УДК 621.01:534.1

# О НЕКОТОРЫХ КОРРЕКТИВАХ ПРИ ОЦЕНКЕ ВЛИЯНИЯ ЭЛЕКТРОДВИГАТЕЛЯ НА ВИБРОАКТИВНОСТЬ ПРИВОДА ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ МАШИН

**©Иосиф Исаакович Вульфсон**
*СПбГУПТД, Санкт-Петербург, Россия*
vujo@ramler.ru

***Аннотация.*** *В статье приведены результаты исследования вынужденных колебаний в приводах машин с цикловыми механизмами при учете характеристик электродвигателя. Установлено, что при часто применяемом в инженерной практике упрощенном моделировании, при котором игнорируется влияние инерционных характеристик электродвигателя, возможны существенные ошибки при определении резонансных частот. Приведены соответствующие коррективы динамической модели для предварительных инженерных оценок. Выявлены специфические эффекты, связанные с медленным изменением приведенных инерционных и упруго диссипативных характеристик привода. Особое внимание уделено кинематическому возбуждению колебаний, при котором вынуждающие силы в числе других факторов являются функцией угловой скорости двигателя. Предложена инженерная методика расчета подобных систем, базирующаяся на применении матриц перехода, хорошо приспособленных к компьютерным процедурам. Приведены результаты компьютерного моделирования.*

***Ключевые слова:*** *динамика, электродвигатель, цикловые машины, колебания.*

# SOME ADJUSTMENTS TO THE ASSESSMENT IN IMPACT OF ENGINES ON THE VIBROACTIVITY OF TECHNOLOGICAL MACHINES DRIVES

**©Iosif I. Vulfson**
*SPbSUITD, Saint Petersburg, Russia*
vujo@ramler.ru

***Annotation.*** *The results of the study of forced vibrations in machines has been obtained for the drive of cyclic machines taking into account the characteristics of the motor. It was found that the often used in engineering practice simplified simulation, in which ignored the effect of inertia characteristics of the motor, can lead to significant errors in determining the resonant frequency. The corresponding correctives of the dynamic model for the preliminary engineering estimates was proposed. It has been revealed specific effects associated with slow change of the inertial and elastic-dissipative characteristics of drive. Attention is given to the kinematic excitation of vibrations in which the driving force among the other factors are a function of the angular speed of the motor. An engineering method for calculating such problems is based on the use of transition matrices, that are well adapted for computer procedures application. Are given the results of computer simulation.*

***Keywords:*** *dynamics, motor, cyclic machines, vibrations.*

1. Современные технологические машины являются сложными системами, в которых можно выделить три функциональные части: двигатель, механическую систему (рабочую машину) и, в общем случае, – систему управления движением. Механические колебания привода исполнительных органов в основном формируются в рабочей машине, поэтому при определении уровня виброактивности для установившихся режимов нередко задаются постоянной средней угловой скоростью на «входе» привода машины. При этом обычно исходят из допущения о малой динамической связанности функциональных частей машины. В цикловых технологических машинах, к которым относятся многие машины текстильной, легкой, полиграфической и ряда других отраслей промышленности, управление движением обычно реализуется в самой механической системе без использования специальных средств программного управления. При этом обычно не используются возможности программного управления (например, посредством серводвигателей), хотя при конструировании это направление несомненно следует считать перспективным способом формирования законов движения. Однако, как показывает инженерная практика, при высоких скоростях и связанных с этим больших инерционных силах применение программного управления на данном этапе, по-видимому, еще не отвечает повышенным требованиям к точности позиционирования рабочих органов, особенно при выполнении сложных технологических операций. Поэтому в подобных случаях обычно приходится ограничиваться динамическим синтезом, базирующимся на непосредственном анализе взаимовлияния электродвигателя и рабочей машины. Динамические процессы, связанные с учетом влияния электродвигателя, проявляются не только в изменении силовых и амплитудно-частотных характеристик, но и в возникновении существенных динамических ошибок при воспроизведении заданного программного движения. Поскольку механические колебания привода исполнительных органов в основном формируются в рабочей машине, при определении уровня виброактивности для установившихся режимов обычно задаются постоянной средней угловой скоростью на «входе» привода машины. При этом нередко исходят из допущения о малой динамической связанности функциональных частей машины – двигателя и привода. Представляет интерес, в какой степени такое допущение правомерно.

Анализ машинного агрегата с учетом динамической характеристики электродвигателя освещен в ряде монографий, среди которых выделим работы М.З. Коловского и В.Л. Вейца, наиболее приближенные к решению практических инженерных задач [1 – 6]. Описание электромагнитных колебательных процессов в двигателях связано с решением достаточно сложных систем нелинейных дифференциальных уравнений. Поэтому при решении прикладных инженерных задач большую роль играют критериальные оценки, позволяющие воспользоваться декомпозицией и агрегированием для построения эффективных динамических моделей данного класса систем [7–12]. Применительно к установившимся режимам в инженерной практике хорошо себя зарекомендовали приближенные линеаризованные уравнения, которые для двигателя постоянного тока и асинхронных двигателей имеют вид

$$\Omega_{Ä} = \Omega_{Ä0}[1 - \nu_{Ä}(\dot{I}_{Ä} + \tau \dot{I}^{\cdot}_{Ä})], \qquad (1)$$

где $\dot{I}_{Ä}$ – момент двигателя; $\nu_{Ä}$ – коэффициент крутизны статической характеристики; $\tau$ – электромагнитная постоянная времени; $\Omega_{Ä0}$ – угловая скорость идеального холостого хода (т.е. при $\dot{I}_{Ä} \equiv 0$).

Для асинхронных двигателей $\tau = (2\pi f_c s_к)^{-1}$; $s_к = (1 - \Omega'_Д / \Omega_{Д0})(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})$;

$\nu_Д = s_к / (2Ì'_Д \xi)$, где $s_к$ – критическое скольжение; $f_c$=50 Гц – частота сети; $\xi$ –отношение максимального момента к номинальному $Ì'_Д$. (Исходные данные заимствуются из каталога электродвигателей).

Характеристика электродвигателя (1) соответствует реологической модели Максвелла, в которой ротор соединен со статором посредством «упругого элемента» с коэффициентом жесткости $\tilde{n}_0 = (\nu_Д \Omega_{Д0} \tau)^{-1}$ и последовательно включенного демпфера с моментом сопротивления $b_0 \Omega_Д$ при $b_0 = (\nu_Д \Omega_{Д0})^{-1}$ [5, 6].

В данной статье получил дальнейшее развитие лаконичный инженерный способ исследования данной проблемы, основанный на методе комплексных амплитуд при использовании матриц перехода и возможностей современной вычислительной техники [5, 6 ,9 – 13]

2. На рис.1 приведен ряд типовых динамических моделей, на базе которых можно осуществить не только анализ, но динамический синтез колебательных систем в данном классе задач. Здесь приняты следующие условные обозначения: $J_0, J_1, J_2$ – моменты инерции; П – оператор, соответствующий нелинейной функции положения (см. ниже); $c$, $\psi$ – приведенные коэффициенты жесткости и рассеяния привода; $u$ – передаточное отношение; на моделях выделены подсистемы **M** и **u**, соответствующие двигателю и редуктору. Модель кольцевой структуры (рис.1, а) весьма распространена в машинах с повышенной зоной технологического процесса (например, в ряде текстильных и полиграфических машин), а модель цепной структуры – в машинах с рабочим органом повышенной массивности (например, в плоскопечатных машинах, в станках-автоматах и т.п.). Можно показать, что при определенном выборе параметров $c_2^*$ и $J_1^*, J_2^*$ (см. ниже) обе модели отображаются моделью, показанной на рис.1, в.

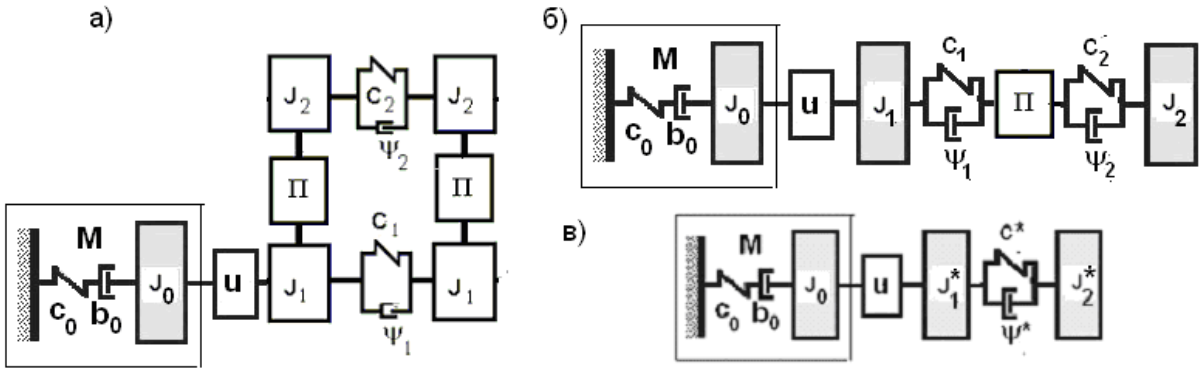



Рис.1. Типовые динамические модели: а) модель 1– кольцевой структуры; б) модель 2 – цепной структуры; в) обобщенная модель – 3.

В цикловых механизмах связь между координатами на «входе» и «выходе» описывается нелинейной функцией положения $\Pi(\varphi)$. Для идеального механизма, в котором отсутствуют зазоры и все звенья принимаются абсолютно жёсткими $\varphi = \varphi_* = \bar{\omega} t$, где $\bar{\omega}$ – средняя угловая скорость входного звена. Пусть $\varphi = \varphi_* + \Delta\varphi$, где $\Delta\varphi$ – динамическая ошибка, возникающая при колебаниях. Принимая во внимание, что функция положения непрерывна и

дифференцируема, произведём линеаризацию этой функции в окрестности программного движения: $\Pi(\varphi_* + q) \approx \Pi(\varphi_*) + \Pi'(\varphi_*)q$, где $\Pi' = d\Pi / d\varphi$ – первая геометрическая передаточная функция механизма (аналог скорости). Таким образом, при малых колебаниях, несоизмеримых с «идеальной» координатой практически без ущерба для точности мы заменили нелинейную связь нестационарной. Нестационарные связи могут быть важным источником повышения виброактивности в цикловых механизмах. В частности, в этом случае эффективный коэффициент диссипации, соответствующий нелинейным позиционным диссипативным силам, существенно снижается и даже может стать отрицательным, что приводит к росту амплитуд колебаний, а также к возможности к неустойчивости динамических режимов при параметрическом возбуждении [9, 11, 12, 14].

Подробнее остановимся структуре первой геометрической передаточной функции $\Pi'(\varphi) = d\Pi(\varphi) / d\varphi$. Пусть $\Pi' = \Pi'_0 + \Pi'_\nu$, где слагаемые соответствуют медленным и быстрым движениям. Для определённости примем $\Pi'(\varphi) = h[\sin\varphi + \varepsilon\sin(\nu\varphi + \gamma)]$ при $h = 1$ ; первое слагаемое отвечает «медленной», а второе – «быстрой» гармонике с частотой $\nu$ и глубиной пульсации $\varepsilon$.

2. Рассмотрим два частных случая. Сначала временно исключим из рассмотрения влияние электродвигателя и примем угловую скорость главного вала равной $\omega = \bar{\omega} = \text{const}$. Приведем динамические модели к виду модели цепной структуры (рис.1,в). Можно показать, что для модели 1 (см. рис. 1,а) $c^* = \tilde{c}_1(1 + \zeta\Pi'^2)$ , $J_1^* = J_2^* = J_1(1 + \mu\Pi'^2)$ , где $\zeta = c_2 / c_1;\ \mu = J_2 / J_1;\ \tilde{c}_1(\delta_1^*) = c_1(1 + 2i\delta_1^*);\ \delta_1^* = \psi_1^* / (4\pi);\ \psi^* = \psi_1^* = (\psi_1 c_1 + \psi_2 c_2) / (c_1 + c_2)$, а для модели 2 (см.рис.1,б) $J_2^* = J_2 = \mu J_1$ $c^* = \tilde{c}_1(\delta_2^*) / (\Pi'^2 + \zeta^{-1})$ ; $\delta_2^* = \psi_2^* / (4\pi)$ ; $\psi^* = \psi_2^* = \left|c^*\right|(\psi_1 / c_1 + \psi_2 / c_2);\ \tilde{c}_1(\delta_2^*)$ – комплексная форма упруго-диссипативного элемента [ 11–13].

Без учета характеристики двигателя модель 2 подробно рассмотрена в монографиях [6, 9, 11, 14], поэтому в данной статье в рамках поставленной задачи при иллюстрации результатов анализа воспользуемся более сложной моделью 1, которая после приведенной выше линеаризации в окрестности программного движения описывается дифференциальными уравнением (уточнения см. ниже)

$$a(\varphi)\ddot{q} + 2\mu J_1\Pi'_*\Pi''_*\omega\dot{q} + \tilde{c}_1(\delta_1^*)(1 + \zeta\Pi'^2_*)q = M(t)\Pi'_* - \mu J_1\Pi'_*\Pi''_*\omega^2, \qquad (2).$$

где $a(\varphi) = J_1(1 + \mu\Pi'^2_*)$ ; $M(\varphi_*)$ – внешний момент, приложенный к выходному звену; $q$ – динамическая ошибка рабочего органа. Этому уравнению отвечает следующее однородное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами:

$$\ddot{q} + 2n(t)\dot{q} + p^2(t)q = 0. \qquad (3)$$

Здесь $p(t) = k\sqrt{(1 + \zeta\Pi'^2_*) / (1 + \mu\Pi'^2_*)}$ ; $n(t) = n_0(t) + n_h(t)$ , где $k = \sqrt{c_1 / J_1}$ ; $n_0(t) = \delta\, p(t)$ ; $\delta \approx \psi / (4\pi)$ ; $n_h(t) = \omega(da / d\varphi) / (2a)$ . Функции $n_0$ и $n_h$ описывают диссипативную и гироскопическую составляющие, а функция $p(t)$ – переменную «собственную» частоту. На

рис.2 приведены графики $p_0$ (жирная линия) и $p$ (тонкая линия), отвечающие медленным и быстрым изменениям функций $\Pi'(\varphi_*)$ (см. выше).

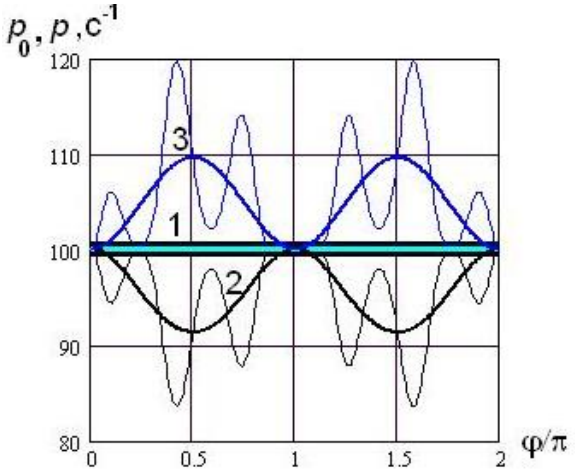



Рис. 2. «Собственные» частоты без учета двигателя: 1– $\mu = \zeta = 0,2$; ; 2. – $\mu = 0,2,\ \zeta = 0$; 3. – $\mu = 0,\ \zeta = 0,2$.

Влияние нестационарных связей на виброактивность машин отражено в ряде монографий автора [14, 9, 11, 12]. С помощью метода условного осциллятора на основании (3) было показано, что подавление параметрического возбуждения достигается при

$$\vartheta = 2\pi\delta > \vartheta^* = \pi p_0^{-1} \left| a'/a + p'/p - p_0'/p_0 \right|, \qquad (4)$$

где $\vartheta$ – логарифмический декремент; $p_0(t)$ соответствует медленно меняющейся составляющей функции $p(t)$.

Поскольку $a(\varphi) = a(2\pi)$, эта функция не влияет на пороговые условия возбуждения параметрического резонанса. Однако в пределах цикла возможны зоны, в которых амплитуда колебаний $A$ возрастает, что нередко приводит к существенным динамическим ошибкам при реализации программного движения. При медленном изменении параметров условие $dA/dt < 0$ для произвольного временного отрезка выполняется, если

$$\delta_0 > \delta^*(\varphi) = \delta_h(\varphi) + \delta_p^*(\varphi) \ \text{ при } \ \delta_p^*(\varphi) = 0,5\, p_0(\varphi)^{-2} \frac{dp_0(\varphi)}{d\varphi}\ . \qquad (5)$$

Здесь функция $\delta_h$ соответствует гироскопическим силам, а $\delta_p^*$ отражает влияние переменности «собственной» частоты колебаний. Максимальное значение функции $\delta^*$ соответствует критическому уровню возбуждения. Неравенство (5) совпадает с результатами, полученными на основании прямого метода Ляпунова, устанавливающего достаточное условие динамической устойчивости [14]. Можно показать, что при медленно меняющихся параметрах оно является также и необходимым. Применительно к данной задаче условие (5) можно квалифицировать как *условие квазистационарности* [15]. При $\mu = \zeta$, несмотря на переменность параметров системы, «собственные» частоты в первом приближении, сохраняют постоянное значение $p = k = \text{const}$. При этом отсутствует рост амплитуд на интервале кинематического цикла. Реализация условий квазистационарности является весьма

эффективным способом устранения возможности возбуждения параметрических резонансов и понижения виброактивности системы.

Во втором частном случае примем, что $c_1 \to \infty$, т.е. теперь не учитываются упругие свойства привода. Тогда, снова, представляя угловую скорость двигателя в виде суммы постоянной и переменной составляющих, после линеаризации в окрестности программного движения получаем

$$\Delta\ddot{\omega}_д + 2n(\varphi_*)\Delta\dot{\omega}_д + k^2(\varphi_*)\Delta\omega_д = W(\varphi_*), \qquad (6)$$

где $\Delta\omega_Д$ – динамическая ошибка по скорости; $2n = \tau_д^{-1} + 2J'\bar{\omega}/J$; $J = J(\varphi)$; $k^2 = J^{-1}[(\nu_д\tau_д\bar{\omega}_д)^{-1} + \bar{\omega}J'\tau_д^{-1}]$; $W = -J(\Delta M\tau_д^{-1} + \Delta M'\bar{\omega} + 0,5\bar{\omega}^2J'\tau_д^{-1})$; – переменный приведенный момент инерции (для модели 1 $J(\varphi) = 2J_1(1+\mu\Pi_*'^2)$); $\Delta M = M - \bar{M}$; чёрточка соответствует среднему значению на периоде $2\pi/\bar{\omega}$.

Таким образом, относительно $\Delta\omega_д$ мы снова получили линейное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами. «Собственная» частота согласно (5,6) равна $p_m = \sqrt{k^2 - n^2 - \dot{n}}$. Специфика данной модели состоит в относительно большом значении диссипативного члена, что практически исключает возможность параметрического резонанса на этой частоте. Кроме того, это может привести к большой разнице между значениями $k$ и $p_m$, а при $\tau \le 0.25\nu_Д\omega_Д J$ – даже к переходу в апериодический режим. Для модели 1 на рис.3 иллюстрируется зависимость парциальной частоты $p_m$ от инерционных характеристик привода и коэффициента крутизны статической характеристики двигателя $\nu_Д$.

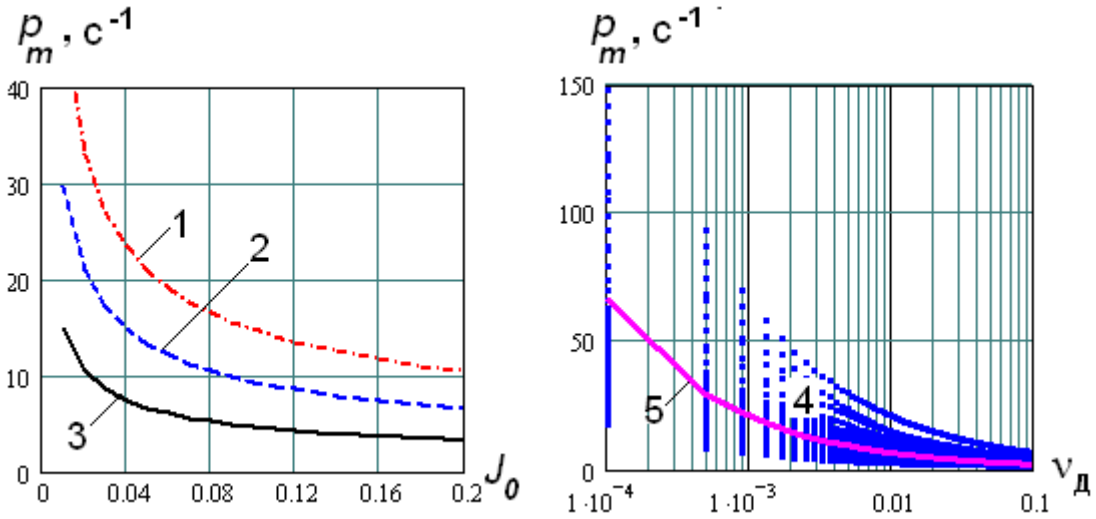



Рис. 3. Графики $p_m(J_0), p_m(\nu_Д)$: 1 – $\nu_Д$ =0.002; 2 – $\nu_Д$ =0.005; 3 – $\nu_Д$ =0.02; 4 – $J_0 = 0,001...0,02$; 5 – $J_0 = 0,1$

3. Для определения амплитудно-частотных характеристик при совместном учете характеристик двигателя и механического привода воспользуемся лаконичным способом, базирующимся на аппарате матриц перехода. Для рассматриваемой цепной системы (см. рис.1) матрица перехода имеет вид [9, 10].

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{\Gamma}_{J2}\mathbf{\Gamma}_{c*}\mathbf{\Gamma}_{П}\mathbf{\Gamma}_{J1}\mathbf{\Gamma}_{u}\mathbf{\Gamma}_{J0}\mathbf{\Gamma}_{M} \qquad (7)$$

Здесь

$$\mathbf{\Gamma}_J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -J\omega^2 & 1 \end{pmatrix};\ \mathbf{\Gamma}_{c*} = \begin{pmatrix} 1 & c*^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\ \mathbf{\Gamma}_u = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^{-1} \end{pmatrix};\ \mathbf{\Gamma}_\Pi = \begin{pmatrix} \Pi' & 0 \\ 0 & \Pi'^{-1} \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{\Gamma}_M = \begin{pmatrix} 1 & c_0^{-1} - i(b_0\Omega_Д)^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\ i = \sqrt{-1},$$

где $c^* = \tilde{c}_1(\delta_2^*)/(\Pi'^2 + \zeta^{-1})$ – комплексный коэффициент жесткости (см. выше).

Как следует из правой части уравнения (2), вынуждающий момент, возникающий на рабочем органе, складывается из кинематического возмущения, зависящего от его ускорения при идеальном движении, и силового возмущения от технологических сил и сил сопротивления. Подчеркнем, что особенностью цикловых механизмов является трансформация постоянных составляющих на «входе» в переменные функции на «выходе». Представим вынуждающий момент, приложенный к выходному звену, как $M = \sum_r M_r \sin(\omega_r t + \alpha_r)$ .Для упрощения записи ниже индекс $r$ всюду опущен. На основании (7)

$$\begin{pmatrix} \tilde{A} \\ \tilde{M}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{g}_{11} & \tilde{g}_{12} \\ \tilde{g}_{21} & \tilde{g}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{M}_Д \end{pmatrix}, \tag{8}$$

где $\tilde{g}_{kj}$ – элементы матрицы $\mathbf{\Gamma}$; $\tilde{A}$ – амплитуда выходного звена; $\tilde{M}_Д$ – амплитуда момента двигателя (как и выше, волной отмечена комплексная форма функции).

Из (7) следует

$$\tilde{M}_Д = \tilde{M}_1 / \tilde{g}_{22};\ \tilde{A} = \tilde{M}_1 \tilde{g}_{12} / \tilde{g}_{22}. \tag{9}$$

Представляют интерес функции $\beta_1(\omega,\varphi) = |\tilde{g}_{12}|;\ \beta_2(\omega,\varphi) = |\tilde{g}_{22}|^{-1};\ \beta_0(\omega,\varphi) = \beta_1(\omega,\varphi)/\beta_2(\omega,\varphi)$, определяющие движущий момент и амплитуду вынужденных колебаний (рис.4).

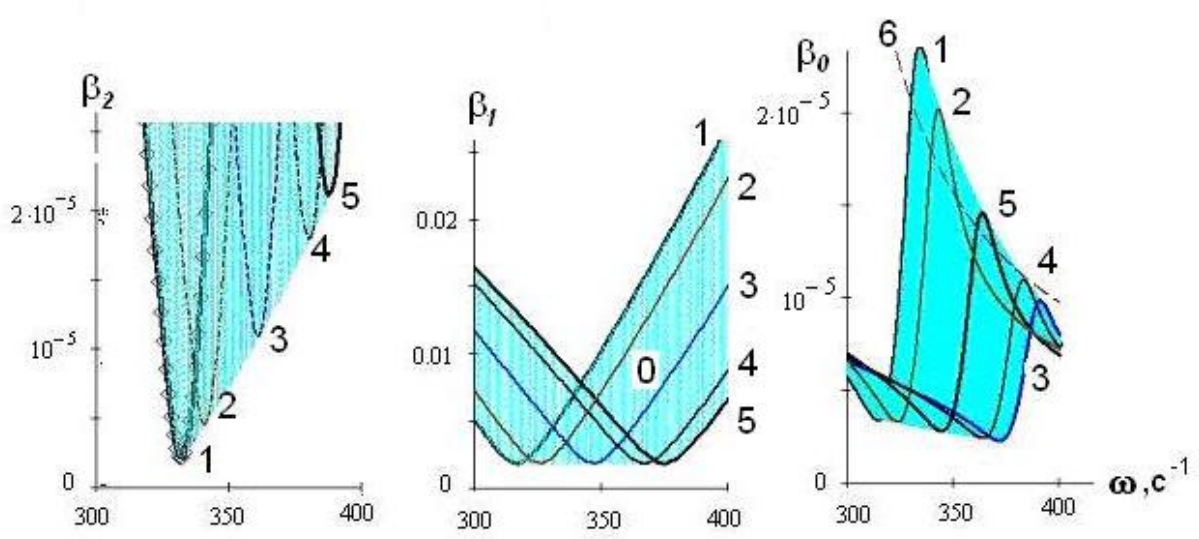



Рис. 4. Графики функций $\beta_0, \beta_1, \beta_2$: 1 – $\varphi = 0$ ; 2 – $\varphi = \pi/8$; 3 – $\varphi = \pi/4$ ; 4 – $\varphi = 3\pi/4$ ; 5. – $\varphi = \pi/2$ ; 0 – $0 \le \varphi \le \pi/2$ ;6. – см. ниже.

На рис. 5 приведены полученные на основании (8) типовые амплитудно- частотные (АЧХ) и фазочастотные (ФЧХ) характеристики: $A = |\tilde{A}| \approx \mathrm{Re}\,\tilde{A};\ \gamma = \mathrm{Im}\,\tilde{A}$ при $\Omega_{\text{Ä}}^{\text{í}} = \omega / u;\ \nu_{\text{Ä}} = 0,003(\text{Í ì})^{-1};\ \delta = 0,03$. (При выборе параметров учтено стремление к наглядности иллюстрируемых эффектов).

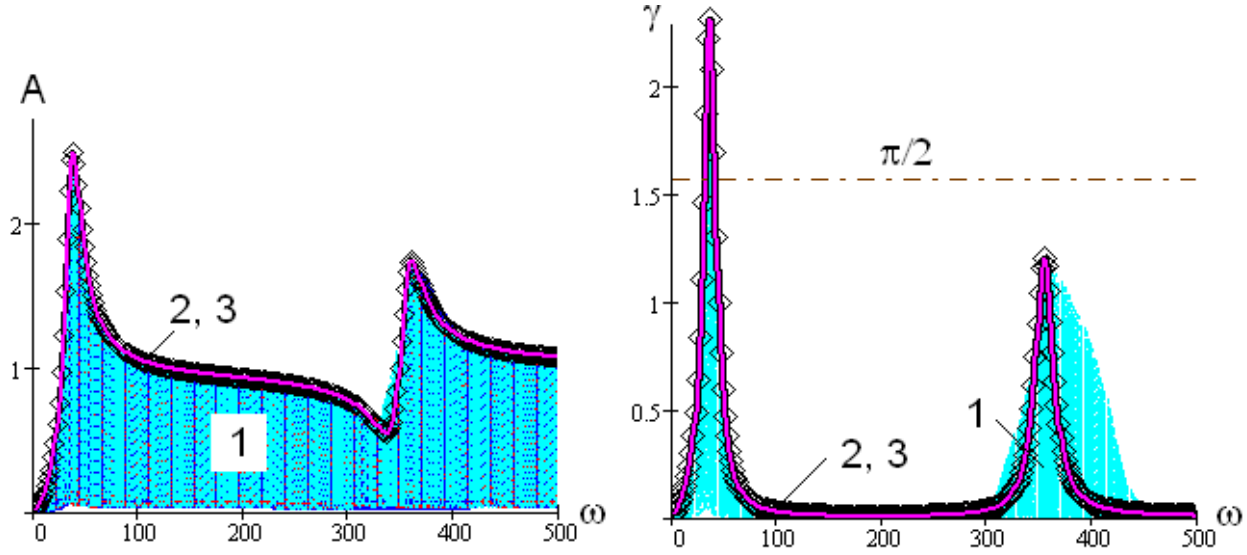



Рис. 5. Графики АЧХ и ФЧХ: 1 – $0 \le \varphi \le \pi$ ; 2 – $\varphi = 0,\ \pi\ (\zeta = \mu)$ ; 3 – $\varphi = 0,\ \pi\ (\zeta \ne \mu)$

Обратим внимание на то, что АЧХ пропорциональна функции $\beta_0$ только при постоянной амплитуде момента $M_1$. Приведенные на рис.5 графики соответствуют кинематическому возбуждению, при котором амплитуда пропорциональна $\omega^2$.

Усредненные парциальные частоты равны $k_1 = 39,6;\ k_2 = 100\,\text{с}^{-1}$. При соединении двигателя с приводом усредненная низшая собственная частота мало не отличается от парциальной частоты двигателя, а при $c_1 \to \infty$ уменьшается от $\omega \approx 38\,\text{с}^{-1}$ до $\omega \approx 14\,\text{с}^{-1}$. Существенное превышение второй резонансной частоты $\omega \approx 360\,\text{с}^{-1}$ по сравнению с собственной частотой без учета двигателя $p_0 \approx 100\,\text{с}^{-1}$ (см. рис.2), на первый взгляд, вызывает недоумение и представляется неправдоподобным, так как выявленный эффект не согласуется с традиционным мнением, когда роль двигателя практически ограничивается лишь появлением дополнительной собственной частоты, на которой возникает так называемый электромагнитный резонанс.

Остановимся подробнее на этом вопросе, так как с ним связаны значительные ошибки при динамическом анализе и синтезе приводов машин. Для рассматриваемого класса двигателей обычно $\Delta\Omega = \Omega_{m0} - \Omega_m^n \approx (5-10)\text{с}^{-1}$ ; $\tau \approx (0,01-0,15)\text{с}$ . Как показано в [6] , при этом под действием номинального момента двигателя эквивалентная динамическая ошибка на входе привода соответствует деформации $(0,05-1,4)$ рад., что, как правило, значительно превышает деформации остальных участков валопровода. Это оправдывает анализ предельного случая, когда эквивалентная «жесткость» двигателя равна нулю $(c_0 = 0)$. Другими словами, речь идет об «отключенном» двигателе, когда его роль ограничивается *учетом момента инерции ротора*. При этом динамическая модель (см. рис.1,б) отображает систему с двумя степенями свободы с одной циклической координатой и единственной «собственной» частотой, отличной от нуля (рис.6):

$$p_*(\varphi) = \sqrt{[2J(\varphi_*) + J_{01}]c(\varphi_*) \Big/ \{[J(\varphi_*) + J_{01}]J(\varphi_*)\}} \quad , \qquad (10)$$

где $J(\varphi) = J_1(1 + \mu\Pi_*'^2)$; $J_{01} = J_0 u^{-2}$.

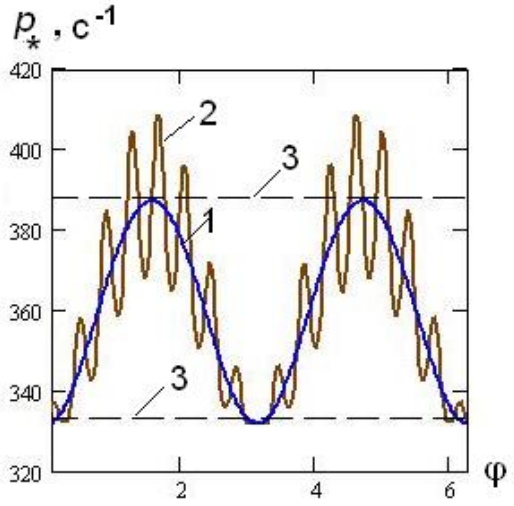



Рис.6. Графики $p_*(\varphi)$: 1 – $\xi = 0$; 2 – $\xi \neq 0$; 3 – границы частотного диапазона $p_2(\varphi)$ при изменении $\varphi$ (см. рис. 3, линия 6).

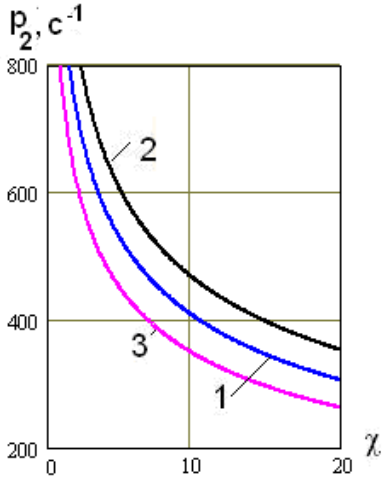



Рис.7. Графики $p_2(\chi)$ при $\varphi = \pi/2$: 1 – $\mu = \zeta = 0,4$; 2 – $\mu = 0$, $\zeta = 0,4$; 3 – $\mu = 0,4$, $\zeta = 0$.

Можно показать, что резонансные режимы в линейном приближении отвечают «собственным» частотам, которые являются корнями биквадратного уравнения

$$f_2(\varphi_*)p^4 - f_1(\varphi_*)p^2 + f_0(\varphi_*) = 0, \qquad (11)$$

где $f_0(\varphi_*) = c(\varphi_*)/(\nu_{\ddot{A}}\tau)$; $f_1(\varphi_*) = [(\nu_m\tau)^{-1} + c(\varphi_*)]J(\varphi_*) + (J_{01} + J(\varphi_*))c(\varphi_*)$; $f_2(\varphi_*) = [J_{01} + J(\varphi_*)]J(\varphi_*)$.

Вторая резонансная частота $p_2$ обычно существенно выше парциальной частоты механической подсистемы привода (см. рис.2, 3). Эта частота в числе других параметров в значительной степени зависит от отношения моментов инерции $\chi = J_{01}/J_0$ (рис. 7).

Следует отметить, что приведенный эффект свидетельствует о необходимости корректировать обычно принятые способы оценки роли электродвигателя на базе упрощенных динамических моделей. В частности, весьма распространена упрощенная модель, показанная на рис. 1,б, в которой выделенная подсистема М, соответствующая электродвигателю, заменяется заделкой, что вносит существенную ошибку при определении резонансной частоты. Так, в приведенном примере частота $p_2$ примерно в 3,5 раза выше частоты $p_0$, соответствующей этому упрощению. График $p_2(\chi)$, приведенный на рис. 4, свидетельствует о том, что эта ошибка может быть еще значительно выше. В то же время, принимая при упрощении $c_0 = 0$ (свободный конец) и сохраняя в модели элемент $J_0$, отвечающий ротору двигателя, имеем расхождение между частотами $p_2$ и $p_*$ меньше, чем 10%. Таким образом, при часто применяемом упрощенном моделировании *«без учета электродвигателя» следует исключить заделку на «входе», а также учет его*

*электромагнитных свойств, сохраняя при этом лишь инерционные характеристики ротора двигателя.*

При заданном моменте инерции ротора двигателя $J_0$ с ростом приведенного момента инерции $J_{01}$ существенно увеличивается высокочастотная резонансная частота, что, на первый взгляд, можно считать положительным эффектом, поскольку мы удаляем резонанс от частоты кинематического возбуждения. Однако следует принять во внимание сопутствующий рост кинематического возбуждения и дополнительные нагрузки при переходных процессах. Кроме того, при этом возникает опасность приближения резонансных частот при вынужденных колебаниях к зоне главного параметрического резонанса. При выборе параметров привода и режимов работы следует также принять во внимание, что из-за большой эквивалентной податливости двигателя в окрестности резонансной зоны $\omega \approx p_2$ оба конца рабочего органа (см. элементы $J_2$ , рис. 1,а) колеблются в противофазе, что может отрицательно отразиться на выполняемой технологической операции. В приведенном примере предпочтительный частотный диапазон располагается на интервале $150\,\mathrm{c}^{-1} \le \omega \le 250\,\mathrm{c}^{-1}$, на котором $A \approx \mathrm{const}; \gamma \approx 0$ (см. рис.5).

Особенностью приведенных АЧХ и ФЧХ являются переменность амплитуд и фазовых сдвигов внутри кинематического цикла, что вызвано медленным изменением компоненты «собственной» частоты $p_0(t)$ (см. рис.4, область 0). Этот эффект приводит к возникновению режимов биений, что нашло отражение в ряде работ как при компьютерном моделировании, так и при экспериментальных исследованиях [14]. При медленном изменении параметров реализуется локальный переходный режим. На графиках частотных характеристик (рис.8), построенных на основании (10), (11) при $J_0$*=0,01 кг·м*$^2$ и $J_{01}$*=0,4 кг·м*$^2$, сплошные линии отвечают $\Pi'_0$ $(\xi = 0)$, а штриховые $-\Pi'_\nu$ $(\xi = 0{,}5)$.

Анализ графиков показывает, что электромагнитная частота $p_1$ чувствительно реагирует на инерционные характеристики (параметр $\mu$) и слабо – на упругость привода (параметр $\zeta$). Частота $p_2$, играющая доминирующую роль при формировании вынужденных и параметрических колебаний рабочих органов, существенно зависит от соотношения параметров $\zeta$ и $\mu$. В нашем случае условиям квазистационарности отвечает $\mu = \zeta$ (кривые 1, штриховые линии). При этом $p_2 \approx \mathrm{const}$ и практически устраняется пульсация параметров, вызванная нестационарными связями, а, следовательно, и возможность возбуждения параметрических резонансов. Графики свидетельствуют существенное снижение пульсации этой частоты при $\mu = \zeta$ (кривые 1 – штриховые линии; принятую функцию $\Pi'$ см. выше), это еще раз подтверждает эффективность квазистационарности при оптимизации динамических характеристик.

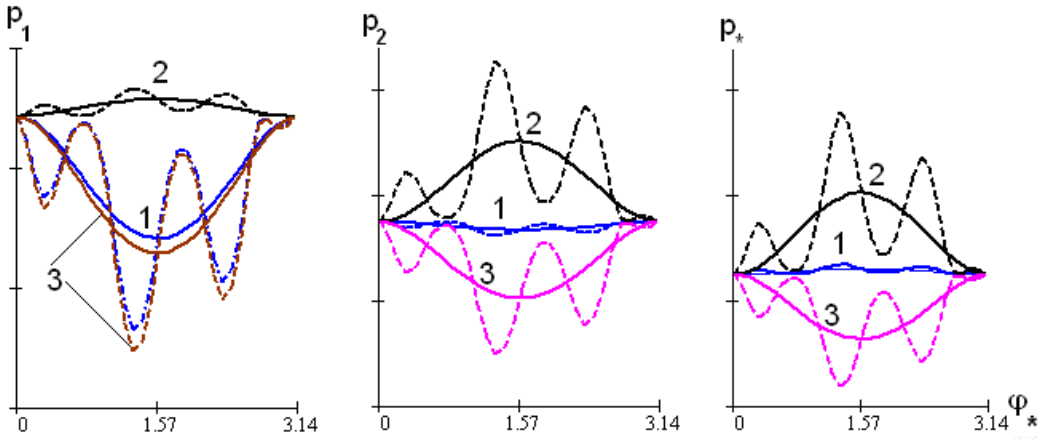



Рис. 8. Графики $p_1(\varphi_*), p_2(\varphi_*), p_*(\varphi_*)$ $1-\mu=\zeta=0,4$; $2-\mu=0,\ \zeta=0,4$; $3-\mu=0,4,\ \zeta=0$

График $p_*$, по существу, дублирует график для частоты $p_2$, что свидетельствует о большой эквивалентной «податливости» двигателя и относительно малом влиянии его электромагнитных характеристик на эту частоту.

5. Выше при кинематическом возбуждении для определения момента сопротивления мы исходили из предположения, что момент инерционных сил выходного звена определяется заданным законом программного движения при постоянной угловой скорости входного звена. Этому моменту при $\omega=\text{const}$ отвечает второе слагаемое в правой части уравнения (2) $M^*=-\mu J_1\Pi'_*\Pi''_*\omega^2$. Однако, во-первых, при $\omega\neq\text{const}$ следует скорректировать ускорение ведомого звена:

$$M^*=-\mu J_1\Pi'(\Pi''\omega^2+\Pi' d\omega/dt). \qquad (12)$$

Во-вторых, теперь функция $\omega(t)$ наряду с другими факторами также зависит от $M^*$.
Для выявления качественных особенностей возникающих при этом эффектов, в рамках данной статьи для модели 1 воспользуемся компьютерным моделированием на базе системы дифференциальных уравнений, объединяющей механические и электромеханические характеристики системы

$$\left.\begin{aligned}&\Delta\omega'+(\Delta M+\Delta M'\tau\Omega^{\text{í}}u)\Omega_{\text{Ä}0}(1-s_0)\nu_{\text{Ä}}=0;\\&[1+0,5\bar{p}_0(1-\cos 2\varphi)]\Delta\omega'\Omega^{\text{í}}u^{-1}+0,5\bar{p}_0u^{-1}\sin 2\varphi(\Omega^{\text{í}}+\Delta\omega)^2-\Delta\omega J_0^{-1}=r\cos\varphi\ ;\\&\Omega^{\text{í}}\Delta\varphi'-\Delta\omega=0\ ,\end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

где $\bar{p}_0$ – среднеквадратичное значение функции $p_0(\varphi)$.

На основании решения системы уравнений (13) на рис.9,а показаны графики относительных отклонений угловой скорости $\Delta\omega/\omega$ (кривая 1) и соответствующие фазовые сдвиги углов поворота входного звена $\Delta\varphi$ (кривая 2).

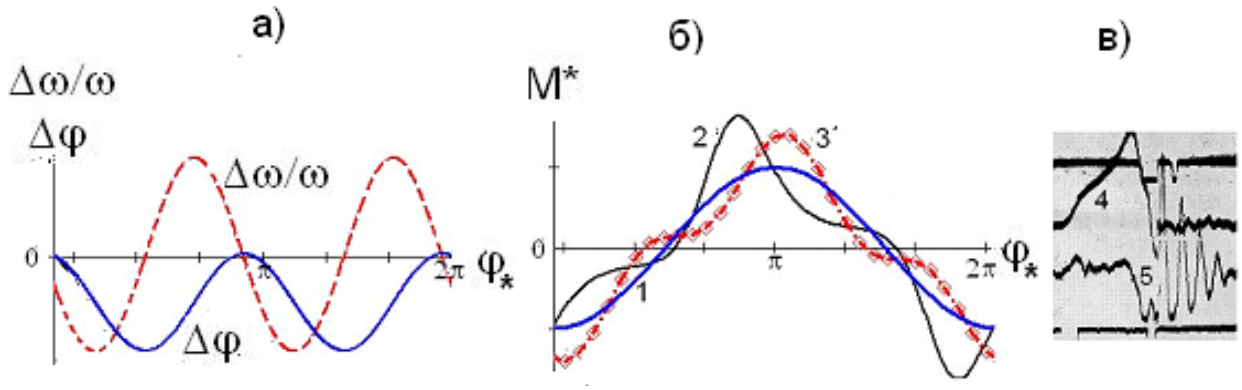



Рис.9 Искажения кинематических и динамических характеристик:
1– $\omega = \text{const}$ ; 2– $\tau = 0$ ; 3 – $\tau \neq 0$ ; 4–скорость; 5– ускорение

На графиках наглядно видно уменьшение скорости на участках разбега прямого и обратного хода, рост скорости на участках торможения, а также соответствующие этим участкам фазовые сдвиги. При этом приходиться сталкиваться с эффектом, когда аргумент геометрических характеристик циклового механизма $\varphi$ из-за $\omega \neq \text{const}$ существенно отличается от линейной функции $\varphi = \omega t$, что может привести к значительным искажениям программного движения и изменению момента на двигателе. На рис. 9,б показана трансформация момента $M^*$, возникающая из-за этих искажений при учете статической и динамической характеристики двигателя. Представляет интерес смягчающий эффект проявления динамической характеристики по сравнению со статической. Последнее связано с влиянием электромагнитной постоянной времени $\tau$, подавляющей резкие изменения динамических нагрузок.

На рис. 9,в приведена осциллограмма кинематических характеристик выходного звена, полученная на экспериментальной установке кулачкового механизма при исходном симметричном законе программного движения [14]. На разбеге толкателя из-за больших инерционных нагрузок угловая скорость двигателя существенно снизилась, что привело к значительным искажениям заданного закона движения, а именно, к увеличению участка разбега и, соответственно, – к сокращению участка выбега. В результате – не только возросли ускорения на выбеге, но и возникли виброударные режимы на участке последующего за ним выстоя.

В заключение отметим, что ряд важных вопросов, связанных с обсуждаемой проблемой, нуждаются в отдельном рассмотрении. В частности, в рамках данной статьи мы ограничились анализом влияния низкочастотных составляющих кинематического возбуждения. Между тем, заданные функции программного движения нередко имеют более сложную полигармоническую структуру. Кроме того, в дальнейшем развитии также нуждаются исследования ряда проблем, связанных с влиянием двигателя при учете нелинейных факторов (нелинейные муфты, зазоры, диссипативные силы и др.).

## Список литературы

1. Вейц В.Л.Динамика машинных агрегатов. Л.: Машиностроние,1969. – 370 с.
2. Кононенко В. О. Вопросы теории динамического взаимодействия машины и источника энергии // Изв. АН СССР, МТТ. 1973, №4. С. 19–30.
3. Алифов А. А., Фролов К. В. Взаимодействие нелинейных колебательных систем с источниками энергии. – М.: Наука. 1985. – 328 с.

4. Вейц В.Л., Коловский М.З., Кочура А.Е. Динамика управляемых машинных агрегатов. – М.: Наука, 1984. – 352 с.
5. Коловский М.З. Динамика машин. – Л.: Машиностроение, 1989. – 264 с.
6. Вульфсон И.И., Коловский М.З. Нелинейные задачи динамика машин. – Л.: Машиностроение, 1968. – 284 с.
7. Первозванский А.А., Гайцгори В.Г. Декомпозиция, агрегирование и приближенная оптимизация. М.: Наука, 1979. – 344 с.
8. Банах Л. Я. Методы декомпозиции при исследовании колебаний механических систем. – Ижевск: АНО Ижевский институт компьютерных исследований, 2016. – 291с.
9. Вульфсон И. И. Колебания машин с механизмами циклового действия. – Л.: Машиностроение, 1990, – 309 с.
10. Механика машин: Учебное пособие для втузов /И.И.Вульфсон, М.Л.Ерихов, М.З.Коловский, Э.Е.Пейсах и др.; Под редакцией Г.А.Смирнова.–М.: Высш. шк., 1996. -511 с.
11. Вульфсон И. И. Динамика цикловых машин. – СПб.: Политехника. 2013. – 425 с.
12. Vulfson, I. Dynamics of cyclic machines. (Expanded edition of the monograph [11] translation). – Heidelberg, New York, Dordrecht, London: Springer, 2015. – 410 p.
13. Сорокин Е. С. Динамический расчет несущих конструкций. – М.: Госстройиздат, 1958. – 325 с.
14. Вульфсон И. И. Динамические расчеты цикловых механизмов. Л.: Машиностроение, 1976. - 328 с.
15. Вульфсон И.И. Квазистационарность динамических режимов в цикловых механизмах, образующих реономные колебательные системы с решётчатой структурой. //Проблемы машиностроения и надежности машин. 2015, №4. С. 12–19.

*Дата поступления статьи: 2 февраля 2017 года.*