УДК 531.01

# РЕЖИМЫ ДВИЖЕНИЯ КОЛЕСА

**© А.В. Костарев**

*Санкт - Петербургский государственный политехнический университет.*
*Санкт – Петербург, Россия*

***Аннотация.*** *Предложены способы экспериментального определения коэффициентов трения качения и сопротивления дороги. Учет сопротивления дороги позволяет исследовать режимы движения колеса, которые не могут быть описаны в рамках традиционной модели трения качения [1-5].*

***Ключевые слова***: *трение качения, сопротивление дороги, буксование, качение, юз.*

Как показано в работе [6], при качении колеса возникает не только момент трения качения, но и сила сопротивления дороги. Абсолютно твердое колесо не испытывает момента трения качения. Абсолютно твердая дорога не создает силы сопротивления. Для любой пары материалов можно составить две пары колесо – дорога, для каждой из которой могут быть экспериментально определены два коэффициента сопротивления: коэффициент трения качения $k$ и коэффициент сопротивления дороги $k_1$. Определить коэффициенты $k$ и $k_1$ можно с помощью, например, следующих двух экспериментов.

Изготавливается плита из материала дороги и цилиндр из материала колеса. Подбирается смазка, обеспечивающая минимальный коэффициент трения скольжения для выбранной пары материалов колеса и дороги. Измеряется радиус колеса $r$ и коэффициент трения скольжения $f$ между торцом цилиндра и плитой.

**А**. Для определения коэффициента трения качения $k$ неподвижная ось цилиндра нагружается силой P. Измеряется момент M, необходимый для равномерного вращения цилиндра. Коэффициент трения качения $k$ вычисляют из условия равновесия

$$M - Pk - Pfr = 0, \qquad k = \frac{1}{P}(M - Pfr) \qquad (1)$$

**В**. Для определения коэффициента сопротивления дороги $k_1$ вращение цилиндра блокируется. Измеряется усилие F, необходимое для равномерного поступательного движения цилиндра. Коэффициент сопротивления дороги $k_1$ вычисляется из условия равновесия.

$$F - \frac{Pk_1}{r} - Pf = 0, \qquad k_1 = (F - Pf)\frac{r}{P} \qquad (2)$$

Учет сопротивления дороги позволяет более полно описать режимы движения колеса. Рассмотрим колесную пару с параметрами: $r$ - радиус колес пары, $m$ - масса (например, автомобиля или поезда), приведенная к оси пары, $J$ - момент инерции пары относительно ее оси.

Нагрузка на колесную пару в общем случае состоит из вертикальной силы $\boldsymbol{P}$, горизонтальной силы $\boldsymbol{F}$ и вращательного момента $M$ (Рис.1). Считаем, что коэффициенты трения скольжения $f$, трения качения $k$ и сопротивления дороги $k_1$ определены опытным путем.

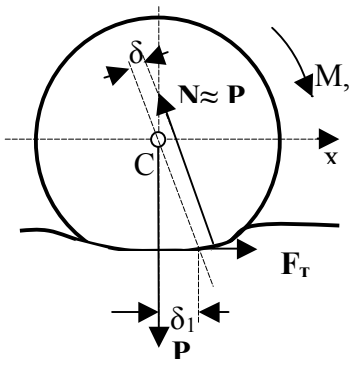



**Рис. 1**

Исследуем режимы движения колесной пары, пользуясь дифференциальными уравнениями, полученными в [1]:

$$m\ddot{x} = F_x + F_{трx} - P\frac{\delta_{1x}}{r}, \qquad J\ddot{\psi} = M_\psi - P\delta_x - rF_{трx}$$

$$F_{тр} \le fP, \qquad \delta \le k, \qquad \delta_1 \le k_1 \qquad \textbf{(3)}$$

**1. Покой.**

1.1. Условия: $\dot{x} \equiv 0, \quad \dot{\psi} \equiv 0,$ примем $\delta k_1 = k\delta_1$

1.2. Уравнения покоя

$$0 = F_x + F_{трx} - P\frac{\delta_{1x}}{r}, \qquad 0 = M_\psi - P\delta_x - rF_{трx}$$

Определяем силу трения $F_{трx}$ и смещения $\delta_x$ , $\delta_{1x}$

$$F_{трx} = P\frac{\delta_{1x}}{r} - F_x = \frac{k_1 M_\psi - krF_x}{r(k+k_1)}, \qquad \delta_x = \frac{k}{P}\frac{M_\psi + rF_x}{k+k_1}, \qquad \delta_{1x} = \frac{k_1}{P}\frac{M_\psi + rF_x}{k+k_1}$$

1.3. Сила трения $F_{тр}$ обращается в ноль при $k_1 M_\psi = krF_x$, а также, как и следовало ожидать, для ведущего колеса ($F$ = 0) на твердой дороге ($k_1 = 0$) (Рис.2) и ведомого ($M$ =0) твердого ($k$ =0) колеса (Рис.3).

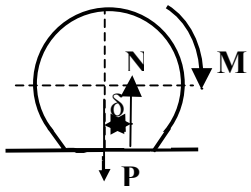



**Рис. 2**

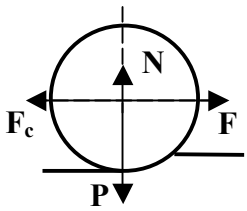



**Рис. 3**

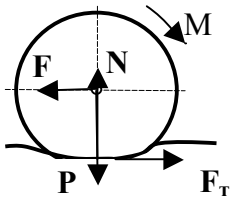



**Рис.4**

1.4. Скольжение начинается при $F_{трx} = \pm Pf$, **или при**

$$k_1 M_\psi - krF_x = \mp r(k+k_1)Pf$$

1.5. Смещения $\delta_x$ , $\delta_{1x}$ **обращаются в ноль при** $M_\psi + rF_x = 0$,

когда деформация дороги и колеса симметрична относительно центральной вертикали и сопротивление отсутствует (Рис. 4)

$$\delta_x = \delta_{1x} = 0 \qquad F_{\text{тр}x} = -F_x$$

**2. Буксование на месте.**

Этот практически важный режим невозможен в традиционной модели трения качения.

2.1 . Условия: $\dot{x} = 0, \quad \dot{\psi} > 0, \quad F_{\text{тр}x} = Pf, \quad \delta_x = k, \quad \delta_{x1} \leq k_1$

2.2 . Уравнения движения

$$0 = F_x + P(f - \frac{\delta_{1x}}{r}), \qquad J\ddot{\psi} = M_\psi - P(k + rf)$$

2.3 . Определяем ускорение $\ddot{\psi}$ и смещение $\delta_{1x}$

$$\delta_{1x} = r\left(f + \frac{F_x}{P}\right) \leq k_1$$

2.4 . Из условия $\delta_{x1} \leq k_1$ находим ограничение на нагрузку или коэффициент трения скольжения для поддержания режима.

$$F_x \leq P\left(\frac{k_1}{r} - f\right)$$

2.5 . Вращение будет равномерным при

$$M_\psi = P(k + rf)$$

2.6 . Центр колеса начинает движение и колесо переходит в режим качения с буксованием при

$$F_x \geq P\left(\frac{k_1}{r} - f\right)$$

**3. Движение с пробуксовкой (разгон).**

3.1 . Условия: $r\dot{\psi} > \dot{x} > 0, \quad F_{\text{тр}x} = Pf, \quad \delta_x = k, \quad \delta_{x1} = k_1$

3.2 . Уравнения движения

$$m\ddot{x} = F_x + P\left(f - \frac{k_1}{r}\right), \qquad J\ddot{\psi} = M_\psi - P(k + rf)$$

3.3 . Равномерное движение при

$$F_x = P\left(\frac{k_1}{r} - f\right), \quad M_\psi = P(k + rf)$$

3.4 . Режим со временем перейдет к чистому качению при $\ddot{x} > r\ddot{\psi}$

$$JF_x - mrM_\psi > P\left[J\left(\frac{k_1}{r} - f\right) - mr^2\left(\frac{k}{r} + f\right)\right]$$

**4. Чистое качение.**

4.1 . Условия: $\dot{x} \equiv r\dot{\psi} > 0, \ \delta_x = k, \ \delta_{1x} = k_1, \ F_{\text{тр}} \leq fP$

4.2 . Уравнения движения:

$$m\ddot{x} = F_x + F_{\text{тр}x} - P\frac{k_1}{r}, \qquad J\ddot{\psi} = M_\psi - Pk - rF_{\text{тр}x}$$

4.3 . Определяем силу трения $F_{\text{тр}x}$ и ускорение $\ddot{\psi}$

$$F_{\text{тр}x} = \frac{1}{rJ_P}\left[M_\psi mr^2 + P(k_1 J - kmr^2) - JrF_x\right] \leq Pf \qquad J_P = J + mr^2$$

$$\ddot{\psi} = \frac{1}{J_P}\left[M_\psi + rF_x - P(k + k_1)\right]$$

4.4 . Проекция силы трения $F_{трх}$ меняет свой знак при $M_\psi mr^2 - JrF_x = P(kmr^2 - k_1 J)$

4.5 . Буксование начнется при $F_{трх} = Pf$, или $M_\psi mr^2 - JrF_x = P(kmr^2 - k_1 J + J_p rf)$

4.6 . Юз начнется при $F_{трх} = -Pf$ или $M_\psi mr^2 - JrF_x = P(kmr^2 - k_1 J - J_p rf)$

4.7 . Колесо будет катиться равномерно при $M_\psi + rF_x = P(k + k_1)$

**5. Движение с юзом (торможение).**

5.1 Условия: $\dot{x} > r\dot{\psi} > 0, \quad F_{трх} = -Pf, \quad \delta_x = k, \ \delta_{x1} = k_1$

5.2 Уравнения движения:

$$m\ddot{x} = F_x - P\left(f + \frac{k_1}{r}\right), \qquad J\ddot{\psi} = M_\psi + P(rf - k)$$

5.3 Вращение со временем прекратиться и колесо перейдет в режим юза без вращения при $\ddot{\psi} < 0$

$$M_\psi < P(k - rf)$$

**6. Юз без вращения.**

6.1 Условия: $\dot{x} > 0, \quad \dot{\psi} \equiv 0, \quad \delta_x \le k, \quad \delta_{1x} = k_1, \quad F_{трх} = -fP$

6.2 Уравнения движения:

$$m\ddot{x} = F_x - P\left(f + \frac{k_1}{r}\right), \qquad 0 = M_\psi + P(rf - \delta_x)$$

6.3 Определяем смещение $\delta_x$ и ускорение $\ddot{x}$

$$\delta_x = \frac{M_\psi}{P} + rf \le k$$

6.4 Смещение $\delta_x$ обращается в ноль при $M_\psi = -Prf$

6.5 Вращение колеса начинается при $\delta_x = k$, или $M_\psi = P(k - rf)$

6.6 Колесо будет двигаться поступательно и равномерно при

$$F_x = P\left(f + \frac{k_1}{r}\right)$$

7. **Юз с обратным вращением.**

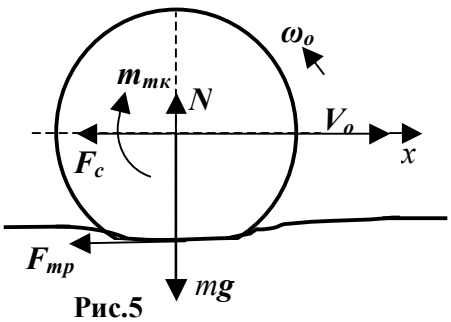



**Рис.5**

Обруч радиуса r бросают вдоль дороги с начальной скоростью центра $V_0$, придав ему обратное вращение со скоростью $\omega_0$. Коэффициент трения $f$, коэффициенты сопротивления $k$ и $k_1$.

Найти угловую скорость $\omega_0$, при которой движение центра и вращение обруча прекратятся одновременно. Найти когда и где это произойдет.

Решение:

При движении обруча сила трения $F_{тр}$, момент трения качения $m_{тк}$ и сила сопротивления не изменяются по модулю

$$F_{тр} = mgf, \qquad m_{тк} = mgk, \qquad F_c = mg\frac{k_1}{r} \qquad (4)$$

Уравнения движения обруча

$$m\ddot{x} = -F_{тр} - F_c = -mg\left(f + \frac{k_1}{r}\right) \qquad (5)$$

$$0 = N - mg \qquad (6)$$

$$mr^2\ddot{\varphi} = rF_{тр} + m_{тк} = mg(fr + k) \qquad (7)$$

Интегрируя уравнения при начальных условиях $\dot{x}_0 = V_0$, $\dot{\varphi}_0 = -\omega_0$, находим

$$\dot{x} = V_0 - g\left(f + \frac{k_1}{r}\right)t \qquad (8)$$

$$r\dot{\varphi} = g\left(f + \frac{k}{r}\right)t - r\omega_0 \qquad (9)$$

В момент времени

$$t_1 = \frac{rV_0}{g(rf + k_1)} \qquad (10)$$

центр обруча останавливается. Чтобы одновременно прекратилось и его вращение, нужно чтобы модуль начальной угловой скорости был равен

$$\omega_0 = \frac{rf + k}{rf + k_1}\frac{V_0}{r} \qquad (11)$$

К этому моменту центр обруча пройдет путь:

$$x_1 = \frac{rV_0^2}{2g(rf + k_1)} \qquad (12)$$

Заметим, что при отсутствии трения скольжения обруч все же остановится на расстоянии

$$x_1 = \frac{rV_0^2}{2gk_1} \qquad (13)$$

что в традиционной модели трения качения невозможно.

**8. Увеличение силы тяги локомотива.**

Рассмотрим колесную пару локомотива, на которую действуют: нагрузка на ось ***P,*** нормальная реакция **N,** вращательный момент *M* со стороны двигателя, приведенная сила *F* со стороны состава, сила сопротивления $\boldsymbol{F_c}$ со стороны рельсов, момент трения качения $m_{тк}$ , ведущая сила трения $\boldsymbol{F_{тр.}}$

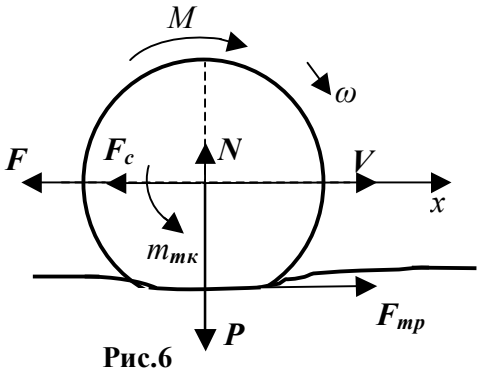



**Рис.6**

Найдем при каких условиях локомотив создаст максимальную силу тяги *F*, действующую на состав в момент начала буксования ($\boldsymbol{F_{тр} = Pf}$) при равномерном движении состава.

Уравнения равномерного движения колесной пары:

$$0 = Pf - F - P\frac{k_1}{r}, \quad 0 = M - Pk - rfP, \quad N = P \quad (14)$$

Очевидно, что момент сопротивления качению пары $\boldsymbol{Pk + rfP}$ без проблем преодолевается моментом *M* двигателя локомотива, который машинист должен поддерживать на уровне:

$$M = P(k + rf) \qquad \textbf{(15)}$$

Поэтому колеса локомотива могут быть изготовлены из материала с относительно большим коэффициентом $\boldsymbol{k}$. Увеличение коэффициентов $\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{k_1}$ увеличивает площадь контакта и улучшает сцепление колеса с рельсом.

Увеличение силы тяги *F* локомотива

$$F = P\left(f - \frac{k_1}{r}\right) \qquad \textbf{(16)}$$

достигается повышением твердости рельсов, то есть уменьшением коэффициента их сопротивления $\boldsymbol{k_1}$.

**Литература**

1. Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики, т.1. –М.: Наука, 1982. –352с.
2. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики. – СПб: Лань, 1998. – 729с.
3. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. – М.: Высшая школа, 2003, – 719с.

4. Курс теоретической механики. // Под ред. Колесникова К.С. – М.: МГТУ, 2000. – 735с.
5. Яблонский А.А. Курс теоретической механики. Ч.II.–М.: Высшая школа, 1971.–488 с.
6. Костарев А.В. Вестник научно-технического развития. № 2 (30), 2010. Стр.40-43.

*Поступила: 14.03.10.*