УДК 531.01

СОПРОТИВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЮ КОЛЕСА

© А.В. Костарев

Санкт - Петербургский государственный политехнический университет.
Санкт-Петербург, Россия

Аннотация. *Рассмотрена общая модель сопротивления движению деформируемого колеса по деформируемой опорной поверхности. Показано, что сопротивление приводится не только к моменту, но и к силе. Установлено, что традиционная модель трения качения описывает только сопротивление качению деформируемого колеса по абсолютно твердой опорной поверхности.*

Ключевые слова: *момент трения качения, сила сопротивления дороги.*

На деформируемое колесо со стороны деформируемой опорной поверхности (дороги) (Рис.1) действуют нормальные и касательные распределенные реакции. Касательные

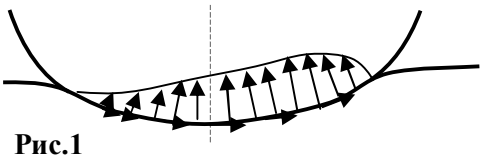


Рис.1

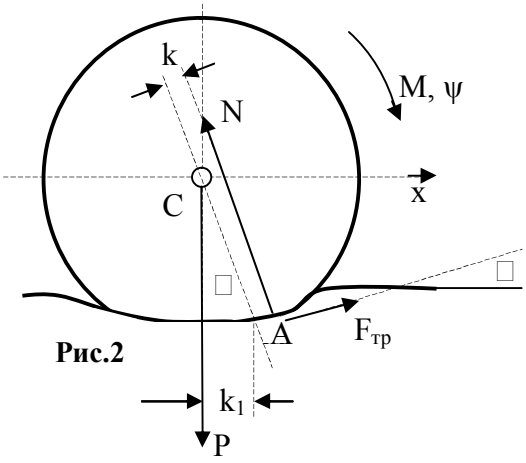


Рис.2

реакции являются силами трения.

Системы нормальных реакций и сил трения являются плоскими, а значит, имеют равнодействующие N и $F_{тр}$ соответственно (Рис.3). Линия действия равнодействующей сил трения $F_{тр}$ проходит несколько ниже линии контакта и наклонена к дороге под малым углом, который при начале движения центра колеса принимает максимальное значение □.

Ввиду односторонности связи, линия действия нормальной реакции N пересекает линию контакта в некоторой точке А, смещенной в сторону, обусловленную действием нагрузки. Линия действия реакции N наклонена против действия нагрузки под малым углом, который при начале движения центра колеса принимает максимальное значение α. Расстояние $k_1 = r\,\alpha$ назовем *коэффициентом сопротивления дороги.* Ввиду малости углов α и □ положим $\beta = \alpha$.

Линия действия реакции N в общем случае смещена относительно центра колеса так, что ее момент препятствует вращению колеса, обусловленному нагрузкой. При начале вращения колеса смещение достигает предельного значения k, которое называется *коэффициентом трения качения*.

В осях (x, y) уравнения движения колеса радиуса r, массы m, и момента инерции J под действием нагрузки на ось ***P***, силы ***F*** и момента M имеют вид:

$$m\ddot{x} = F + F_{mp}Cos\alpha - NSin\alpha \quad (1)$$
$$0 = NCos\alpha - P + F_{mp}Sin\alpha \quad (2)$$
$$J\ddot{\psi} = M - rF_{mp} - Nk \quad (3)$$

Рассмотрим чистое качение колеса:

$$\ddot{x} = r\ddot{\psi} \quad (4)$$

Из уравнения (2):

$$N = \frac{(P - F_{mp}Sin\alpha)}{Cos\alpha}$$

Из уравнений (1,3,4) находим силу трения F_{mp} и ускорение $\ddot{x}$

$$F_{mp} = \frac{Mmr - FJ + P\left(JTg\alpha - \frac{mrk}{Cos\alpha}\right)}{mr(r - kTg\alpha) + J(Cos\alpha + SinaTg\alpha)} \qquad m\ddot{x} = F + F_{mp}(Cos\alpha + SinaTg\alpha) - PTg\alpha$$

Полагая что $\alpha \ll 1$ и

$$Cos\,\alpha \approx 1,\ Sin\,\alpha \approx Tg\,\alpha \approx \alpha \approx \frac{k_1}{r}$$

находим:

$$F_{mp} \approx \frac{Mmr - FJ + P(J\frac{k_1}{r} - mrk)}{mr\left(r - \frac{kk_1}{r}\right) + J[1 + \left(\frac{k_1}{r}\right)^2]} \qquad m\ddot{x} = F + F_{mp}\left[1 + \left(\frac{k_1}{r}\right)^2\right] - P\frac{k_1}{r}$$

Положив, что k и k_1 величины одного порядка малости,

$$k, k_1 \ll r$$

введя обозначение

$$J_A = J + mr^2$$

и отбросив малые величины, получим приближенный результат:

$$F_{mp} \approx \frac{1}{rJ_A}[Mmr^2 - FrJ + P(Jk_1 - mr^2k)] \qquad \ddot{x} = \frac{r}{J_A}[M + Fr - P(k + k_1)] \quad (5)$$

Составим теперь приближенные уравнения движения колеса. Приведем силу N к центру колеса С (Рис.3). В центре получим момент трения качения с модулем

$$M_{тк} = Nk$$

и силу N с составляющими:

$$N = N_x + N_y \qquad N_y = NCos\alpha = P - F_{mp}Sin\alpha \approx P$$

Касательную составляющую N_x естественно назвать *силой сопротивления дороги*

$$F_c \equiv N_x = NSin\alpha \approx P\frac{k_1}{r}$$

Ввиду малости угла α силу трения F_{mp} направим горизонтально. Тогда приближенные уравнения движения колеса приобретают вид.

$$m\ddot{x} = F + F_{mp} - P\frac{k_1}{r} \qquad J\ddot{\psi} = M - Pk - rF_{mp} \quad (6)$$

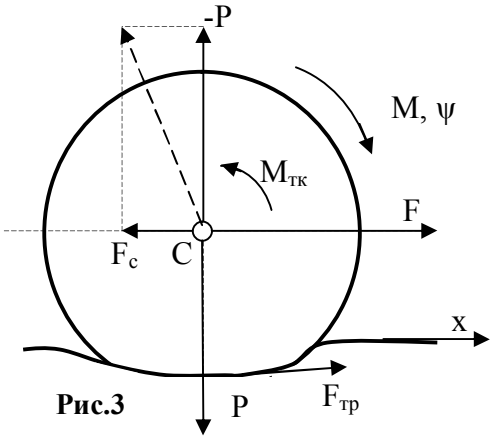


Рис.3

А.В. Костарев

При чистом качении $\ddot{x} = r\ddot{\psi}$ получаем тот же результат (5), что и из точных уравнений после учета малых. Отсюда следует, что задачи о движении колеса по горизонтальной дороге можно решать на основе приближенных уравнений (6).

Электронный справочник DPVA [11] приводит следующие коэффициенты трения качения в см:

Деревянное колесо по дереву	0,05-0,08
Стальное колесо по дереву	0,15-0,25
Деревянное колесо по стали	0,03-0,04

Табл.1

Таблица показывает, что для пары материалов разной твердости, например дерево-сталь, коэффициент сопротивления деформируемой дороги качению твердого колеса значительно превосходит коэффициент трения качения деформируемого колеса по твердой дороге. Это подтверждает различную природу сопротивлений.

Понять какое именно сопротивление характеризуют момент трения качения $M_{тк}$ и сила сопротивления F_c легче, если рассмотреть два предельных случая, когда одно из контактирующих тел является абсолютно твердым.

Абсолютно твердая дорога. В этом случае коэффициент сопротивления дороги $k_1 = 0$, нормальная реакция $N=P$, вертикальна и смещена на коэффициент трения качения k . В центре колеса С реакция N приводится к силе $-\boldsymbol{P}$ и моменту трения качения $M_{тк}$ (Рис.4). Таким образом, коэффициент трения качения k характеризует сопротивление вращению колеса, которое не зависит от движения центра колеса.

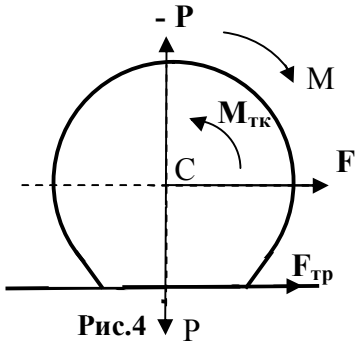


Рис.4

Именно этот случай рассматривается в традиционной модели трения качения [1, с. 78-79], [2, с. 89-90], [3, с. 252-253], [4, с.238], [5, с. 201], [6, с.103], [7, с.185], [8, с.255], [9, с. 98-99], [10]. К сожалению, в большинстве источников модель снабжена неверным рисунком вида Рис.5

Сочетание Рис.5 с моделью момента трения качения приводит к парадоксам при *малой* силе трения скольжения $F_{тр}<<1$. Центр *ведущего колеса* ($\boldsymbol{F} = 0$) вынужден двигаться под действием сколь угодно малой силы $\boldsymbol{F_{тр}}$, преодолевая сопротивление дороги.

Ведомое колесо ($M = 0$) вынужденно вращаться в обратную сторону под действием силы $\boldsymbol{N}$.

Свободно пущенное вдоль абсолютно гладкой дороги колесо (M, F, f = 0) не может остановиться, несмотря на сопротивление опорной поверхности.

Причина парадоксов в некорректном приведении контактных сил на Рис.5.

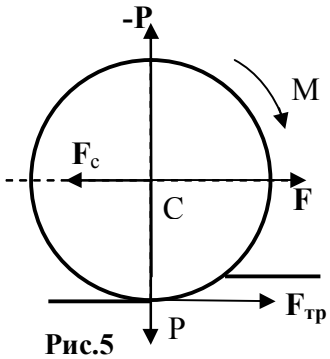


Рис.5

Абсолютно твердое колесо. В этом случае коэффициент трения качения k = 0, реакция $\boldsymbol{N}$ проходит через центр колеса (Рис.2) и вызывает силу сопротивления $\boldsymbol{F_c}$ (Рис 5). Таким образом, коэффициент сопротивления дороги k_1 характеризует сопротивление поступательному перемещению колеса, которое не зависит от вращения колеса.

Выводы.

1. Для любой пары материалов существует два коэффициента сопротивления: коэффициент трения качения k, характеризующий момент сопротивления, и коэффициент сопротивления дороги k_1 , характеризующий силу сопротивления.
2. Таблицы коэффициентов трения качения следует пересмотреть, экпериментально определив коэффициенты k и k_1.
3. В курсах теоретической механики традиционную модель трения качения следует сопровождать рисунком Рис.4 b и дополнить моделью сопротивления дороги.

Литература

1. Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики, т.1. ─М.: Наука, 1982. ─352с.
2. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики. ─ СПб: Лань, 1998. ─ 729с.
3. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. ─ М.: Высшая школа, 2003, ─ 719с.
4. Курс теоретической механики. // Под ред. Колесникова К.С. ─ М.: МГТУ, 2000. ─ 735с.
5. Яблонский А.А. Курс теоретической механики. Ч.II.─М.: Высшая школа, 1971.─488 с.
6. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. ─ М.: Наука, 1967. ─ 478с.
7. Гернет М.М. Курс теоретической механики. ─ М.: Высшая школа.1987. ─ 344 с.
8. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах, т.2. ─ М.: Наука, 1966. ─ 663с.
9. Машиностроение. Энциклопедия. Динамика и прочность машин. Теория механизмов и машин. Т. I-3// Под ред. Колесникова К.С. 1994. ─ 534с.
10. Illinois Institute of Technology Coaching: Rolling Friction. URL: http://www.youtube.com/watch?v=9lO-AIcq0yI ─ (дата обращения: 24.12.2009).
11. Электронный справочник DPVA. URL: http://www.dpva.info/Guide/GuidePhysics/Frication/FrictionOfRolling/ ─ (дата обращения: 14.12.2009).

Потупила: 11.01.2010.