Влияние космических факторов на скорость альфа-распада

Шноль С.Э., Ланда П.С., Власов В.А.

Аннотация

Известно, что альфа-частицы время от времени покидают атомы исходного вещества в результате преодоления образованного в основном кулоновскими силами потенциального барьера (туннельного эффекта) (см., например, [1, 2]). Хотя излучение альфа-частиц, строго говоря, является квантовым эффектом, для него можно построить классическую модель, основанную на аналогии между туннельным эффектом и классическим переходом частицы через потенциальный барьер под действием шума. Первая теория такого перехода была разработана Л.С. Понтрягиным, А.А. Андроновым и А.А. Виттом в 1933 году [3]. Используя такую классическую модель, мы провели аналитический расчет плотности вероятности для скорости альфа-распада с учетом слабого воздействия на него внешнего потока космических частиц. Показано, что это воздействие приводит к изменению зависимостей плотности вероятности от числа альфа-частиц, излучаемых в единицу времени. Найденные нами зависимости по характеру близки к соответствующим экспериментальным зависимостям, полученным в работах [5, 7].

Введение

Часть работы, касающаяся влияния космических частиц на скорость альфа-распада, обусловлена многочисленными экспериментами С.Э. Шноля с сотрудниками, проводимыми для самых различных случайных процессов и описанных в монографии [5]. Настоящая работа в какой-то мере является продолжением нашей работы [4], где были вычислены

распределения вероятностей для скорости броуновской частицы при воздействии на нее космического излучения в зависимости от времени. Было найдено, что формы вычисленных распределений вероятностей близки к экспериментальным, полученным А.В. Каминским и С.Э. Шнолем [6].

На протяжении нескольких десятилетий основным объектом исследований С.Э. Шноля с сотрудниками [5, 7] были флуктуации интенсивности альфа-распада. В указанных работах показано, что форма гистограмм, построенных по относительно небольшому числу (порядка 100)[1] последовательных измерений процессов разной природы (от броуновского движения, скоростей химических реакций до радиоактивного распада разного вида) закономерно изменяется во времени. Сходные гистограммы с высокой вероятностью реализуются с периодами равными солнечным и звездным суткам, равным приблизительно 27-и суткам, и с годичными периодами. В каждый данный момент, в данном географическом пункте форма гистограмм, построенных по результатам измерений процессов разной природы, с высокой вероятностью сходна. В разных географических пунктах сходные гистограммы с высокой вероятностью наблюдаются в одно и то же местное время. В опытах с измерениями альфа-радиоактивности с применением коллиматоров, вырезающих пучки частиц, летящих в определенных направлениях, показана зависимость наблюдаемых закономерностей от направления в пространстве. Из совокупности найденных закономерностей был сделан вывод об их обусловленности общими для всех процессов космическими причинами. Наибольшую трудность для попыток объяснения природы этих космических причин представляют огромные различия в диапазонах изменений энергии в исследованных процессах (крайними примерами процессов, в которых, казалось бы, могут проявляться эти различия, являются броуновское движение и альфа-распад). Однако, из общих соображений должно быть ясно, что указанные различия не могут влиять на степень и характер космического воздействия на рассматриваемые процессы. Влияние может оказывать только различие спектров исследуемых процессов и космического излучения.

В работах [5, 7] было показано, что определенным направлениям соответствуют опре-

[1] Авторам приходится ограничиваться относительно небольшим числом измерений, потому что наблюдаемые ими процессы из-за влияния космических факторов являются нестационарными (или периодически нестационарными).

деленные формы гистограмм и их изменения связаны с вращением Земли вокруг своей оси и вокруг Солнца. Полагая периодические изменения формы гистограмм отражением изменений формы статистических распределений, были обнаружены соответствующие периодические изменения формы распределений и при броуновском движении и в процессе альфа-распада. В недавнее время опубликованы результаты закономерного изменения темпа радиоактивного распада в зависимости (как полагают авторы) от изменяющегося в ходе годичного движения Земли по околосолнечной орбите расстояния лаборатории от Солнца [8]. Эти результаты также могут быть объяснены предложенной в настоящей статье теорией рассмматриевой модели альфа-распада.

Следует отметить, что природа космических факторов, обусловливающих периодические изменения статистических распределений процессов разной природы, может быть самой разной, но их воздействие на изучаемые процессы может быть одинаковым по своему характеру. Авторы этой статьи придерживаются разных гипотез относительно природы космических факторов. П.С.Ланда полагает, что они вызваны неким космическим излучением, действующим на процессы разной природы. С.Э.Шноль считает вероятной причиной наблюдаемых закономерностей движение в неоднородном гравитационном поле Земли при ее вращении вокруг собственной оси и движении по околосолнечной орбите [5]. Скорее всего, оба эти фактора играют роль.

Решение подобной задачи для броуновского движения проводилось в указанной выше работе [4]. Было показано, что учет зависящего от времени внешнего космического воздействия приводит к тому, что распределение вероятности становится существенно нестационарным и представляет собой сумму компонент, обусловленных различными астрономическими факторами: вращением Земли вокруг собственной оси и Солнца, движением Солнца и звезд и т.п. Было показано также, что результатом рассмотренного воздействия является модуляция гауссовского распределения, имеющего место для свободной броуновской частицы, и его асимметрия по отношению к направлению скорости частицы. Математически задача об альфа-распаде существенно отличается от задачи о броуновском движении. Основное отличие заключается в том, что вылет альфа-частиц из ядра обусловлен исключительно туннелированием через потенциальный барьер, поскольку энергия альфа-частиц при вылете составляет 5–10 Мэв, а высота кулоновского потенциального барьера у тяже-

лых ядер составляет 25–30 Мэв [2], тогда как движение броуновских частиц определяется столкновениями с молекулами жидкости, в которой они находятся.

1 Классическая модель альфа-распада

Использование классической модели альфа-распада для целей сравнения с экспериментами С.Э. Шноля [5, 7] оправдано простыми соображениями о том, что закономерности изменения формы наблюдаемых гистограмм должны зависеть только от характера воздействия на систему, а не от его природы. Отсюда можно предположить, что формы гистограмм для реального процесса альфа-распада и его классической модели должны быть близки.

Предполагая, что движение альфа-частицы к границе ядра подобно классическому движению легкой частицы в вязкой среде, запишем модельное уравнение в виде

$$m\ddot{r} + \gamma\dot{r} + \frac{dV(r)}{dr} = \xi(t) + F(\dot{r}, \epsilon t), \tag{1}$$

где r — расстояние между центрами альфа-частицы и ядра, $\dot{r}$ — скорость альфа-частицы, $V(r)$ — сумма ядерного, кулоновского и центробежного потенциалов, $\xi(t)$ — белый шум интенсивности $K = \langle \xi(t)\xi(t+\tau) \rangle$, $\gamma\dot{r}$ — эффективная диссипативная сила, подобная силе Стокса для броуновской частицы, m — масса альфа-частицы, $F(\dot{r}, \epsilon t)$ — внешняя сила, действующая на альфа-частицу, вызванная столкновениями ядра с космическими частицами и медленно зависящая от времени, ϵ — условный малый параметр, который в окончательных выражениях следует положить равным единице. Дальше будем полагать, что масса альфа-частицы настолько мала, что выполняется условие

$$m\ddot{r} \ll \gamma\dot{r}. \tag{2}$$

В предположении, что масса альфа-частицы много меньше массы ядра, потенциал $V(r)$ описывается формулой [2]

$$V(r) = V_{\text{nucl}} + \frac{Ze^2}{r} - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{L(L+1)}{r^2}, \tag{3}$$

где V — потенциал ядерных сил, Z — число протонов в ядре, e — заряд электрона, $\hbar$ — постоянная Планка, L — орбитальный момент альфа-частицы. Из этой формулы следует, что внутри ядра имеется потенциальная яма, форму которой можно вычислить, зная

зависимость ядерного потенциала от r. В первой работе по теории альфа-распада, основанной на туннельном эффекте, опубликованной Г. Гамовым в 1927 году, потенциальная яма представлялась в форме прямоугольника. Такая же форма потенциальной ямы показана в [2], где дается пример зависимости $V(r)$ для элемента ^{230}Th (см. рис. 1 *a*). Для наших целей удобнее аппроксимировать потенциальную яму некоторой параболой, параметры которой можно выбрать так, чтобы вне ямы потенциал совпадал с приведенным на рис. 1 *a*. При этом внутри ямы потенциал можно аппроксимировать формулами

$$V(r) = V_0 \left(a_1 - \frac{a_2 r}{r_m} + \frac{a_3 r^2}{r_m^2} \right) \equiv V_0 \left(\frac{a_3 (r - r_{\min})^2}{r_m^2} - b \right), \tag{4}$$

где $a_1 = 0.826$, $a_2 = 6.5666$, $a_3 = 5.7549$, $b = a_2^2/(4a_3) - a_1 \approx 1.0472$, $r_m \approx 10F$ — ширина ямы, $r_{\min} = a_2 r_m/(2a_3)$ — минимальное значение потенциала, $V_0 \approx 23$, $b = a_2^2/(4a_3) - a_1 \approx 1.0472$. Как и на рис. 1 *a*, расстояние от центра ядра мы выражаем в Ферми-единицах [2].

С учетом формулы (4) зависимость потенциала V от расстояния r принимает вид, показанный на рис. 1 *b*. Минимум потенциала соответствует устойчивому положению равновесия альфа-частицы, а максимум — неустойчивому положению ($r = r_0 \approx 13.2F$). Вылет альфа-частицы происходит тогда, когда она преодолевает потенциальный барьер, т.е. когда r становится равным r_0. Таким образом, задача о вылете альфа-частицы сводится к задаче о достижении границы.

Потенциал $V(r)$, приведенный на рис. 1 *b*, при $1 \le r/r_m \le r_0/r_m$ можно приближенно аппроксимировать в виде полинома

$$V(r) = V_0 \left(\frac{r}{r_m} - 1 \right) \left[5.5187 - 40.2072 \left(\frac{r}{r_m} - 1 \right) + 424.36 \left(\frac{r}{r_m} - 1 \right)^2 - \right.$$
$$\left. -1690.1348 \left(\frac{r}{r_m} - 1 \right)^3 + 2136.4739 \left(\frac{r}{r_m} - 1 \right)^4 \right], \tag{5}$$

где $V_0 = 23$.

Отметим, что вблизи максимума зависимость $V(r)$ достаточно хорошо аппроксимируется гауссовской кривой

$$V(r) \approx V_0 \exp \left[-k_1 \left(1 - \frac{r}{r_0} \right)^2 \right], \tag{6}$$

где $k_1 = 7.26$. Кривая, отвечающая формуле (6), показана на рис. 1 *b* тонкой линией.

[2] Ферми — единица длины, равная 10^{-15} м.

При наличии внешней силы $F(\dot{r}, \epsilon t)$ и выполнении условия (2) уравнение (1) принимает вид

$$\gamma\dot{r} + \frac{dV(r)}{dr} = \xi(t) + F(\dot{r}, \epsilon t). \tag{7}$$

Уравнению (7) соответствует следующее уравнение Фоккера–Планка:

$$\frac{\partial w(r,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{\gamma}\left(\frac{dV(r)}{dr} - F(\dot{r}, \epsilon t)\right) w(r,t)\right] + \frac{K}{2\gamma^2}\,\frac{\partial^2 w(r,t)}{\partial r^2}. \tag{8}$$

В отсутствие внешней силы установившееся решение уравнения (8) не зависит от t и определяется формулой

$$w(r) = w_0(r) = C\exp\left(-\frac{2\gamma V(r)}{K}\right), \tag{9}$$

где C — постоянная нормировки. Как и следовало ожидать, вероятность в точке $r = r_{\min}$ имеет максимум, а в точке $r = r_0$ — минимум.

Подставляя в формулу (9) выражение (4) и введя безразмерный параметр

$$a = \frac{2\gamma V_0}{K}\,, \tag{10}$$

находим распределение вероятностей внутри потенциальной ямы:

$$w_0(r) = C_1\exp\left[-\left(\frac{aa_3(r - r_{\min})^2}{r_m^2}\right)\right], \tag{11}$$

где $C_1 = Ce^{ab}$. Отсюда следует, что внутри потенциальной ямы мы имеем ограниченное с двух сторон гауссовское распределение вероятностей со средним значением $r_{\min}$ и дисперсией $\sigma = r_m/\sqrt{aa_3}$. Если $\sigma \ll r_{\min}$, то при вычислении C_1 можно приближенно интегрировать $w(r)$ в бесконечных пределах. В результате находим

$$C_1 \approx \sqrt{\frac{aa_3}{\pi}}\, r_m. \tag{12}$$

Пусть в начальный момент времени расстояние альфа-частицы от центра ядра равно r. Пренебрегая внешней силой, найдем вероятность $P(\tau, r)$ того, что в течение промежутка времени τ координата r не достигнет граничного значения r_0. Эта вероятность связана с плотностью распределения $w(r', r, \tau)$ изображающих точек в фазовом пространстве, ни разу не коснувшихся границы r_0 за время τ, соотношением [9]

$$P(\tau, r) = \int_0^{r_0} w(r', r, \tau)\, dr', \tag{13}$$

где плотность распределения $w(r', r, \tau)$ описывается уравнением

$$\frac{\partial w(r', r, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial r'} \left(\frac{1}{\gamma} \frac{dV(r')}{dr'} w(r', r, \tau) \right) + \frac{K}{2\gamma^2} \frac{\partial^2 w(r', r, \tau)}{\partial r'^2} \tag{14}$$

с граничным условием

$$w(r', r, \tau)|_{r'=r_0} = 0 \tag{15}$$

и начальным условием

$$w(r', r, 0) = \delta(r' - r). \tag{16}$$

Нулевое граничное условие для функции $w(r', r, \tau)$ связано с тем, что вблизи границы не может быть точек, ни разу ее не достигших.

Зная вероятность $P(\tau, r)$, можно вычислить математическое ожидание времени достижения границы $\left\langle \tau(r) \right\rangle$ по формуле

$$\left\langle \tau(r) \right\rangle = -\int_0^\infty \tau \frac{\partial P(\tau, r)}{\partial \tau} d\tau = -\tau P(\tau, r)\Big|_0^\infty + \int_0^\infty P(\tau, r)\, d\tau. \tag{17}$$

Принимая во внимание, что $P(0, r) = 1$ и $P(\infty, r) = 0$, причем $\lim\limits_{\tau \to \infty} \tau P(\tau, r) = 0$, из (17) находим

$$\left\langle \tau(r) \right\rangle = \int_0^\infty P(\tau, r)\, d\tau. \tag{18}$$

Так как вероятность $P(\tau, r)$ зависит от значения r в начальный момент времени, то и математическое ожидание $\langle \tau \rangle$ должно зависеть от r. Чтобы вывести уравнения для $P(\tau, r)$ и $\left\langle \tau(r) \right\rangle$, рассмотрим их как функцию r. Прежде всего заметим, что плотность распределения $w(r', r, \tau)$ как функция переменных r и τ, удовлетворяет уравнению, сопряженному (14), а именно

$$\frac{\partial w(r', r, \tau)}{\partial \tau} = -\frac{1}{\gamma} \frac{dV(r)}{dr} \frac{\partial w(r', r, \tau)}{\partial r} + \frac{K}{2\gamma^2} \frac{\partial^2 w(r', r, \tau)}{\partial r^2}. \tag{19}$$

Заметим, что уравнение вида (19) называется первым уравнением Колмогорова [13].

Проинтегрировав уравнение (19) по переменной r' при $r_{\min} \le r' \le r_0$ и учитывая (13), получим уравнение для вероятности $P(\tau, r)$:

$$\frac{\partial P(\tau, r)}{\partial \tau} = -\frac{1}{\gamma} \frac{dV(r)}{dr} \frac{\partial P(\tau, r)}{\partial r} + \frac{K}{2\gamma^2} \frac{\partial^2 P(\tau, r)}{\partial r^2}. \tag{20}$$

Представим $\partial P(\tau, r)/\partial\tau$ в форме преобразования Фурье от характеристической функции $\Theta(i\nu, r)$:

$$\frac{\partial P(\tau, r)}{\partial \tau} = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Theta(i\nu, r) \exp(-i\nu\tau)\, d\nu. \tag{21}$$

Обратное преобразование имеет вид

$$\Theta(i\nu, r) = -\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\partial P(\tau, r)}{\partial \tau}\, \exp(i\nu\tau)\, d\tau. \tag{22}$$

Разложим правую часть выражения (22) в ряд по $i\nu$ в окрестности точки $i\nu = 0$:

$$\Theta(i\nu, r) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\nu)^k}{k!}\, m_k(r), \tag{23}$$

где $m_k(r) = -\int\limits_{0}^{\infty} \tau^k\, \dfrac{\partial P(\tau, r)}{\partial \tau}\, d\tau$ — k-й момент времени достижения границы. Так как $P(\infty, r) = 0$ и $P(0, r) = 1$, то $m_0(r) = P(0, r) - P(\infty, r) = 1$.

Дифференцируя обе части уравнения (20) по τ, умножая на $\exp(i\nu\tau)$ и интегрируя по τ от нуля до бесконечности, получим следующее уравнение для характеристической функции $\Theta(i\nu, E, r)$:

$$-i\nu\Theta(i\nu, r) = -\frac{1}{\gamma}\, \frac{dV(r)}{dr}\, \frac{\partial\Theta(i\nu, r)}{\partial r} + \frac{K}{2\gamma^2}\, \frac{\partial^2\Theta(i\nu, r)}{\partial r^2}\,. \tag{24}$$

Подставляя (23) в уравнение (24) и приравнивая члены при одинаковых степенях $i\nu$, можно получить уравнения для всех моментов времени достижения границы. В частности, для математического ожидания времени достижения $M(r) = m_1(r)$ получаем следующее уравнение:

$$-\frac{1}{\gamma}\, \frac{dV(r)}{dr}\, \frac{\partial M(r)}{\partial r} + \frac{K}{2\gamma^2}\, \frac{\partial^2 M(r)}{\partial r^2} + 1 = 0. \tag{25}$$

Уравнение вида (25), как и уравнение вида (21), было впервые выведено Л.С. Понтрягиным и опубликовано в работе [3]. Поэтому уравнения (21) и (25) часто называют первым и вторым уравнениями Понтрягина.

Для решения уравнения (25) требуется задать два граничных условия. Одно из этих условий является очевидным. Это условие следующее:

$$M(r_0) = 0. \tag{26}$$

В качестве второго граничного условия зададим условие максимума среднего времени достижения границы при $r = r_{\min}$:

$$\left.\frac{dM(r)}{dr}\right|_{r=r_{\min}} = 0. \tag{27}$$

Решение уравнения (25) с граничными условиями (26) и (27) имеет вид

$$M(r) = \frac{2\gamma^2}{K} \int\limits_{r}^{r_0} \exp\left(\frac{2\gamma}{K}\, V(z)\right) \int\limits_{r_{\min}}^{z} \exp\left(-\frac{2\gamma}{K}\, V(x)\right) dx\, dz. \tag{28}$$

Выражение (28) можно существенно упростить подобно тому, как это сделано в работах [12, 9]. Прежде всего примем во внимание, что подынтегральное выражение во внутреннем интеграле имеет наибольшую величину при $x = r_{\min}$, когда $V(x) = V_{\min}$. Поэтому для его вычисления можно воспользоваться формулой (4).

При этом внутренний интеграл приближенно равен

$$I_1(z) \approx \int\limits_{r_{\min}}^{z} \exp\left[-a\left(\frac{a_3}{r_m^2}\,(x - r_{\min})^2 - b\right)\right] dx = \frac{r_m e^{ab}}{2}\sqrt{\frac{\pi}{aa_3}}\,\Phi\left(\sqrt{\frac{aa_3}{2}}\,\frac{z - r_{\min}}{r_m}\right). \tag{29}$$

где $\Phi(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \int\limits_{0}^{x} \exp\left(-\dfrac{y^2}{2}\right) dy$ — интеграл вероятности.

Подынтегральное выражение во внешнем интеграле имеет наибольшую величину при $z = r_0$. Поэтому для его вычисления можно воспользоваться выражением (6), разложив в нем экспоненту в ряд по $1 - r/r_0$, т.е. положить

$$V(z) \approx V_0\left[1 - k_1\left(1 - \frac{z}{r_0}\right)^2\right]. \tag{30}$$

Кроме того, внутренний интеграл $I_1(z)$ можно приближенно вычислить в точке $z = r_0$. В результате получаем

$$M(r) \approx \gamma\,\frac{\pi r_0 r_m}{\sqrt{a_3 k_1}}\,\Phi\left[\sqrt{\frac{ak_1}{2}}\,\left(1 - \frac{r}{r_0}\right)\right]\Phi\left(\sqrt{\frac{aa_3}{2}}\,\frac{r_0 - r_{\min}}{r_m}\right)\exp\Big((b+1)a\Big). \tag{31}$$

Заметим, что показатель экспоненты в формуле (31) пропорционален разности потенциалов в положениях неустойчивого и устойчивого равновесий.

Принимая во внимание, что, коснувшись границы, изображающая точка в фазовом пространстве с равной вероятностью может либо перейти через нее, либо вернуться об-

ратно [10], для среднего времени τ перехода через границу мы получаем следующее приближенное выражение:

$$\tau(r) \approx \frac{M(r)}{2} \approx \gamma \frac{\pi r_0 r_m}{2\sqrt{a_3 k_1}} \Phi\left[\sqrt{\frac{ak_1}{2}}\left(1 - \frac{r}{r_0}\right)\right] \Phi\left(\sqrt{\frac{aa_3}{2}} \frac{r_0 - r_{\min}}{r_m}\right) \exp\Big((b+1)a\Big). \qquad (32)$$

Очевидно, что среднее число $N(r)$ альфа-частиц, излучаемых в единицу времени, обратно пропорционально $\tau(r)$, т.е.

$$N(r) \approx \frac{2\sqrt{a_3 k_1}}{\pi r_0 r_m \gamma} \Phi^{-1}\left[\sqrt{\frac{ak_1}{2}}\left(1 - \frac{r}{r_0}\right)\right] \Phi^{-1}\left(\sqrt{\frac{aa_3}{2}} \frac{r_0 - r_{\min}}{r_m}\right) \exp\Big(-(b+1)a\Big). \qquad (33)$$

Величину N мы будем называть скоростью альфа-распада.

Выражение (33) удобно переписать, введя безразмерные параметры $a = 2\gamma/K$ и

$$N_0 = \frac{2\sqrt{a_3 k_1}}{\pi r_0 r_m \gamma} \Phi^{-1}\left[\sqrt{\frac{ak_1}{2}}\left(1 - \frac{r_{\min}}{r_0}\right)\right] \Phi^{-1}\left(\sqrt{\frac{aa_3}{2}} \frac{r_0 - r_{\min}}{r_m}\right) \exp\Big(-(b+1)a\Big), \qquad (34)$$

где N_0 — скорость альфа-распада при начальном значении r, равном $r_{\min}$. При этом получаем

$$\frac{N}{N_0} \equiv n = \Phi\left[\sqrt{\frac{ak_1}{2}}\left(1 - \frac{r_{\min}}{r_0}\right)\right] \Phi^{-1}\left[\sqrt{\frac{ak_1}{2}}\left(1 - \frac{r}{r_0}\right)\right]. \qquad (35)$$

Так как начальное значение радиуса r, приводящее к излучению альфа-частицы, изменяется в диапазоне $0 \le r \le r_0$, то относительная скорость альфа-распада $n(r) = N(r)/N_0$ может изменяться в диапазоне от $n_{\min}$ до ∞, где

$$n_{\min} = \Phi\left[\sqrt{\frac{ak_1}{2}}\left(1 - \frac{r_{\min}}{r_0}\right)\right] \Phi^{-1}\left(\sqrt{\frac{ak_1}{2}}\right). \qquad (36)$$

Отсюда видно, что минимальная скорость альфа-распада зависит от параметра a, причем при увеличении a она медленно увеличивается. При приближении начального значения радиуса к r_0 скорость альфа-распада стремится к бесконечности, но тем медленнее, чем больше a. Зависимость значений $n_{\min}$ от a продемонстрирована на рис. 2.

Из-за того, что значение r является случайным с плотностью вероятности $w(r)$, определяемой уравнением (8) при $F(\dot{r}, \epsilon t) \equiv 0$, скорость альфа-распада также является случайной величиной с плотностью вероятности $w(n)$. Для вычисления $w(n)$ учтем, что

$$w(r) = w(n) \frac{dn}{dr}. \qquad (37)$$

При записи этой формулы учитывается нормировка плотности вероятности, т.е. равенство $w(r)dr = w(n)dn$. Если эту нормировку не учитывать, то в качестве $w(n)$ можно взять $w(r)|_{r=\phi(n)}$, где $\phi(n)$ — обратная функция.

Заметим, что производную dn/dr нужно вычислить как функцию n. Для этого достаточно знать обратную функцию $\phi(n)$, через которую производная dn/dr выражается следующим образом:

$$\frac{dn}{dr} = \frac{1}{\phi'(n)}\,, \tag{38}$$

где $\phi'(n) = d\phi/dn$.

Для вычисления обратной функции $\phi(n)$ нужно разрешить уравнение (35) относительно r. Сделать это аналитически по-видимому невозможно. Однако можно из формулы (35) построить графики зависимости $\phi(n)$ для разных значений параметра a. Примеры таких графиков для $a = 0.5$, $a = 2$ и $a = 5$ приведены на рис. 3. Мы видим, что функция $\phi(n)$ вблизи значения $n_{\min}$ резко изменяется.

Подставляя (9) в (37), получаем

$$w(n) = C \exp\left(-\frac{aV\Big(\phi(n)\Big)}{V_0}\right)\phi'(n). \tag{39}$$

В области потенциальной ямы, где справедлива аппроксимация (4), имеем

$$w(n) = C \exp\left[-a\left(a_1 - \frac{a_2\phi(n)}{r_m} + \frac{a_3\phi^2(n)}{r_m^2}\right)\right]\phi'(n). \tag{40}$$

Функция $w(n)$, соответствующая формуле (40) является монотонно спадающей с ростом n, тогда как функция

$$\tilde{w}(n) = C \exp\left[-a\left(a_1 - \frac{a_2\phi(n)}{r_m} + \frac{a_3\phi^2(n)}{r_m^2}\right)\right] \tag{41}$$

имеет максимум в точке n, соответствующей неустойчивому положению равновесия, и быстро падает при уменьшении n (см. рис. 4). При увеличении a максимум становится все более острым и его высота увеличивается.

2 Распределение вероятностей для скорости альфа-распада с учетом внешнего потока космических частиц

Для силы $F(\dot{r}, \epsilon t)$, входящей в уравнение Фоккера–Планка (8), мы используем выражение, выведенное нами для броуновских частиц. С учетом уравнения (7) имеем

$$F(\dot{r}, \epsilon t) = \beta n(t) \left(u(\epsilon t) + \frac{1}{\gamma} \frac{dV(r)}{dr} \right)^2, \tag{42}$$

где $(1/\gamma)dV(r)/dr = -\langle \dot{r} \rangle$ — средняя скорость вылетающей альфа-частицы с обратным знаком, $u(\epsilon t)$ — составляющая скорости космических частиц, направленная вдоль $\dot{r}$, $n(t)$ — линейная плотность потока космических частиц, определяемая выражением

$$\begin{aligned} n(t) = n_0(\epsilon t)\Big(1 + \sin\alpha \cos\omega_2 t\Big)\Big(1 + \sin\varphi \cos(\omega_1 t - \psi)\Big) = 1 + \sin\varphi \cos(\omega_1 t - \psi) \\ + \sin\alpha \cos\omega_2 t + \frac{\sin\alpha \sin\varphi}{2}\Big(\cos(\omega_3 t - \psi) + \cos(\omega_4 t - \psi)\Big), \end{aligned} \tag{43}$$

$n_0(\epsilon t)$ — медленно меняющаяся функция времени, $\omega_1 = 36\pi/432$ радиан/час — приблизительное значение частоты обращения Земли вокруг своей оси, $\omega_2 = \omega_1/365.25$ радиан/час — приблизительное значение частоты обращения Земли вокруг Солнца, $\omega_{3,4} = \omega_1 \pm \omega_2$ — частоты, мало отличающиеся от ω_1, ψ — сдвиг фаз, определяемый долготой места наблюдения, $\alpha \approx 0.409 \approx 23.45^\circ$ — угол между плоскостью экватора и плоскостью земной орбиты, φ — угол между направлением скорости потока космических частиц и направлением на Север. Из формулы (43) следует, что при $\varphi = 0$ плотность космических частиц не зависит от времени суток. Заметим, что периоды, соответствующие частотам $\omega_{3,4}$, отличаются от периода обращения Земли вокруг Солнца $T_1 = 2\pi/\omega_1$ приблизительно на 4 минуты. Можно предположить, что наблюдаемая в работах [5, 7] разница в 4 минуты между двумя периодами, которую авторы трактуют как разницу между звездными и солнечными сутками, как раз и определяется разницей между комбинационными частотами $\omega_{3,4}$ и частотой обращения Земли вокруг своей оси.

Выбирая начало отсчета времени в один из дней летнего противостояния, находим, что моменты времени, в которые $\omega_2 t = (2n+1)\pi/2$, где $n = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$, соответству-

ют дням равноденствия, $\omega_2 t = 2n\pi$ — дням летнего противостояния, $\omega_2 t = (2n+1)\pi$ — дням зимнего противостояния.

Заметим, что точные значения частот ω_1 и ω_2 несоизмеримы, причем $\omega_1 \gg \omega_2$. Поэтому функция $n(t)$ близка к квазипериодической функции времени, т.е. к сумме периодических составляющих с несоизмеримыми периодами $T_j = 2\pi/\omega_j$, где $j = 1, 2, 3, 4$.

Очевидно, что ядра атомов, движущихся вдоль потока космических частиц, будут испытывать наибольшее воздействие космического потока, тогда как ядра, движущиеся поперек потока, вообще не будут испытывать какое-либо воздействие. Это сказывается на результатах экспериментов с коллиматорами, выделяющими направление прилета космических частиц [5].

С учетом (42), (43) уравнение (8) принимает вид

$$\frac{\partial w(r,t)}{\partial t} - \frac{1}{\gamma}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{dV(r)}{dr}w(r,t)\right) - \frac{K}{2\gamma^2}\frac{\partial^2 w(r,t)}{\partial r^2} = -\beta n(t)\frac{\partial}{\partial r}\left[\left(u + \frac{1}{\gamma}\frac{dV(r)}{dr}\right)^2 w(r,t)\right]. \tag{44}$$

Полагая, что поправка к распределению вероятностей (9) мала (это предположение подтверждается вычислениями плотности вероятности на основе измеренного временного ряда (см., например, рис. 5, взятый из книги [5])), решение уравнения (44) можно искать путем разложения по некоторому малому параметру μ в виде ряда

$$w(r,t) = w_0(r) + \mu w_1(r,t) + \ldots \tag{45}$$

где $w_0(r)$ определяется формулой (9).

Подставляя (45) в уравнение (44), для функции $w_1(v,t)$ в первом приближении по μ получаем следующее уравнение:

$$\frac{\partial w_1(r,t)}{\partial t} - \frac{1}{\gamma}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{dV(r)}{dr}w_1(r,t)\right) - \frac{K}{2\gamma^2}\frac{\partial^2 w_1(r,t)}{\partial r^2} = -\beta n(t)\frac{\partial}{\partial r}\left[\left(u + \frac{1}{\gamma}\frac{dV(r)}{dr}\right)^2 w_0(r)\right]. \tag{46}$$

Функция $w_1(r,t)$ определяет поправку к распределению вероятностей, найденному в предыдущем параграфе, которую можно сопоставить с «тонкой структурой гистограмм», исследованной в [5].

Из условия нормировки функции $w(r,t)$ следует

$$\int_0^\infty w_0(r)\,dr = 1, \quad \int_0^\infty w_1(r,t)\,dr = 0. \tag{47}$$

В силу линейности уравнения (46) его решение можно искать в виде

$$w_1(r,t) = W_{00}(r,\epsilon t) + \sin\varphi\Big(W_{11}(r,\epsilon t)\cos(\omega_1 t - \psi) + W_{12}(r,\epsilon t)\sin(\omega_1 t - \psi)\Big) +$$
$$+ \sin\alpha\Big(W_{21}(r,\epsilon t)\cos\omega_2 t + W_{22}(r,\epsilon t)\sin\omega_2 t\Big) + \frac{\sin\alpha\sin\varphi}{2}\Big(W_{31}(r,\epsilon t)\cos(\omega_3 t - \psi) +$$
$$+ W_{32}(r,\epsilon t)\sin(\omega_3 t - \psi) + W_{41}(r,\epsilon t)\cos(\omega_4 t - \psi) + W_{42}(r,\epsilon t)\sin(\omega_4 t - \psi)\Big), \qquad (48)$$

где $W_{00}(r,\epsilon t)$ и $W_{ij}(r,\epsilon t)$ — неизвестные медленно меняющиеся со временем функции.

Поскольку функция $w_1(r,t)$ должна быть отлична от нуля только при наличии внешнего воздействия, мы можем найти только частные решения неоднородного уравнения (46).

Из уравнения (46) и выражения (43) находим уравнения для функций $W_{00}(r,\epsilon t)$ и $W_{ji}(r,\epsilon t)$:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{K}{2\gamma}\frac{\partial W_{00}(r,\epsilon t)}{\partial r} + \frac{dV(r)}{dr}W_{00}(r,\epsilon t)\right] = \beta\gamma n_0(\epsilon t)\frac{\partial}{\partial r}\left[\left(u + \frac{1}{\gamma}\frac{dV(r)}{dr}\right)^2 w_0(r)\right],\\
&-\omega_1 W_{12} + \frac{1}{\gamma}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{dV(r)}{dr}W_{11}(r,\epsilon t) + \frac{K}{2\gamma}\frac{\partial W_{11}(r,\epsilon t)}{\partial r}\right) = \beta n_0(\epsilon t)\frac{\partial}{\partial r}\left[\left(u + \frac{1}{\gamma}\frac{dV(r)}{dr}\right)^2 w_0(r)\right],\\
&\omega_1 W_{11} + \frac{1}{\gamma}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{dV(r)}{dr}W_{12}(r,\epsilon t) + \frac{K}{2\gamma}\frac{\partial W_{12}(r,\epsilon t)}{\partial r}\right) = 0;\\
&-\omega_2 W_{22} + \frac{1}{\gamma}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{dV(r)}{dr}W_{21}(r,\epsilon t) + \frac{K}{2\gamma}\frac{\partial W_{21}(r,\epsilon t)}{\partial r}\right) = \beta\gamma n_0(\epsilon t)\frac{\partial}{\partial r}\left[\left(u + \frac{1}{\gamma}\frac{dV(r)}{dr}\right)^2 w_0(r)\right],\\
&\omega_2 W_{21} + \frac{1}{\gamma}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{dV(r)}{dr}W_{22}(r,\epsilon t) + \frac{K}{2\gamma}\frac{\partial W_{22}(r,\epsilon t)}{\partial r}\right) = 0;\\
&-\omega_3 W_{32} + \frac{1}{\gamma}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{dV(r)}{dr}W_{31}(r,\epsilon t) + \frac{K}{2\gamma}\frac{\partial W_{31}(r,\epsilon t)}{\partial r}\right) = \beta\gamma n_0(\epsilon t)\frac{\partial}{\partial r}\left[\left(u + \frac{1}{\gamma}\frac{dV(r)}{dr}\right)^2 w_0(r)\right],\\
&\omega_3 W_{31} + \frac{1}{\gamma}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{dV(r)}{dr}W_{32}(r,\epsilon t) + \frac{K}{2\gamma}\frac{\partial W_{32}(r,\epsilon t)}{\partial r}\right) = 0;\\
&-\omega_4 W_{42} + \frac{1}{\gamma}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{dV(r)}{dr}W_{41}(r,\epsilon t) + \frac{K}{2\gamma}\frac{\partial W_{41}(r,\epsilon t)}{\partial r}\right) = \beta\gamma n_0(\epsilon t)\frac{\partial}{\partial r}\left[\left(u + \frac{1}{\gamma}\frac{dV(r)}{dr}\right)^2 w_0(r)\right],\\
&\omega_4 W_{41} + \frac{1}{\gamma}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{dV(r)}{dr}W_{42}(r,\epsilon t) + \frac{K}{2\gamma}\frac{\partial W_{42}(r,\epsilon t)}{\partial r}\right) = 0.
\end{aligned} \qquad (49)$$

Первое уравнение (49) описывает поправку к распределению вероятностей, медленно зависящую от времени, тогда как остальные уравнения описывают формы распределе-

ний вероятностей, изменяющихся во времени приблизительно с периодами $T_1 = 2\pi/\omega_1$ (суточными), $T_2 = 2\pi/\omega_2$ (годовыми) и $T_3 = 2\pi/\omega_3$, $T_4 = 2\pi/\omega_4$ (близкими к суточным).

Решение уравнений (49) удобно искать в виде

$$W_{00}(r, \epsilon t) = w_{00}(r, \epsilon t) w_0(r), \quad W_{ji}(r, \epsilon t) = w_{ji}(r, \epsilon t) w_0(r). \tag{50}$$

Поскольку $w_0(r)$ максимальна в области потенциальной ямы, потенциал $V(r)$ в уравнениях (49) можно задать формулой (4).

Подставляя (50) в (49) и принимая во внимание (4), получаем следующие уравнения:

$$\frac{V_0}{a} \frac{\partial^2 w_{00}(r, \epsilon t)}{\partial r^2} - \frac{2V_0 a_3 (r - r_{\min})}{r_m^2} \frac{\partial w_{00}(r, \epsilon t)}{\partial r} = \gamma R(r, \epsilon t), \tag{51}$$

$$\begin{gathered} -\omega_j w_{j2}(r, \epsilon t) + \frac{V_0}{\gamma} \left(\frac{1}{a} \frac{\partial^2 w_{j1}(r, \epsilon t)}{\partial r^2} - \frac{2a_3 (r - r_{\min})}{r_m^2} \frac{\partial w_{j1}(r, \epsilon t)}{\partial r} \right) = R(r, \epsilon t), \\ \omega_j w_{j1}(r, \epsilon t) + \frac{V_0}{\gamma} \left(\frac{1}{a} \frac{\partial^2 w_{j2}(r, \epsilon t)}{\partial r^2} - \frac{2a_3 (r - r_{\min})}{r_m^2} \frac{\partial w_{j2}(r, \epsilon t)}{\partial r} \right) = 0, \end{gathered} \tag{52}$$

где

$$R(r, \epsilon t) = \frac{4\beta n_0(\epsilon t) a_3}{\gamma r_m^2} \left[u + V_0 \frac{2a_3 (r - r_{\min})}{\gamma r_m^2} \right] \left\{ V_0 - \frac{a a_3 \gamma (r - r_{\min})}{2} \left[u + \frac{2a_3 V_0 (r - r_{\min})}{\gamma r_m^2} \right] \right\}. \tag{53}$$

Решение неоднородных уравнений (51), (52) можно искать в виде полиномов с неизвестными коэффициентами

$$w_{00}(r, \epsilon t) = b_0 + b_1 r + b_2 r^2 + b_3 r^3, \tag{54}$$

$$w_{ji}(r, \epsilon t) = c_{i0}^{(j)} + c_{i1}^{(j)} r + c_{i2}^{(j)} r^2 + c_{i3}^{(j)} r^3. \tag{55}$$

При этом правые части уравнений (51), (52) следует также представить в виде полиномов, принимая во внимание, что

$$R(r, \epsilon t) = \sum_{k=0}^{3} R_k r^k, \tag{56}$$

где

$$\begin{aligned} R_0 &= \frac{4\beta n_0(\epsilon t) a_3}{\gamma r_m^2} \left(u - \frac{2a_3 V_0 r_{\min}}{\gamma r_m^2} \right) \left[V_0 + \frac{a\gamma r_{\min}}{2} \left(u - \frac{2a_3 V_0 r_{\min}}{\gamma r_m^2} \right) \right], \\ R_1 &= \frac{4\beta n_0(\epsilon t) a_3}{r_m^2} \left[\frac{2a_3 V_0^2}{\gamma^2 r_m^2} - a \left(u - \frac{2a_3 V_0 r_{\min}}{\gamma r_m^2} \right) \left(\frac{u}{2} - \frac{3a_3 V_0 r_{\min}}{\gamma r_m^2} \right) \right], \\ R_2 &= - \frac{8\beta n_0(\epsilon t) V_0 a a_3^2}{\gamma r_m^2} \left(u - \frac{3a_3 V_0 r_{\min}}{\gamma r_m^2} \right), \quad R_3 = - \frac{8\beta n_0(\epsilon t) V_0^2 a a_3^3}{\gamma^2 r_m^6}. \end{aligned} \tag{57}$$

Подставляя раньше всего (54) и 56) в уравнение (51) и приравнивая коэффициенты при r с одинаковыми показателями степени, получаем следующие уравнения для коэффициентов b_k:

$$\frac{2V_0}{a}\,b_2+\frac{2V_0a_3r_{\min}}{r_m^2}\,b_1=\gamma R_0,\quad \frac{6V_0}{a}\,b_3+\frac{2V_0}{r_m}\,a_2b_2-\frac{2V_0}{r_m^2}\,a_3b_1=\gamma R_1,$$
$$\frac{3V_0a_2}{r_m}\,b_3-\frac{4V_0a_3}{r_m^2}\,b_2=\gamma R_2,\quad \frac{3V_0a_3}{r_m^2}\,b_3=\gamma R_3. \tag{58}$$

Система четырех уравнений (58) содержит только три неизвестных: b_1, b_2 и b_3. Это значит, что она является переопределенной: в зависимости от правых частей она может либо вообще не иметь решения, либо иметь решение, не зависящее от b_0. Расчеты показывают, что при правых частях, определяемых выражениями (57), как и для броуновского движения, имеет место второй случай. В результате получаем следующее решение:

$$b_1(\epsilon t)=\frac{\beta a n_0(\epsilon t)}{\gamma V_0 r_m}\left(u-\frac{a_2V_0}{\gamma r_m}\right)^2,\quad b_2(\epsilon t)=\frac{2\beta a n_0(\epsilon t)a_3}{\gamma r_m^2}\left(u-\frac{a_2V_0}{\gamma r_m}\right),\quad b_3(\epsilon t)=\frac{4\beta a n_0(\epsilon t)V_0a_3^2}{3\gamma r_m^4}\,. \tag{59}$$

Значение $b_0(\epsilon t)$ может быть найдено из второго условия нормировки, справедливого для каждого из слагаемых функции $w_1(r,t)$, определяемой выражением (48). Вычисляя вероятность $w_0(r)$ в области потенциальной ямы и записав потенциал в виде

$$V_0\left(\frac{a_3(r-r_{\min})^2}{r_m^2}-b\right),$$

находим

$$b_0(\epsilon t)=\approx-\int_0^\infty C(b_1(\epsilon t)r+b_2(\epsilon t)r^2+b_3(\epsilon t)r^3)\frac{1}{r_m}\,\exp(-ab)\sqrt{\frac{aa_3}{\pi}}\exp\left[-a\left(\frac{a_3}{r_m^2}\,(r-r_{\min})^2-b\right)\right]dr, \tag{60}$$

где

$$C=\frac{1}{r_m}\,\exp(-ab)\sqrt{\frac{aa_3}{\pi}}\,. \tag{61}$$

Интегралы в формуле (60) можно вычислить приближенно при условии, что $r_{\min}\gg r_m/\sqrt{aa_3}$, т.е. распределение вероятностей $w_0(r)$ является достаточно узким. Принимая во внимание (61), в результате получаем

$$b_0(\epsilon t)=\approx-r_{\min}\left[b_1(\epsilon t)+b_2(\epsilon t)r_{\min}\left(1+\frac{r_m^2}{2aa_3r_{\min}^2}\right)+b_3(\epsilon t)r_{\min}^2\left(1+\frac{3r_m^2}{2aa_3r_{\min}^2}\right)\right]. \tag{62}$$

Итак,

$$W_{00}(r,\epsilon t)\approx\left\{b_1(\epsilon t)(r-r_{\min})+b_2(\epsilon t)\left[r^2-r_{\min}^2\left(1+\frac{r_m^2}{2aa_3r_{\min}^2}\right)\right]+\right.$$
$$\left.+b_3(\epsilon t)\left[r^3-r_{\min}^3\left(1+\frac{3r_m^2}{2aa_3r_{\min}^2}\right)\right]\right\}w_0(r). \tag{63}$$

Отсюда следует, что

$$W_{00}(n,\epsilon t)\approx\left\{b_1(\epsilon t)(\phi(n)-r_{\min})+b_2(\epsilon t)\left[\phi^2(n)-r_{\min}^2\left(1+\frac{r_m^2}{2aa_3r_{\min}^2}\right)\right]+\right.$$
$$\left.+b_3(\epsilon t)\left[\phi^3(n)-r_{\min}^3\left(1+\frac{3r_m^2}{2aa_3r_{\min}^2}\right)\right]\right\}w_0(n), \tag{64}$$

где $w_0(n)$ определяется формулой (40).

Подставляя теперь (55) в уравнения (52) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях r, получаем следующие уравнения для этих коэффициентов:

$$\begin{aligned}
&-\omega_j c_{20}+\frac{2V_0}{\gamma}\left(\frac{a_3r_{\min}}{r_m^2}\,c_{11}+\frac{1}{a}\,c_{12}\right)=R_0,\quad \omega_j c_{10}+\frac{2V_0}{\gamma}\left(\frac{a_3r_{\min}}{r_m^2}\,c_{21}+\frac{1}{a}\,c_{22}\right)=0,\\
&-\omega_j c_{21}+\frac{2V_0}{\gamma}\left(-\frac{a_3}{r_m^2}\,c_{11}+\frac{2a_3r_{\min}}{r_m^2}\,c_{12}+\frac{3}{a}\,c_{13}\right)=R_1,\\
&\omega_j c_{11}+\frac{2V_0}{\gamma}\left(-\frac{a_3}{r_m^2}\,c_{21}+\frac{2a_3r_{\min}}{r_m^2}\,c_{22}+\frac{3}{a}\,c_{23}\right)=0,\\
&-\omega_j c_{22}+\frac{2V_0}{\gamma}\left(-\frac{2a_3}{r_m^2}\,c_{12}+\frac{3a_3r_{\min}}{r_m^2}\,c_{13}\right)=R2,\quad \omega_j c_{12}+\frac{2V_0}{\gamma}\left(-\frac{2a_3}{r_m^2}\,c_{22}+\frac{3a_3r_{\min}}{r_m^2}\,c_{23}\right)=0,\\
&-\omega_j c_{23}-\frac{6a_3V_0}{\gamma rm^2}\,c_{13}=R3,\quad \omega_j c_{13}-\frac{6a_3V_0}{\gamma rm^2}\,c_{23}=0.
\end{aligned} \tag{65}$$

Решая уравнения (65), находим

$$\begin{aligned}
c_{10}^{(j)}&=g_{101}^{(j)}R_1+g_{102}^{(j)}R_2+g_{103}^{(j)}R_3,\\
c_{20}^{(j)}&=g_{200}^{(j)}R_0+g_{201}^{(j)}R_1+g_{202}^{(j)}R_2+g_{203}^{(j)}R_3,
\end{aligned} \tag{66}$$

$$\begin{aligned}
&c_{11}^{(j)}=g_{111}^{(j)}R_1+g_{112}^{(j)}R_2+g_{113}^{(j)}R_3,\quad c_{21}^{(j)}=g_{211}^{(j)}R_1+g_{212}^{(j)}R_2+g_{213}^{(j)}R_3,\\
&c_{12}^{(j)}=g_{122}^{(j)}R_2+g_{123}^{(j)}R_3,\quad c_{22}^{(j)}=g_{222}^{(j)}R_2+g_{223}^{(j)}R_3,\quad c_{13}^{(j)}=g_{133}^{(j)}R_3,\quad c_{23}^{(j)}=g_{233}^{(j)}R_3,
\end{aligned}$$

где $g_{101}^{(j)}$, $g_{102}^{(j)}$, $g_{103}^{(j)}$, $g_{200}^{(j)}$, $g_{201}^{(j)}$, $g_{202}^{(j)}$, $g_{203}^{(j)}$, $g_{111}^{(j)}$, $g_{112}^{(j)}$, $g_{113}^{(j)}$, $g_{211}^{(j)}$, $g_{212}^{(j)}$, $g_{213}^{(j)}$, $g_{122}^{(j)}$, $g_{123}^{(j)}$, $g_{222}^{(j)}$, $g_{223}^{(j)}$, $g_{133}^{(j)}$ и $g_{233}^{(j)}$ — коэффициенты, определяемые при решении уравнений (65). Из-за громоздкости конкретные выражения для этих коэффициентов мы выписывать не будем.

Подставляя найденные значения $c_{10}^{(j)}$, $c_{20}^{(j)}$, $c_{11}^{(j)}$ и $c_{12}^{(j)}$ в (55), вычислим $w_{ji}(r,\epsilon t)$, откуда найдем

$$W_{ji}(n,\epsilon t) = \Big(c_{i0}^{(j)} + c_{i1}^{(j)}\phi(n) + c_{i2}^{(j)}\phi^2(n) + c_{i3}^{(j)}\phi^3(n)\Big)w_0(n), \tag{67}$$

где $\phi(n)$ определяется из графиков зависимости ϕ от n для разных значений параметра a (см. рис. 3).

Вычислим вероятность альфа-распада $w_1(n,t)$, которая, в соответствии с (48), выражается через функции $W_0(n,\epsilon t)$, $W_{j1}(n,\epsilon t)$ и $W_{j2}(n,\epsilon t)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} w_1(n,t) &= W_0(n,\epsilon t) + \sin\varphi\Big(W_{11}(n,\epsilon t)\cos(\omega_1 t - \psi) + W_{12}(n,\epsilon t)\sin(\omega_1 t - \psi)\Big) + \\ &+ \sin\alpha\Big(W_{21}(n,\epsilon t)\cos\omega_2 t + W_{22}(n,\epsilon t)\sin\omega_2 t\Big) + \frac{\sin\alpha\sin\varphi}{2}\Big(W_{31}(n,\epsilon t)\cos(\omega_3 t - \psi) + \\ &+ W_{32}(n,\epsilon t)\sin(\omega_3 t - \psi) + W_{41}(n,\epsilon t)\cos(\omega_4 t - \psi) + W_{42}(n,\epsilon t)\sin(\omega_4 t - \psi)\Big). \end{aligned} \tag{68}$$

Примеры зависимостей $w_1(n,t)$ от n при нескольких значениях t (a) и от t при нескольких значениях n (b) приведены на рис. 6. Рисунки построены при параметрах γ и a, равных 1000 и 2, соответственно.

В заключение заметим, что приведенные рисунки для скорости альфа-распада имеют тот же характер, как и для броуновского движения [4], что полностью соответствует утверждениям авторов [5, 7] об универсальности и синхронности случайных процессов, происходящих на Земле и подверженных влиянию космических факторов. Главное отличие состоит в том, что в зависимостях $w_1(n,t)$ суточный период в первом случае явно не виден, тогда как во втором случае он проявляется достаточно четко. Метод поиска сходных гистограмм позволил авторам экспериментальных работ [5, 7] выделить содержащиеся в них различные периоды. Можно было бы использовать и другой метод: анализировать исходные временные ряды, выделяя из шумов содержащиеся в них периодические составляющие. Если заранее знать периоды этих составляющих, то их можно выделить методом так называемого синхронного детектирования.

Список литературы

[1] Г.А. Гамов, УФН 10, 531 (1930).

[2] *Физическая энциклопедия*, под ред. А.М. Прохорова, 63—64 (1988).

[3] Л.С. Понтрягин, А.А. Андронов, А.А. Витт, ЖЭТФ 3, 165 (1933).

[4] Ланда П.С., Власов В.А., Изв. вузов, ПНД (в печати).

[5] С.Э. Шноль, *Космофизические факторы в случайных процессах*, Svenska Fisikarkivet (2009).

[6] Каминский А.В., Шноль С.Э. Влияние космофизических факторов на флуктуации скоростей броуновских частиц. Изв. вузов, ПНД (в печати).

[7] S.E. Shnoll, I.A. Rubinstein, Progress in Physics 2, 83 (2009).

[8] Jere H. Jenkins, Ephraim Fischbach, John B. Buncher at al. Astroparticle Physics 32, 42 (2009).

[9] П.С. Ланда, Радиотехника и Электроника 46, 1157 (2001).

[10] Р.Л. Стратонович, *Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике*, Сов. Радио, Москва (1961).

[11] И.С. Градштейн, И.М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Наука, Москва (1971).

[12] П.С. Ланда, Р.Л. Стратонович, Вестник МГУ, сер. III, № 1, 33 (1962).

[13] Е.Б. Дынкин, *Марковские процессы*, Физматгиз, Москва (1963).

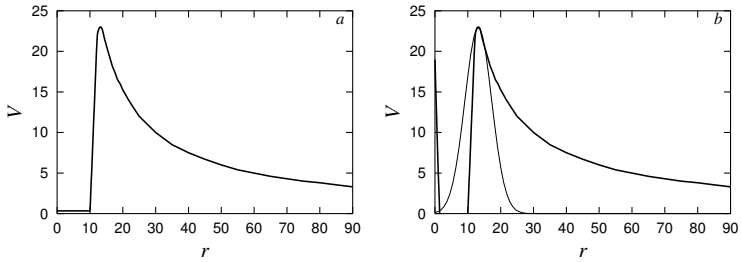


Рис. 1: a — Пример зависимости $V(r)$ для ядра ^{230}Th, взятый из [2]; b — та же зависимость при аппроксимации потенциала внутри потенциальной ямы в виде параболы, r — расстояние от центра ядра в Ферми-единицах.

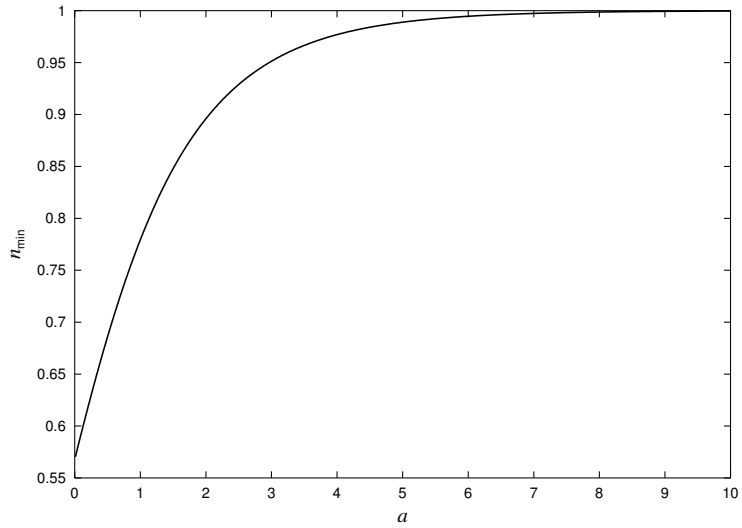


Рис. 2: Зависимость значений $n_{\min}$ от a.

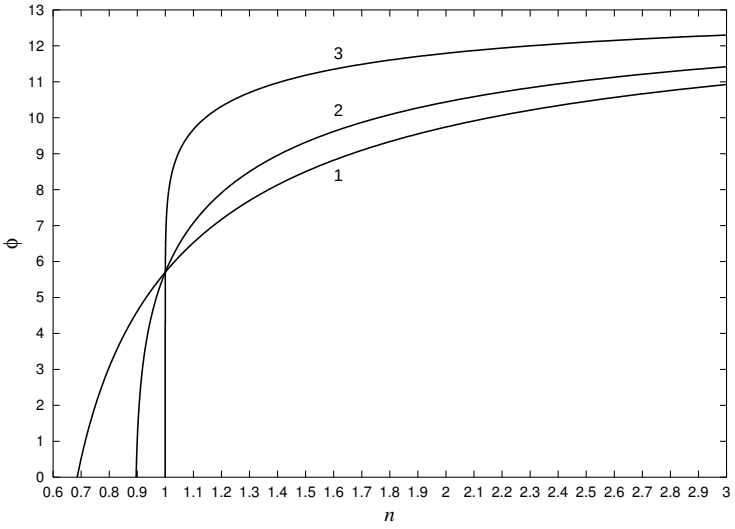


Рис. 3: Примеры зависимостей $\phi(n)$ для $a = 0.5$, $a = 2$ и $a = 5$ (кривые 1,2 и 3, соответственно).

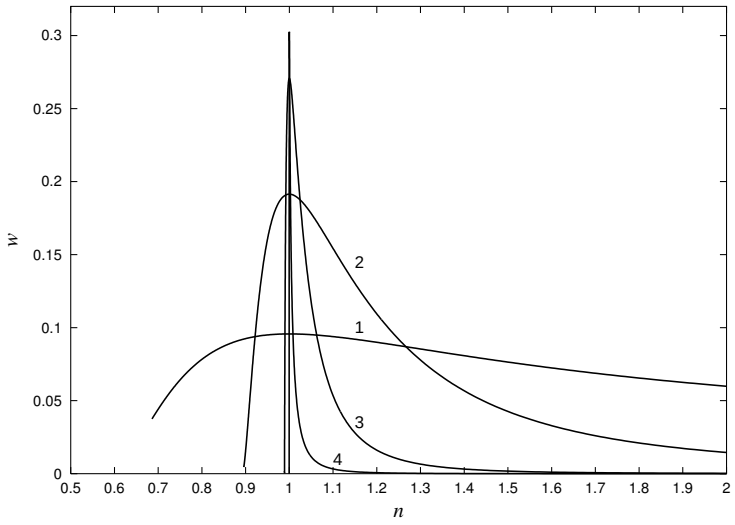


Рис. 4: Распределение средней скорости альфа-распада в случае отсутствия внешнего воздействия. Кривая 1 соответствует значению $a = 0.5$, 2 — $a = 2$, 3 — $a = 4$ и 4 — $a = 5$.

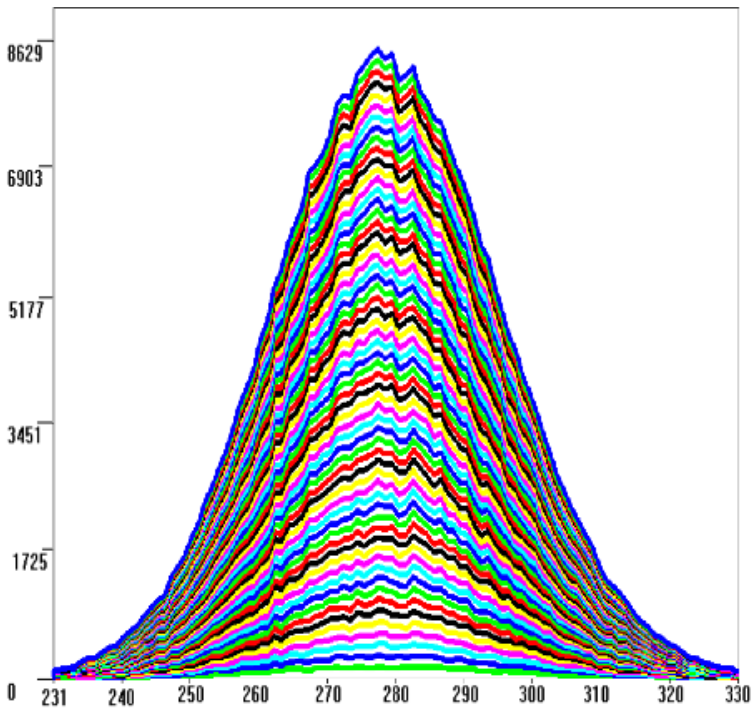


Рис. 5: Несглаженное распределение результатов 352980 измерений альфа-активности препарата ^{239}Pu за четверо суток. «Слоевые линии» проведены через каждые 6000 измерений. По оси абсцисс отложена скорость альфа-распада — число актов распада, зарегистрированных счетчиком за 1 сек.; по оси ординат — число измерений, соответствующее данной величине скорости.

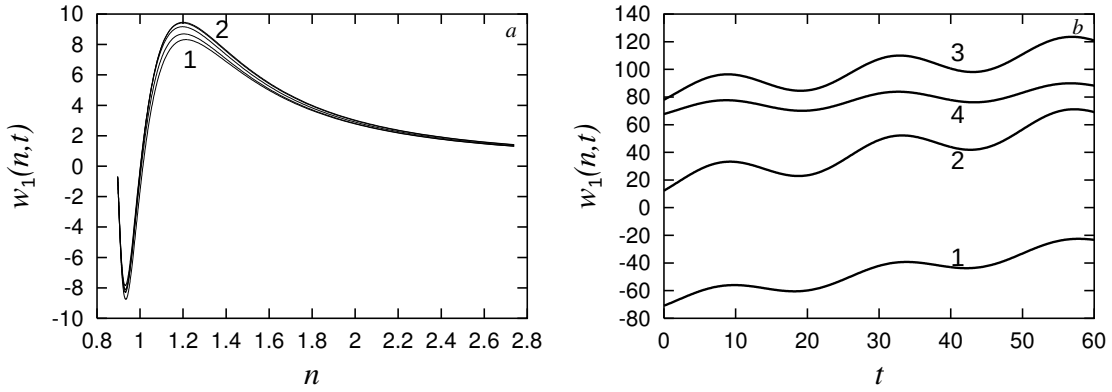


Рис. 6: Примеры зависимостей $w_1(n,t)$ от n при нескольких значениях t (a) и от t при при нескольких значениях n (b) для $\gamma = 1000$, $\alpha = 0.409$, $\psi = 0.52$, $\varphi = \pi/3$, $a = 4$. Кривые 1,2,3,4,5 на рис. (a) соответствуют $t = 0, 6, 12, 18, 24$ (показаны только кривые 1 и 2); на рис. (b) кривые 1,2,3,4 соответствуют $n = 0.967$, 1.015, 1.091, 1.2105.