СОПОСТАВИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ УСТАЛОСТНОЙ ТРЕЩИНЫ

© В.И. Бересневич

Рижский технический университет, Латвия, Рига

Аннотация: *Ранее для учета влияния трещины на упругую податливость стержня использовано понятие эквивалентного упругого шарнира. На основе применения данной модели предложена методика расчета на прочность и жесткость стержневых систем с трещинами методом конечных элементов.*

Ключевые слова: *усталостная трещина, методы дефектоскопии, математическая модель трещины.*

Усталостная трещина является одним из наиболее распространенных видов повреждений, возникающих в процессе эксплуатации машиностроительных и транспортных конструкций (например, авиационных). Поэтому при разработке процедур вибродиагностики весьма важное значение имеет выбор математической модели трещины.

До середины прошлого века для поиска трещин и других повреждений элементов конструкций широко применялись оптико-визуальные методы контроля [2, 4]. Однако данные методы применимы лишь для обнаружения относительно больших повреждений, достигших критических размеров и потому визуально видимых со стороны наружной части изделия (например, обшивки летательного аппарата). В то же время повреждения и даже полные разрушения силовых элементов, расположенных под обшивкой, не поддаются обнаружению оптико-визуальными методами из-за отсутствия доступа к зоне контроля. Отмеченных недостатков не имеют вибрационные методы дефектоскопии [4, 12], для теоретической отработки которых необходимо применение математической модели трещины.

В простейшем случае усталостная трещина моделируется в виде локального снижения жесткости соответствующего сечения контролируемого элемента [3, 6]. На натурном объекте локальное снижение жесткости может быть реализовано, например, в виде разреза. Моделирование трещины разрезом, принятое в механике разрушения [8], позволяет решить ряд весьма важных задач: определить напряженно-деформированное состояние в окрестности образовавшейся трещины, оценить степень концентрации напряжений у ее вершины и на этой основе спрогнозировать кинетику дальнейшего роста повреждения при заданном циклическом нагружении элемента конструкции. Таким образом, методы анализа, используемые в механике разрушения, преимущественно направлены не на обнаружение (диагностику) трещин, а на оценку усталостной долговечности поврежденной конструкции. В частности, согласно широко распространенной методике П. Париса [7], долговечность конструкции определяется на основе расчета скорости роста трещины с учетом интенсивности динамических напряжений у ее вершины.

При разработке методов и средств вибродиагностики также весьма важно знать, насколько существенно может увеличиться длина трещины за время проведения тестовых вибрационных испытаний. Как показывает анализ работ [1, 9, 10], в установившемся режиме динамического нагружения (при $\sigma < \sigma_{-1}$, где σ_{-1} – предел выносливости материала), пока длина трещины l меньше ее критического (разрушающего) значения l_c для данного элемента,

прирост длины трещины Δl за один цикл нагружения относительно невелик (не превышает 0,0008 – 0,0012% от l_c) и поэтому им можно пренебречь. Если же максимальное напряжение цикла σ_{max} приближается или даже превышает σ_{-1}, то происходит ускоренный рост трещины, что конечно же следует учитывать при выборе параметров тестового гармонического воздействия.

Вместе с тем возможности применения модели трещины в виде разреза для разработки методов и средств вибродиагностики весьма ограничены из-за неполного отображения данной моделью физических процессов, происходящих при динамическом нагружении трещины. При моделировании трещины разрезом, в частности, не учитывается, что при возникновении в зоне трещины периодически повторяющихся сжимающих и растягивающих напряжений (например, за счет воздействия на конструкцию внешней тестовой гармонической силой) «берега» трещины начинают периодически смыкаться – размыкаться. Вследствие этого соответствующим образом изменяется жесткость поврежденного сечения и характер генерируемых в системе колебаний. Отмеченные недостатки модели трещины «разрез» в конечном счете отрицательно сказываются на эффективности разрабатываемых на ее основе методов вибродиагностики (различные варианты частотно-резонансного и диссипативного подходов), которые характеризуются высокой трудоемкостью и чрезвычайно низкой чувствительностью [3, 6].

В работе [24] для учета влияния трещины на упругую податливость стержня использовано понятие эквивалентного упругого шарнира. На основе применения данной модели предложена методика расчета на прочность и жесткость стержневых систем с трещинами методом конечных элементов.

Учет динамических эффектов, возникающих вследствие периодических схлопываний «берегов» усталостной трещины под действием тестовой гармонической силы, приводит к **кусочно-линейной модели** повреждения, впервые предложенной С. Цыфанским и его учениками [13, 14].

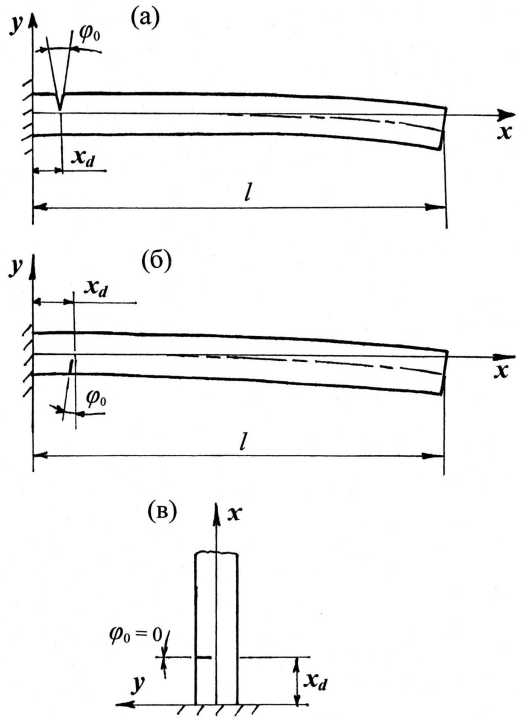


Рис. 1. Различные варианты взаимного расположения «берегов» поперечной усталостной трещины в стержне: (а) «берега» трещины предварительно разомкнуты; (б) «берега» трещины предварительно плотно сомкнуты; (в) «берега» трещины не оказывают друг на друга предварительного силового воздействия.

В дальнейшем кусочно-линейная модель трещины уточнялась и получила достаточно широкое применение при отработке процедур вибродиагностики [19, 22, 28, 30]. Сущность данной модели проиллюстрируем на примере стержня с трещиной, совершающего изгибные колебания.

На рис. 1 показаны различные варианты взаимного расположения «берегов» усталостной трещины при изгибе горизонтального консольно закрепленного стержня (плоскость трещины во всех случаях ориентирована перпендикулярно продольной оси недеформированного стержня). Если трещина расположена сверху, то под действием собственного веса стержня ее «берега» будут предварительно разомкнуты (см. рис. 1,а). Изгибная жесткость поврежденного сечения EI_d в этом случае будет меньше жесткости EI_0 целого сечения. В свою очередь, если трещина расположена снизу, то ее «берега» изначально будут плотно сомкнуты (см. рис. 1, б), а изгибная жесткость дефектного сечения EI_d совпадет с жесткостью EI_0 неповрежденного стержня. В отдельных случаях (диагностируемый стержень установлен вертикально; собственный вес стержня пренебрежимо мал) возможен и промежуточный вариант, когда в зоне трещины отсутствуют предварительные сжимающие или растягивающие напряжения (см. рис. 1, в). «Берега» трещины в этом случае хоть и сомкнуты, но не оказывают друг на друга взаимного силового воздействия.

Взаимодействие «берегов» усталостной трещины при динамическом нагружении, как показано в [5], является «хрупким» (даже в случае применения материалов, при статическом нагружении разрушающихся вязко). Поэтому деформациями «берегов» периодически смыкающейся – размыкающейся трещины можно пренебречь, представив ее математическую модель в виде кусочно-линейной (билинейной) зависимости изгибающего момента M от угла поворота дефектного сечения $\varphi = \partial y / \partial x$. Причем, в зависимости от месторасположения трещины и ее предварительного напряженного состояния, упругая характеристика $M = f(\varphi)$ дефектной зоны может быть жесткой (см. рис. 2, а; трещина расположена сверху), мягкой (см. рис. 2, б; трещина расположена снизу) или иметь излом в начале координат (см. рис. 2, в; трещина предварительно не нагружена).

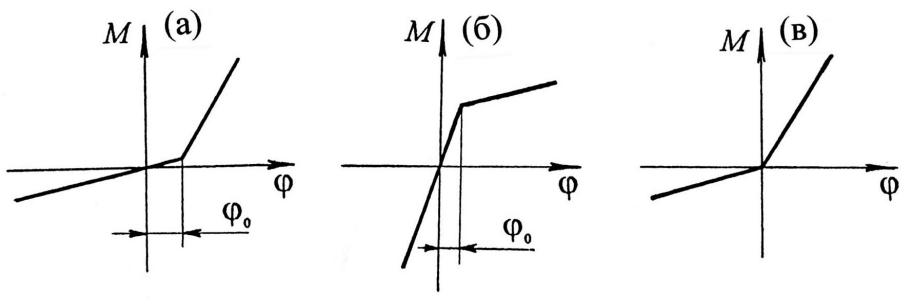


Рис. 2. Различные варианты упругой характеристики дефектного сечения при изгибе стержня: (а) трещина предварительно раскрыта; (б) трещина предварительно сжата; (в) трещина предварительно не нагружена

Для математического описания периодического процесса смыкания и размыкания

«берегов» трещины при изгибных колебаниях стержня применяют параметр трещины q [19, 22, 28]. Параметр q является ступенчатой функцией, описывающей взаимосвязь между относительной изгибной жесткостью поврежденного сечения и углом поворота $\varphi = \partial y / \partial x$. Математическая запись этой функции зависит от расположения усталостной трещины (сверху или снизу по отношению к продольной оси стержня) и ее предварительного напряженного состояния.

В случае, если трещина расположена сверху, то ее упругая характеристика является жесткой (см. рис. 2, а), а параметр трещины q описывается выражением:

$$q = \begin{Bmatrix} 0, \dfrac{\partial y}{\partial x} > \varphi_0 \\ q_c, \dfrac{\partial y}{\partial x} \le \varphi_0 \end{Bmatrix}, \quad (1)$$

где $q_c = (1 - I_d / I_0)$ – мера относительной величины трещины; I_d – момент инерции дефектного сечения; I_0 – момент инерции целого неповрежденного сечения; φ_0 – пороговое значение угла поворота сечения, соответствующее моменту смыкания (размыкания) «берегов» трещины.

Если же трещина расположена снизу, то ее упругая характеристика является мягкой (см. рис. 2, б), а параметр трещины q описывается выражением

$$q = \begin{Bmatrix} 0, \dfrac{\partial y}{\partial x} \le \varphi_0 \\ q_c, \dfrac{\partial y}{\partial x} > \varphi_0 \end{Bmatrix}. \quad (2)$$

В тех случаях, когда в зоне трещины отсутствуют предварительные сжимающие или растягивающие напряжения, упругая характеристика дефектного сечения имеет излом в начале координат (см. рис. 2, в). Параметр трещины q при этом описывается выражением

$$q = \begin{Bmatrix} 0, \dfrac{\partial y}{\partial x} > 0 \\ q_c, \dfrac{\partial y}{\partial x} \le 0 \end{Bmatrix}. \quad (3)$$

Используя параметр трещины q, изменение изгибной жесткости дефектного сечения можно описать универсальным кусочно-линейным уравнением

$$EI(x = x_d) = EI_0[1 - q \cdot \delta(x - x_d)], \quad (4)$$

где x_d – координата сечения стержня с трещиной; $\delta(x - x_d)$ – дельта-функция Дирака.

Более точное и подробное отображение физических процессов, происходящих в зоне трещины при динамическом нагружении стержня, обеспечивает **конечно-элементная модель трещины** [15, 16, 18, 20, 21, 23, 25, 26]. На рис. 3 в качестве примера показана конечно-элементная модель консольной балки с трещиной, совершающей изгибные колебания под действием тестовой гармонической силы (модель В. Остаховича [23]).

Принципиальные отличия между конечно-элементной и кусочно-линейной моделями

трещины заключаются в следующем.

1) Конечно-элементная модель рассматривает смыкание и размыкание «берегов» усталостной трещины как плавный процесс постепенного изменения изгибной жесткости в зоне трещины. В то же время, согласно рассмотренной выше кусочно-линейной модели, жесткость дефектного сечения при смыкании-размыкании «берегов» трещины изменяется мгновенно на конечную величину. Из этого следует, что при использовании кусочно-линейной модели трещины возникающие в системе нелинейные эффекты будут выражены немного более сильно. Однако различие в результатах становится заметным при относительно больших трещинах, занимающих более половины площади поперечного сечения стержня.
2) Кусочно-линейная модель учитывает только продольные деформации в зоне трещины, возникающие при изгибных колебаниях стержня. В отличие от этого, конечно-элементная модель более сложна и позволяет учесть не только продольные, но и поперечные сдвиговые деформации, а также действие сил сухого трения при взаимном проскальзывании «берегов» трещины. Поэтому конечно-элементная модель позволяет более точно отобразить распределение напряжений в зоне трещины при динамическом нагружении стержня.

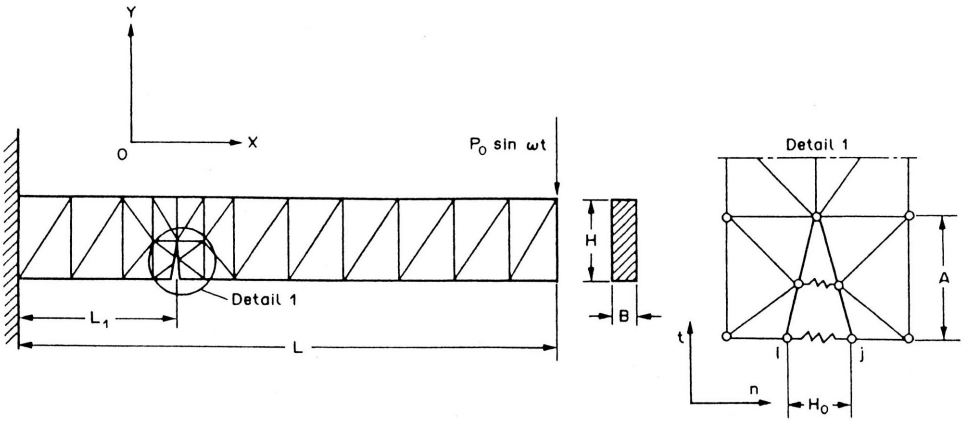


Рис. 3. Конечно-элементная модель консольной балки с трещиной

Вместе с тем следует отметить, что более точная конечно-элементная модель трещины одновременно является и математически существенно более сложной. Реализация такой модели сопряжена с необходимостью применения дорогостоящих специализированных компьютерных программ моделирования и анализа. Поэтому усложнение математической модели трещины в каждом конкретном случае должно быть оправданным и соответствовать цели выполняемых исследований.

Применение уточненной конечно-элементной модели может быть оправдано при необходимости анализа распределения напряжений в зоне трещины при динамическом нагружении конструкции. Кроме того, конечно-элементная модель незаменима при необходимости учета сдвиговых деформаций и сил сухого трения в зоне трещины, влияние которых на динамический отклик системы, в частности, становится особенно заметным при анализе изгибных колебаний коротких стержней. Если же рассматриваются стержневые элементы конструкций, длина l которых существенно больше размера h поперечного сечения (l/h = 20 – 40 и более), то в этом случае, как известно [11], влияние деформаций поперечного сдвига весьма несущественно, что допускает применение кусочно-линейной модели.

При отработке процедур вибродиагностики математическая модель трещины служит основой для выявления новых диагностических признаков, указывающих на возникновение усталостных трещин в стержневых конструкциях. При этом, как правило, ставится задача выявления трещины на ранней стадии развития, когда ее величина не превышает 20 – 25% от площади поперечного сечения неповрежденного стержня. Для таких относительно небольших трещин различие в результатах, которые дают кусочно-линейная и конечно-элементная модели, пренебрежимо мало. Это подтверждается и рядом экспериментальных исследований [13, 19], указывающих на удовлетворительное совпадение теоретических результатов, полученных при использовании кусочно-линейной модели трещины, с экспериментальными данными. Поэтому при решении подобных задач становится оправданным применение более простой кусочно-линейной математической модели трещины.

Об эффективности кусочно-линейной модели трещины и ее пригодности для отработки процедур вибродиагностики стрежневых конструкций свидетельствуют результаты многочисленных исследований (см. например, [17, 27-30]). В частности, на основе использования кусочно-линейной модели разработаны суперрезонансный и субрезонансный методы поиска трещин в стержневых элементах конструкций [12 – 14], работоспособность которых подтверждена экспериментально.

Литература

1. Броек Д. Основы механики разрушения. – М.: Высшая школа, 1980. – 368 с.

2. Дефектоскопия деталей при эксплуатации авиационной техники. – М.: Воениздат, 1978. – 231 с.

3. К использованию динамических характеристик для неразрушающего контроля авиационных конструкций / А. Б. Милов, Ю. Н. Невский, Г. А. Страхов, Ю. Г. Ухов // Вопросы динамики и прочности.– Рига: Зинатне, 1983, вып. 43, с. 97–100.

4. Неразрушающий контроль и диагностика: Справочник / В. В. Клюев и др. – М.: Машиностроение, 1995. – 487 с.

5. Основы экспериментальной механики разрушения / И. М. Керштейн, В. Д. Клюшников, Е. В. Ломакин, С. А. Шестериков. – М.: МГУ, 1989. – 140 с.

6. Павелко В. П., Шахманский Г. В. О влиянии трещины в детали на частоту собственных колебаний // Труды РКИИГА. – Рига, 1971, вып. 191, с. 87–92.

7. Парис П., Си Дж. Анализ напряженного состояния около трещины // Прикладные вопросы вязкости разрушения. – М.: Мир, 1968, с.64–142.

8. Партон В. З., Морозов Е. М. Механика упругопластического разрушения. – М.: Наука, 1985. – 504 с.

9. Работнов Ю.Н. Введение в механику разрушения.– М.: Наука, 1987. – 80 с.

10. Сиратори М., Миеси Т., Мацусита Х. Вычислительная механика разрушения. – М.: Мир, 1986. – 334 с.

11. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле.– М.: Наука, 1967.– 442 с.

12. Цыфанский С. Л., Бересневич В. И., Лушников Б. В. Нелинейная вибродиагностика машин и механизмов. – Рига: Зинатне, 2008. – 366 с.

13. Цыфанский С. Л., Магоне М. А., Ожиганов В. М. Об использовании нелинейных

эффектов для обнаружения трещин в стержневых элементах конструкций // Дефектоскопия, 1985, № 3, с. 77 – 82.

14. Цыфанский С. Л., Ожиганов В. М., Милов А. Б., Невский Ю. Н. Об одном методе поиска повреждения крыла самолета, основанном на анализе его нелинейных колебаний // Вопросы динамики и прочности. – Рига: Зинатне, 1981, вып. 39, с. 3 – 10.

15. Bovsunovsky A. P., Matveev V. V. Analytical approach to the determination of dynamic characteristics of a beam with a closing crack // Journal of Sound and Vibration, 2000, vol. 235, p. 415 – 434.

16. Bovsunovsky A. P., Surace C. Considerations regarding superharmonic vibrations of a cracked beam and the variation in damping caused by the presence of the crack // Journal of Sound and Vibration, 2005, vol. 288, p. 865 – 886.

17. Chondros T. G., Dimarogonas A. D., Yao J. Vibration of a beam with breathing crack // Journal of Sound and Vibration, 2001, vol. 239, p. 57 – 67.

18. Dirr B. O., Schmalhorst B. K. Crack depth analysis of a rotating shaft by vibration measurement // Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, Series B. Journal of Engineering for Industry, 1988, vol. 110, p. 158 – 164.

19. Gash R., Person M., Weitz B. Dynamic behaviour of the Laval rotor with a cracked hollow shaft – a comparison of crack models // Institute of Mechanical Engineering, 1983, C314/88, p. 463 – 472.

20. Imam I., Azarro S., Bankert R., Scheibel J. Development of an on-line rotor crack detection and monitoring system // Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design, 1989, vol. 3, p. 241 – 250.

21. Krawczuk M., Ostachowicz W. M. Parametric vibrations of beam with crack // Archives of Applied Mechanics, 1992, vol. 62, p. 463 – 473.

22. Nelson H. D., Nataraj C. The dynamics of a rotor system with a cracked shaft // Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, Series B. Journal of Engineering for Industry, 1986, vol. 108, p. 52 – 66.

23. Ostachowicz W. M., Krawczuk M. Vibration analysis of a cracked beam // Computers and Structures, 1990, vol. 36, p. 245 – 250.

24. Pavelko I. V., Pavelko V. P. Calculation of bar systems with cracks by a finite element method // Scientific Proceedings of Riga Technical University. Ser. 6. Transport and Engineering. Mechanics. Vol. 7. – Riga: RTU Publishing House, 2002, p. 159 – 163.

25. Ruotolo R., Surace C., Crespo P., Storer D. Harmonic analysis of the vibrations of a cantilevered beam with a closing crack // Computers and Structures, 1996, vol. 61, No. 6, p. 1057 – 1074.

26. Saavedra P. N., Cuitino L. A. Crack detection and vibration behaviour of cracked beam // Computers and Structures, 2001, vol. 79, p. 1451 – 1459.

27. Sundermeyer J. N., Weaver R. L. On crack identification and characterization in a beam by nonlinear vibration analysis // Journal of Sound and Vibration, 1995, vol. 183, p. 857 – 871.

28. Tsyfansky S. L., Beresnevich V. I. Detection of fatigue cracks in flexible geometrically non-linear bars by vibration monitoring // Journal of Sound and Vibration, 1998, vol. 213, No. 1, p. 159 – 168.

29. Tsyfansky S., Beresnevich V., Magone M. Vibrodiagnostics of fatigue cracks in aircraft wing // Scientific Proceedings of Riga Technical University. Ser. 6. Transport and Engineering. Mechanics. Vol. 7. – Riga: RTU Publishing House, 2002, p. 79 – 90.

30. Tsyfansky S. L., Beresnevich V. I. Non-linear vibration method for detection of fatigue cracks in aircraft wings // Journal of Sound and Vibration, 2000, vol. 236, No. 1, p. 49 – 60.

Поступила: 12.06.09.