ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ ГИБКИХ НЕЛИНЕЙНЫХ МАЯТНИКОВЫХСИСТЕМ В УСЛОВИЯХ СИЛОВОГО ПЕРИОДИЧЕСКОГО ВОЗМУЩЕНИЯ

©[1]Бармина О.В., ©[2]Зейтман М.Ф.
[1, 2] ИМАШ РАН, Москва, Россия
[1] barminao@yandex.ru, [2] zeitman@yandex.ru

Аннотация. *Изучается поведение нелинейных гибких маятниковых систем при периодическом возмущении силами высокой частоты и малой амплитуды. В рассматриваемом случае для исследования избран физический маятник с гибким невесомым стержнем и протяженным твердым телом на нижнем конце. Предполагается также ограничение одной следящей силой, приложенной в центре инерции груза и направленной по касательной к упругой линии гибкого стержня маятника. Эта простая схема может быть использована в качестве адекватной динамической модели в исследовании колебаний сложных многоступенчатых механических объектов. Для таких структур применение общепринятых, традиционных построений часто оказываются предметом определенных трудностей из-за неудовлетворительного соответствия их первоначально избранным конструкциям. Приводятся полученные квазилинейные уравнения движения с громоздкими нелинейными группами и всеми признаками параметрического возбуждения. Таковые выражены периодическими коэффициентами не только у линейных координат, характеризующих движение груза маятника, но и при нелинейных членах различной степенной размерности.*

Ключевые слова: *гибкая маятниковая система, невесомый стержень, протяженный груз, периодическое возмущение, нелинейные уравнения движения, параметрическое возбуждение.*

PARAMETRICAL EXCITATION OF THE FLEXIBLE NONLINEAR PENDULUM SYSTEMS AT THE FORCE PERIODICAL DISTURBANCE CONDITIONS

[1]Barmina O.V.,[2] ZeytmanM.F.
[1, 2] IMASH RAS, Moscow, Russia
[1] barminao@yandex.ru, [2] zeitman@yandex.ru

Abstract. *Nonlinear flexible pendulum systems behavior at their disturbance by the periodical forces with a high frequency and small amplitude are studied. In the considered case for a physical pendulum investigation with a flexible weightless rod an extended solid body on a lower end's one is chosen. A limitation by only one succeeding force applied in the mass center load is supposed. That of directed on the rod elastic line tangent of the pendulum. This simple scheme may be used as an adequate dynamical model for a vibration research of the complex multi-stage mechanical structures. An application for such objects the conventional and traditional schemes introduces often the definite difficulties because of their unsatisfactory conformity to the initially chosen constructions. The quasilinear motion equations with the clumsiest nonlinear groups and all parametrical excitation attributes are demonstrated. Those of are expressed by periodical coefficients not only at the linear coordinates characterizing a load pendulum movement but also at the nonlinear terms with the various power dimensionality.*

Key-words: *flexible pendulum system, weightless rod, extended load form, periodical disturbance, nonlinear motion equations, parametrical excitation.*

Усложнение схем, рост числа компонентов в составе машиностроительных конструкций наряду с увеличением их размеров приводит к автономизации движений отдельных узлов и входящих в них элементов. По этой причине традиционно используемые динамические модели при изучении колебаний в машинах оказываются не вполне соответствующими для описания динамики некоторых многосекционных конструкций с не встречавшимися ранее формами движения. В этих случаях целесообразно использовать представления механики, ранее не применявшиеся для описания динамических процессов в системах с относительным движением деформирующихся элементов в условиях многочастотного возбуждения.

К таким моделям можно отнести гибкие маятниковые системы, кинематика которых до удивления корреспондирует движению ряда важных элементов некоторых ответственных машиностроительных конструкций. Наделяя маятниковые схемы широким диапазоном различных свойств, в отношении характера и условий закрепления, вида и направления вектора возмущения, а также комбинации внешних силовых факторов, можно при этом получить широкую гамму удовлетворительных динамических моделей. Таковые отвечают многообразию форм автономного движения в сложных механических системах, для которых традиционные модели в таких случаях часто оказываются несостоятельными.

В статье [1] рассматривалась нелинейная задача о собственных колебаниях физического маятника с гибким стержнем, неподвижной точкой подвеса и упругим защемлением в ней стержня относительно угловых перемещений. Для этой схемы были получены квазилинейные уравнения движения маятника при его собственных колебаниях. Далее изучались лишь малые колебания в условиях исключения нелинейных членов. Более подробно исследовались нелинейные колебания математического маятника с точечной массой на конце. Однако в этом случае модель претерпевала изменения, связанные с уменьшением числа степеней свободы с двух до одной. Такой переход позволял, правда, применить классические аналитические методы для полного решения нелинейной задачи. В [2] изучалась нелинейная динамика гиромаятника при тех же условиях закрепления верхней точки подвеса, что и в [1]. В то же время центр масс ротора и его точка закрепления на гибком валу не совпадали. Источником возбуждения гиромаятника служили силы дисбаланса ротора с частотой его вращения. В [3] рассматривались нелинейные колебания обращенного гироскопического ротора, центр масс которого был выше точки опоры. В [4,5] обсуждались различные задачи вертикальных колебаний и их устойчивости пружинных маятников. В представляющей несомненный интерес монографии [6] рассмотрены классические маятниковые системы с жестким стержнем и точечной массой на конце. Основное внимание уделено здесь различным, иногда весьма сложным, даже многочастотным, формам периодического возбуждения точки подвеса. В предлагаемой работе плоское движение гибкого физического маятника возмущено периодической следящей силой, направленной по касательной к упругой линии стержня. В [1] центр масс нижнего твердого тела считался приблизительно совпадающим с точкой закрепления его на нижнем конце стержня. Иными словами, априори предполагалась малость осевых размеров груза. В настоящей модели он имеет протяженную форму и его центр масс не совпадает с указанной выше точкой, как в [2].

Экваториальный радиус инерции твердого тела в силу его протяженности нельзя считать малым. Одновременно постановка настоящей задачи предполагает массу груза значительной. Отсюда инерционный момент, изгибающий гибкий стержень, должен быть достаточно

большим. В то же время отметим, что из-за малости коэффициента возмущения амплитуда действующей периодической следящей силы предполагается малой, а ее частота – высокой.

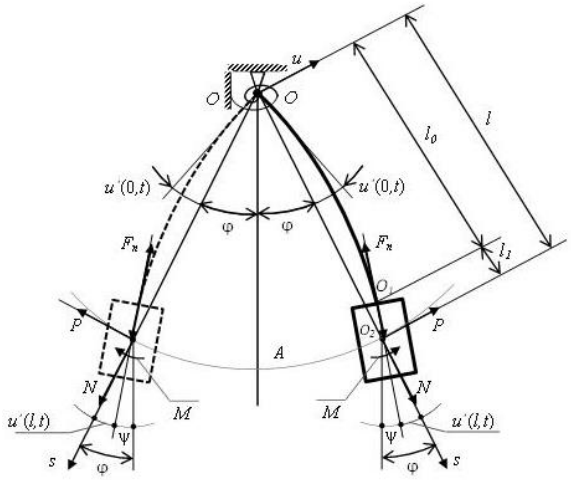


Рис. 1. Динамическая модель маятника с гибким стержнем и протяженной массой на нижнем конце.

1. Для более выразительного получения результатов моделирования рассмотрим простейшую схему из упомянутых выше систем – физический маятник с невесомым стержнем и протяженным твердым телом на нижнем конце (рис. 1). Центр масс груза маятника не совпадает с его точкой закрепления. Благодаря этому стержень имеет два участка: гибкий OO_1 и жесткий O_1O_2. Вертикальная плоскость служит плоскостью качания маятника относительно неподвижного подвеса O. Масса груза – m, его экваториальный радиус инерции относительно оси, перпендикулярный плоскости качания в точке O_2 – ρ. Жесткость стержня на изгиб EI постоянна на всей длине упругого участка OO_1, а относительно угловых смещений он упруго защемлен в точке подвеса O. Последнее моделируется с помощью спиральной пружины, моментная жесткость которой на радиан углового перемещения маятника – k. В рассматриваемой задаче учитываются только изгибные деформации стержня, а продольные не принимаются во внимание вовсе ввиду их малости. Вследствие этого движение центра масс груза осуществляется по дуге окружности [1].

Введем необходимые системы координат и переменные, которые характеризуют положение груза при его плоском движении. Подвижная система координат Ous и неподвижная OAB позволяют исчерпывающим образом определять движение твердого тела m в плоскости качания маятника.

Итак, угол отклонения стержня φ от вертикально направленной неподвижной оси абсцисс OA и ее подвижного аналога Os, проходящего через точки O и O_2, задает расположение центра масс груза. Другой угол ψ характеризует поворот оси симметрии твердого тела, совпадающей с касательной к упругой линии стержня в точки O_1. Он связан с вращением груза в плоскости качания за счет изгиба гибкого стержня относительно подвижной системы координат. Таким образом, обе координаты φ и ψ оказываются необходимыми и достаточными для задания плоскопараллельного движения твердого тела на конце стержня. Несколько слов о выражении возмущающей периодической силы, упомянутой выше. Она представляет собой следящую продольную силу $F_n = mgq_n \sin \omega t$, направленную по касательной к упругой линии стержня в точке O_1. Амплитуда ее мала вследствие малости отвлеченного коэффициента возбуждения q_n. Высокая же ее частота – ω.

2. Ограничившись сделанными замечаниями, сформируем выражения проекций действующих на стержень внешних сил, а также сил инерции и их моментов со стороны груза маятника на оси подвижной системы координат:

$$P = -ml\ddot{\varphi} - mg\sin\varphi + mgq_n \sin\omega t \sin(\varphi - \psi) \quad (1)$$
$$N = ml\dot{\varphi}^2 + mg\cos\varphi - mgq_n \sin\omega t \cos(\varphi - \psi)$$

Момент сил инерции относительно точки O_2 при повороте груза вследствие изгиба стержня [1]:

$$M = -m\rho^2\ddot{\psi} \quad (2)$$

Положительные направления сил P, N и момента M показаны на рис. 1. Прогиб $u(s,t)$ отсчитывается от направленной по нормали оси Os и считается положительным, если он совпадает с направлением P [1].

Запишем условия равновесия действующих на систему внешних силовых факторов вместе с приложенными к ней силами и моментами сил инерции согласно методу кинетостатики:

$$Pl + M - k[\varphi + u'(0,t)] = 0 \quad (3)$$

Кроме того, из геометрических соображений вытекает равенство:

$$\psi = \varphi + u'(l,t) \quad (4)$$

Прогибы гибкого стержня должны удовлетворять дифференциальному уравнению [1]:

$$EIu''(s,t) - Nu(s,t) = P(l-s) + M \text{ для } 0 < s < l_0 \quad (5)$$

а линейные перемещения оси симметрии груза от оси Os соотношениям [2]:

$$u(s,t) = u(l_0,t) + (s-l_0)u'(l_0,t) \text{ при } l_0 < s < l \quad (6)$$

и граничным условиям:

$$u(0,t), \qquad u(l,t) = u(l_0,t) + (l-l_0)u'(l_0,t) = 0 \quad (7)$$

Равенства (6), (7) обусловлены протяженной формой груза. При этом его центр масс априори не совпадает с точкой закрепления массы на гибком стержне, а отсюда и появляются выражения (6), (7).

Общий интеграл (5) имеет вид:

$$u(s,t) = Ach\lambda s + Bsh\lambda s - PN^{-1}(l-s) - MN^{-1},\ \lambda^2 = N(EI)^{-1}. \quad (8)$$

И тогда из (6), (8) с учетом (7) получаются углы наклона касательных к изогнутой оси стержня в соответственных точках:

$$u'(0,t) = N^{-1}[Pc_1(\lambda) + l^{-1}Mc_2(\lambda)] \quad (9)$$
$$u'(l,t) = u'(l_0,t) = N^{-1}[Pc_3(\lambda) + l^{-1}Mc_4(\lambda)],$$

где:

$$c_1(\lambda) = 1 - \lambda l[ch\lambda l_0 + \lambda(l-l_0)sh\lambda l_0]c^{-1}(\lambda), \quad c_3(\lambda) = 1 - \lambda lc^{-1}(\lambda),$$

$c_2(\lambda) = \lambda l[1 - ch\lambda l_0 - \lambda(l - l_0)sh\lambda l_0]c^{-1}(\lambda), \quad c_4(\lambda) = \lambda l(ch\lambda l_0 - 1)c^{-1}(\lambda),$
$c(\lambda) = sh\lambda l_0 + \lambda(l - l_0)ch\lambda l_0.$

Обращаясь целенаправленно к структуре сил *P*, *N* и параметра λ, легко заметить, что все они оказываются нелинейными функциями φ, ψ и их производных. Рассчитывая на дальнейшие приложения излагаемого материала, поставим условием, что угловые отклонения гибкого маятника φ, хотя и конечные, но все же относительно небольшие.

Тогда во всех интересующих нас функциях сохраним величины до третьего порядка малости включительно [1].

Разлагая в степенной ряд тригонометрические функции в (1) и выполняя необходимые преобразования, сначала получим касательную (поперечную) силу

$$P = P_0 + f_1 \tag{10}$$

где линейная часть силы:

$$P_0 = -ml\ddot{\varphi} - mg(1 - q_n \sin\omega t)\varphi$$

и ее же нелинейная группа:

$$f_1 = -mg\psi q_n \sin\omega t + 1/6\, mg\varphi^3(1 - q_n \sin\omega t) + 1/6\, mg\psi^3 q_n \sin\omega t + 1/2\, mg(\varphi^2\psi - \varphi\psi^2)q_n \sin\omega t$$

Сделаем, однако, замечание по составляющим выражения функции f_1. В них порядок малости угла ψ – величины, определяющей изгиб стержня, из соображений механики перемещения, ниже, чем у φ – углового отклонения маятника от вертикали. Умножение ψ на малый коэффициент q_n позволяет признать этот член эквивалентным нелинейному элементу второго порядка малости. Отсюда целесообразность введения этого произведения в группу нелинейных членов f_1. Сохранение периодических компонентов подобного типа в этой группе даст бóльшую возможность оценки влияния на параметрическое возбуждение маятника за счет членов различного уровня малости.

Для нормальной (продольной) силы аналогичным образом можно записать:

$$N = mg(1 + f_2) \tag{11}$$
$$f_2 = l/g\,\dot{\varphi}^2 - \varphi^2/2\,(1 - q_n\, sin\,\omega t) + \psi^2/2\, q_n\, sin\,\omega t - (1 + \varphi\psi)q_n\, sin\,\omega t,$$

В последнем выражении малая периодическая функция $q_n \sin\omega t$, линейная относительно коэффициента q_n, введена формально в группу нелинейных членов f_2. Подобный шаг принципиально ничего не меняет. Однако позволяет упростить дальнейшие разложения в ряды по малой величине f_2 последующих нужных нам функций.

Обратимся теперь к параметру λ, который согласно (8) можно представить в виде:

$$\lambda^2 = \lambda_0^2(1 + f_2), \qquad \lambda_0^2 = mg/EI,$$

Далее, используя биномиальный ряд, получим:

$$\lambda \;\; = \lambda_0\,(1 + f_2/2) \quad \lambda_0 \; = (mg/EI)^{1/2} \tag{12}$$

Из (9), (12) следует, что углы наклона касательной $u'(0,t)$, $u'(l,t)$ представляют собой трансцендентные функции малой переменной f_2. Одновременно эта последняя оказывается величиной второго и третьего порядка малости относительно $\varphi, \psi, \dot{\varphi}$ и малой амплитуды q_n.

Отсюда очевидна целесообразность разложения приведенных выше производных в ряды Тейлора по f_2, с сохранением только ее линейных членов [1,2].

Нетрудно показать, что $N^{-1} = (1 - f_2)/mg$, а после разложения в ряд Тейлора функций $c_k(\lambda)$ $(k = 1, \dots 4)$, из (9) и их подстановки в эти выражения с учетом (12), искомые производные будут [1,2]:

$$\begin{aligned} mgu'(0,t) &= P\{c_1(\lambda_0) + d_1(\lambda_0)f_2\} + Ml^{-1}\{c_2(\lambda_0) + d_2(\lambda_0)f_2\} \\ mgu'(l,t) &= P\{c_3(\lambda_0) + d_3(\lambda_0)f_2\} + Ml^{-1}\{c_4(\lambda_0) + d_4(\lambda_0)f_2\}, \end{aligned} \tag{13}$$

где $d_k(\lambda_0) = 1/2\lambda_0 dc_k(\lambda_0)/d\lambda_0 - c_k(\lambda_0), \quad k = 1, \dots 4.$

Перейдем к аргументам $\vartheta = \lambda_0 l, \vartheta_0 = \lambda_0 l_0$ и полученным из них постоянным $\vartheta_0/\vartheta = l_0/l = \xi$, $\vartheta - \vartheta_0 = \vartheta(1 - \xi)$. Затем запишем значения коэффициентов $c_k(\vartheta, \vartheta_0), d_k(\vartheta, \vartheta_0)$ после элементарных, но трудоемких преобразований:

$$\begin{aligned}
c_1(\vartheta,\vartheta_0) &= \{[1 - \vartheta^2(1-\xi)]th\vartheta_0 - \vartheta\xi\}\delta^{-1}(\vartheta,\vartheta_0) \\
d_1(\vartheta,\vartheta_0) &= 1/2\vartheta\delta^{-1}(\vartheta,\vartheta_0)[1 + \vartheta(1-\xi)th\vartheta_0][1 \\
&\quad + \vartheta\delta^{-1}(\vartheta,\vartheta_0)\{1 + \vartheta\delta^{-1}(\vartheta,\vartheta_0)[1 + \vartheta_0(1-\xi)th\vartheta_0]\}] \\
&\quad - 1/2\vartheta^2\delta^{-1}(\vartheta,\vartheta_0)[th\vartheta_0 + \vartheta_0(1-\xi)] - 1 \\
c_2(\vartheta,\vartheta_0) &= \vartheta[sch\vartheta_0 - \vartheta(1-\xi)th\vartheta_0 - 1]\delta^{-1}(\vartheta,\vartheta_0) \\
d_2(\vartheta,\vartheta_0) &= 1/2\vartheta\{[1 + \vartheta(1-\xi)th\vartheta_0 - sch\vartheta_0][th\vartheta_0 + 2\vartheta(1-\xi) + \vartheta_0 \\
&\quad + \vartheta\vartheta_0(1-\xi)th\vartheta_0]\delta^{-2}(\vartheta,\vartheta_0) \\
&\quad - [\vartheta_0 th\vartheta_0 + \vartheta(1-\xi)th\vartheta_0 + \vartheta\vartheta_0(1-\xi)]\delta^{-1}(\vartheta,\vartheta_0)\} \\
c_3(\vartheta,\vartheta_0) &= 1 - \vartheta\delta^{-1}(\vartheta,\vartheta_0)sch\vartheta_0 \\
d_3(\vartheta,\vartheta_0) &= 1/2\vartheta sch\vartheta_0\{th\vartheta_0 - \vartheta_0[1 + \vartheta(1-\xi)th\vartheta_0]\}\delta^{-2}(\vartheta,\vartheta_0) \\
c_4(\vartheta,\vartheta_0) &= \vartheta(1 - sch\vartheta_0)\delta^{-1}(\vartheta,\vartheta_0) \\
d_4(\vartheta,\vartheta_0) &= 1/2\vartheta\delta^{-1}(\vartheta,\vartheta_0)\{\vartheta_0 th\vartheta_0 \\
&\quad + (sch\vartheta_0 - 1)\big[1 + \vartheta \quad [1 + \vartheta_0(1-\xi)th\vartheta_0]\big]\delta^{-1}(\vartheta,\vartheta_0)\} \\
\delta(\vartheta,\vartheta_0) &= th\vartheta_0 + \vartheta(1-\xi)
\end{aligned} \tag{14}$$

Равенства (13), на первый взгляд, кажутся совпадающими с зависимостями, полученными в [2] для гироскопа с гибким валом. Однако природа периодического возмущения в обоих случаях различна. В [2] оно вызвано дисбалансом ротора, а в рассматриваемой задаче возбуждающая сила действуют в плоскости качания маятника, способствуя продольно-поперечному изгибу гибкого стержня. Поэтому значения формул (14) будут иными.

Подставим теперь (10), (11), (13) в (3), (4) и после, как и ранее, элементарных преобразований получим дифференциальные уравнения движения принятой здесь динамической модели – физического маятника с гибким стержнем и жесткой опорой при воздействии периодической следящей силы высокой частоты

$$\begin{aligned}(1+c_1\beta)\ddot{\varphi}+gl^{-1}[(1+c_1\beta)(1-q_n\sin\omega t)+\beta]\varphi+(1+c_2\beta)\eta^2\ddot{\psi}+F_1\left(\varphi,\dots,\ddot{\psi}\right)\\ =0\\ c_3\varphi+gl^{-1}[c_3(1-q_n\sin\omega t)-1]\varphi+c_4\eta^2\ddot{\psi}+gl^{-1}\psi+F_2\left(\varphi,\dots,\ddot{\psi}\right)\\ =0,\end{aligned} \quad (15)$$

где $\beta=k/mgl\,,\eta=\rho/l-$ безразмерные величины.

Здесь функции F_1, F_2, нелинейные относительно координат и их производных, имеют вид:

$$\begin{aligned}F_1=1/6\ gl^{-1}(\beta c_1+1)\{&(1-q_n\sin\omega t)\varphi^3+[\psi^3+3(\varphi^2\psi-\varphi\psi^2)-6\psi]q_n\sin\omega t\}\\&-g^{-1}l\beta d_1\{[\ddot{\varphi}+gl^{-1}(1-q_n\sin\omega t)\varphi-d_2/d_1\eta^2\ddot{\psi}](\dot{\varphi}^2\\&-1/2\,gl^{-1}\varphi^2+gl^{-1}[1/2\,(\varphi-\psi)^2-1]q_n\sin\omega t)\}\\F_2=1/6\ gl^{-1}c_3\{&[\varphi^3-\psi^3+3(\varphi\psi^2-\varphi^2\psi)+6\psi]q_n\sin\omega t-\varphi^3\}\\&+d_3g^{-1}l[\ddot{\varphi}+gl^{-1}(1-q_n\sin\omega t)\varphi+d_4/d_3\eta^2\,\ddot{\psi}]\{\dot{\varphi}^2-1/2\,gl^{-1}\varphi^2\\&+gl^{-1}[1/2\,(\varphi-\psi)^2-1]q_n\sin\omega t\}\end{aligned} \quad (16)$$

Именно функции (16) в уравнениях (15) свидетельствуют о принадлежности (15) к классу квазилинейных.

Рассмотрение структуры уравнений (15) и равенств (16) позволяет сделать предварительный анализ возможных вибрационных режимов в изучаемой системе. Координата φ в линейной группе уравнений (15) имеет периодические коэффициенты частоты ω и это указывает на существование параметрического возбуждения. Там же вторая переменная ψ свободна от периодических коэффициентов и, казалось бы, вдоль нее параметрическое возбуждение отсутствует. Однако при ближайшем рассмотрении выражений (16) легко убедиться, что в них многие нелинейные члены, в том числе в равной мере и ψ, также обладают периодическими коэффициентами с частотой ω. В связи с этим предстоит определить, какова роль этих компонентов функций F_1 и F_2 в образовании либо качественно новых, либо традиционных колебательных режимов для рассматриваемой модели. Поэтому интегрированию и параметрическому анализу уравнений (15) будет посвящена отдельная работа.

Список литературы

1. Зейтман М.Ф., Кушуль М.Я. Нелинейные колебания упругих маятников с упругими связями. МТТ, 1966, сс. 45-53
2. Кушуль М.Я. Движение гироскопа с гибкой осью под действием силы тяжести и упругих связей при малых углах нутации и устойчивость его вертикального вращения, ПММ, 1968, т. 32, вып. 4, сс. 553-566
3. Zeitman M.F. Nonlinear oscillations of flexible vertical gyroscopic rotors. Proceedings of ENOC-2008, Saint Petersburg, 2008. (http://lib.physcon.ru/file?id=6fd59f15b87e)
4. Pokorny P. Control of stability of nonlinear elastic pendulum. Proceedings of ENOC-2008, Saint Petersburg, 2008. (http://lib.physcon.ru/file?id=bee776e3b376)
5. Pokorny P. Stability Condition for Vertical Oscillation of 3-dim Heavy Spring Elastic Pendulum, Regular and Chaotic Dynamics, 2008, vol. 13, no. 3, pp. 155-165
6. Бурд В.Ш., Крупенин В.Л. Усреднение в квазиконсервативных системах. М.:

«Белый Ветер», 2016, 172 с.

Дата поступления статьи: 10 января 2017 года.