяется аналогично соотношениям (9): $\Delta\omega^2 = 2a\omega_x^2 / \gamma$
Таким образом, самоподобная решетка также представляет собой полосовой фильтр и обладает способностью усиления (снижения) сигнала.

Авторы благодарят Д.А. Индейцева за полезное обсуждение работы и ценные замечания.

Список литературы

1. Асташев В.К. Расчет стержневых концентраторов с нелинейной нагрузкой // Акустический журнал. 1981. Т. 27. №6. С. 821-827.
2. Банах Л.Я. Колебания механических систем с самоподобной структурой // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, № 4, часть 2, 2011. С. 52-54.
3. Коллатц Л. Задачи на собственные значения. – М: «Наука», 1968, 540 с.
4. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. 2002, М.: «Институт компьютерных исследований».
5. Федер Е. Фракталы. - М: «Мир», 1991.
6. Феодосьев В.И. Некоторые задачи и вопросы сопротивления материалов , 1967.
7. Astashev V.K., Babitsky V.I. Ultrasonic Processes and Machines. Dynamics, Control and Applications. Springer. 2007. 330 p.
8. BanakhL.Ya., Kempner M.L. Vibrations of mechanical systems with regular structure. Springer, Series: Foundation of Engineering Mechanics, 2010, 350 p.

Поступила: 20.01.13.