Bulletin of Science and Technical Development

www.vntr.ru № 160, 2021

DOI: 10.18411/vntr2021-160-4

УДК 533.9.01, 536.97

РЕГУЛЯРНЫЙ (ФЛУКТУАЦИОННЫЙ) МЕТОД НАХОЖДЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ СТОЛКНОВЕНИЙ И ПРОБЛЕМА ЛИНЕЙНОГО ОТКЛИКА ПЛАЗМЫ

© **Валерий Фёдорович Туганов**

Институт космических исследований Российской академии наук, Москва, Россия

ya.princet@yandex.ru

Аннотация. *Регулярный (флуктуационный) метод нахождения интегралов столкновений оказался эффективным при решении задачи линейного отклика плазмы. Метод является достаточным и адекватным, если линеаризация происходит в самом уравнении Лиувилля.*

Ключевые слова: *уравнение Лиувилля, регулярные функции и флуктуации, интегралы столкновений, проводимость плазмы и линейный отклик.*

REGULAR (FLUCTUATION) APPROACH TO FINDING THE COLLISION INTEGRALS AND THE PROBLEM OF LINEAR RESPONSE OF PLASMA

© **V.F. Tuganov**

Space Research Institute of the Russian Academy of Sciences (IKI), Moscow, Russia

ya.princet@yandex.ru

Abstract. *The regular (fluctuation) method of finding collision integrals proved to be effective in solving the problem of linear response of plasma. The method is sufficient if the linearization on the external electric field is carry out in the Liouville equation itself.*

Key words: *Liouville equation, regular functions and fluctuations, collisions integrals, plasma conductivity.*

1. **Введение**. Известно, что интегралы столкновений в плазме можно получить из уравнений Лиувилля [1]

$$[\partial/\partial t + \mathbf{v}\nabla + e_n\boldsymbol{\mathcal{E}}\partial/\partial\mathbf{p}]\, N_n = 0 \qquad (1)$$

для точных функций распределения N_n=N_n(t,**r**,**p**) частиц сорта n с координатой **r**, импульсом **p**, зарядом e_n в момент времени t в присутствии самосогласованного поля $\boldsymbol{\mathcal{E}}=\boldsymbol{\mathcal{E}}(t,\mathbf{r})=-\nabla\varphi$, точный потенциал $\varphi=\varphi(t,\mathbf{r})$ которого задан уравнением Пуассона с функцией N_n

$$\Delta\varphi = -4\pi\sum e_n\int d\mathbf{p}\, N_n \qquad (2)$$

Метод предложен Ростокером-Климонтовичем-Силиным (1961-1962 гг.) и систематизирован в [1] (см. § 51). При усреднении системы (1), (2) пространственно-однородная плазма ($\mathbf{v}\nabla$=0) со средней функцией распределения частиц $f_n=f_n(p)=\langle N_n\rangle$ оказывается без поля. В силу её электронейтральности $\sum e_n \int d\mathbf{p} f_n=0$ (см. (2)) среднее поле Власова $\mathbf{e}=<\boldsymbol{\mathcal{E}}>=0$, и кинетическое уравнение для этих функций имеет вид

$$\partial f_n/\partial t = J(f_n), \tag{3}$$

где их флуктуации $\delta f_n=\delta f_n(t,\mathbf{r},\mathbf{p})$ и флуктуации самосогласованного поля $\delta\mathbf{e}=\delta\mathbf{e}(t,\mathbf{r})$ задают интегралы столкновений (см. § 51 и (51.4) [1])

$$J(f_n) = - e_n\, \partial/\partial\mathbf{p}<\delta\mathbf{e}\delta f_n> \tag{4}$$

Интеграл (4) возникает при усреднении третьего члена в (1) по физически бесконечно малым объемам [1]. Произведение точных функций ($N_n=f_n+\delta f_n$) и точного самосогласованного поля ($\boldsymbol{\mathcal{E}}=\mathbf{e}+\delta\mathbf{e}=\delta\mathbf{e}$ при среднем значении $\mathbf{e}=0$) равно коррелятору $<\delta\mathbf{e}(f_n+\delta f_n)>=<\delta\mathbf{e}\delta f_n>$, поскольку $<\delta\mathbf{e}>=0$. Будучи вычислен в [1], он приводит к известному интегралу столкновений

$$J(f_n) = - \pi e_n^2 \sum e_{n'}^2\, L\partial/\partial p_s \int d\mathbf{p}'\delta(\delta_{s\sigma} - u_s u_\sigma/u^2)/u \times$$
$$\times [\partial f_n/\partial p_\sigma f_{n'} - f_n\, \partial f_{n'}/\partial p'_\sigma] = - \tilde{\nu}_n^{(f-p)}(\mathbf{p})\, f_n \quad , \tag{5}$$

- оператор которого $\tilde{\nu}_n^{(f-p)}(\mathbf{p})$ имеет фоккер-планковскую форму Ландау [2] (s, σ=1, 2, 3, L – кулоновский логарифм, а $\mathbf{u}=\mathbf{v}-\mathbf{v}'$ - относительная скорость частиц)

$$\tilde{\nu}_n^{(f-p)}(\mathbf{p}) = - \partial/\partial p_s[D_{s\sigma}^{(n)}(\mathbf{p})\partial/\partial\, p_\sigma - A_s^{(n)}(\mathbf{p})] \tag{6}$$

Коэффициенты диффузии $D_{s\sigma}^{(n)}(\mathbf{p})$ и силы трения $A_s^{(n)}(\mathbf{p})$ определены в (5) и в (51.21) [1], и последние (что важно) заданы ненулевыми начальными условиями флуктуаций $\delta f_n(0,\mathbf{r},\mathbf{p})\neq 0$.
Эту же форму (6) в интеграле (5) и кинетическое уравнение (3) подтверждает и метод корреляционных функций Боголюбова (см. (10.22) [3]). Но отсюда вовсе не следует, что Боголюбов доказал адекватность использования интеграла (5) в уравнениях плазмы с внешним полем (8) [2], (41.13) [1] (см. так же и соответствующие уравнения в [5-7]): такого типа уравнений в монографии [3] нет. Как нет ни внешнего поля, ни столкновительных членов и в уравнениях Власова [4]: приняв для них форму интеграла (5), он посчитал их малыми[1] [5].
Подтвердив эти оценки, Боголюбов показал [3], что в формальном разложении функций распределения (10.17), как и кинетических уравнений (10.18) поле Власова появляется в первом приближении по параметру взаимодействия частиц ($\sim e_n^2$), а во втором ($\sim e_n^4$) - интеграл столкновений Ландау. Но выделив при этом два конкретных кинетических уравнения, Боголюбов рассматривает их отдельно: это уравнение пространственно-неоднородной плазмы с самосогласованным полем (10.20), но без интеграла Ландау (5), и

[1] При этом эксперименты группы Бучельниковой [8] показывают, что и при малых параметрах иногда необходим совместный учёт разных механизмов [9]. Поучителен в этой связи и пример пучковой диагностики полоидальных магнитных полей [10]. Оказалось, что, - при взаимодействии атома водорода с электрическим полем Лоренца (штарк-эффект) даже на порядок большем, чем с магнитным полем (зееман-эффект), - пренебрегать последним нельзя. Существующая здесь ось квантования совместного штарк-зеемановского эффекта – повёрнута относительно оси чисто штарковского эффекта на угол φ_n (n - номер уровня). Будучи задан отношением зеемановской частоты к штарковским, он сравним с углом поворота магнитного поля на полоидальный угол φ_p, с которым вместе и определяют максимум поляризации излучения. Поэтому, пренебрегая этим углом в теории и интерпретации эксперимента, - что и предполагали создатели штарковской диагностики, – можно существенно ошибиться в определении угла φ_p, особенно при $\varphi_n \geq \varphi_p$.

уравнение (10.22) для однородной плазмы, в которой и получен этот интеграл (см. (3)), но нет поля Власова.

То есть, ни у Боголюбова [3], ни у Власова [4] нет кинетического уравнения, где столкновения с оператором в форме Ландау (6) учитываются совместно с полями: чисто внешними, как в (41.13) [1], или с самосогласованными - см., например, в работах [5-7]. Поэтому ссылки авторов [5-7] на работы [3, 4] явно неадекватны. А что до уравнения (8) [2], - оно, по-видимому, для того и понадобилось Ландау, чтобы по размерности оценить коэффициенты электро – и теплопроводности плазмы: основная задача его работы – передача энергии между ионами и электронами, - что и отмечено в аннотации [2]. Тем не менее уравнения такого типа

$$[\partial/\partial t + \mathbf{v}\nabla + e_n\boldsymbol{E}\partial/\partial\mathbf{p}]f_n = J_n(f_n) = -\tilde{\nu}_n^{(f\text{-}p)}(\mathbf{p})f_n \tag{7}$$

используют до сих пор (см., например, [11]) в проблеме отклика плазмы на внешнее поле $\mathbf{E}=\mathbf{E}(t,\mathbf{r})$, порождающее в (7) действующее поле $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}(t,\mathbf{r})$

$$\boldsymbol{E} = \mathbf{E} + \boldsymbol{e}, \tag{8}$$

где $\boldsymbol{e}=\boldsymbol{e}(t,\mathbf{r})$ - среднее поле Власова.

2. **Проблемы и противоречия метода «вторичной линеаризации» интегралов нулевого приближения по полю.** Казалось бы, всё просто: однородную и устойчивую (равновесную) плазму поместили во внешнее поле **E**, система стала нестационарной и неоднородной. На имеющемся фоне плазмы с функциями $f_n=f_n(p)$ появились линейные к ним добавки $F_n=F_n(t,\mathbf{r},\mathbf{p})$ и в целом неоднородные функции $f_n=f_n(t,\mathbf{r},\mathbf{p})=f_n+F_n$. Заменив функции f_n в интеграле (5), f_n приводят к регулярному полю Власова $\boldsymbol{e}=-\nabla\Phi$ с линейным по нему потенциалом $\Phi=\Phi(t,\mathbf{r})$. Но задан он в уравнении Пуассона только добавкой F_n ($\sum e_n\int d\mathbf{p}f_n=0$)

$$\Delta\Phi = -4\pi\sum e_n\int d\mathbf{p}F_n, \tag{9}$$

Из (7), (9) и уравнения для действующего поля (8), перейдя к их фурье-представлению, можно определить диэлектрическую проницаемость (ДП) плазмы $\varepsilon(k)$ и её проводимость $\sigma(k)$, обусловленную столкновениями с оператором (6) (четырёх-вектор $k=(\omega,\mathbf{k})$, ω и $\mathbf{k}$ – частота и волновой вектор поля). Считают, что переход от уравнения (3) с интегралом (5) и оператором (6) к уравнению (7), - а в пренебрежении полем Власова ($\boldsymbol{e}=0$) это и есть уравнение (41.13) [1] с внешним полем **E**, - возможен лишь при ограничениях (41.14) [1] [2]

$$\omega \ll u/d, \quad |\mathbf{k}| \ll 1/d, \tag{10}$$

где u – относительная скорость частиц, d дебаевский радиус.

Здесь два момента: как критерий применимости оператора (6) к задаче отклика условия (10) практически до нуля сужают его использование – это запрещено даже для ленгмюровских волн, частота которых $\omega\geq\Omega_p$ – плазменная частота [4]. Но главное в другом: оператор (6) вообще не адекватен этой задаче. А суть её такова, что моменты «включения» взаимодействия частиц и появления поля **E** достаточно разделены: до его включения плазма как объект исследований уже создана. И исследуя линейную по полю добавку F_n к фоновой функции f_n только и можно исследовать объект, его состояние. Но на равновесном (устойчивом) фоне, как в [2], или турбулентном, - как в [12-15], появляются и линейные по полю флуктуации: δF_n и рождаемый ими потенциал $\delta\Phi$ (поле $\delta\mathbf{E}$). Причём их начальные

[2] У Ландау [2] никаких пояснений нет, а у Боголюбова [3] нет и интегралов (5) для плазмы с такой функцией f_n.

условия $\delta F_n(0,\mathbf{r},\mathbf{p})=0$ (ср. $\delta f_n\neq 0$ в (6)) как раз и ведут к диффузионному оператору (12) в линейном по полю интеграле (23).

Всё, что вне этого – другая задача: например, плазма, появившаяся вместе с полем.

В этом смысле ни Боголюбов, ни его метод нахождения интегралов столкновений (10.22) [3] не решают проблему отклика. Для этого необходимо, - изначально рассмотрев уравнения для функций распределения частиц и корреляционных функций в нулевом и первом приближении по полю, - решать их по теории возмущений, с нулевыми начальными условиями для последних: до поля не было ни этих добавок F_n, ни отвечающих им флуктуаций δF_n.

Что и учитывает флуктуационный подход к интегралам столкновений [17-20, 9]: нет поля, нет ни функций F_n ($F_n(0,\mathbf{r},\mathbf{p})=0$), ни их флуктуаций δF_n (с $\delta F_n(0,\mathbf{r},\mathbf{p})=0$). Но если вводят эти линейные по полю добавки F_n (см., например, [11, 21]), то почему, зная вид интеграла (4), ищут интегралы в линейных по полю уравнениях, учитывая всё тот же коррелятор $\langle\delta\mathbf{e}\delta f_n\rangle$ в (4) с флуктуациями $\delta\mathbf{e}$, δf_n в его отсутствие? Значит, введя регулярные добавки F_n к функциям f_n, нельзя не учесть и линейные по полю добавки δF_n, $\delta\mathbf{E}$ к имеющимся флуктуациям δf_n, $\delta\mathbf{e}$. Ведь внешнее поле $\mathbf{E}$, не отменяя случайный процесс в устойчивой (равновесной) плазме, меняет лишь его тип, форму интеграла столкновений частиц. И, перераспределяя с функцией F_n частицы, перенормирует их взаимодействие: иначе не возникло бы самосогласованное поле $\boldsymbol{e}$, направленное в устойчивой плазме против внешнего поля $\mathbf{E}$ (принцип Ле Шателье-Брауна).

Все эти новеллы (открытия) собственно и отличают флуктуационный метод от метода «вторичной линеаризации» интегралов нулевого приближения: линеаризуя в (7) интегралы (5), - по сути линеаризуя блок $[\partial f_n/\partial p_\sigma\, f_{n'} - f_n\, \partial f_{n'}/\partial p'_\sigma]$ с $f_n=f_n+F_n$, имеющий место и в (5), и в корреляционных функциях Боголюбова (10.22) [3] (так же найденных без поля и в однородной плазме), - получают ту же форму оператора (6), но уже в линейном по полю интеграле $J(F_n)$ для добавки F_n. См. уравнение (4) [21] и формулу (63.1) в [22], где учёт периодического движения частиц с частотой $\omega>>\Omega_p$ был систематизирован и на случай магнитного поля[3].

Но при этом сам переход от общего уравнения (7) для f_n к линейному по полю для F_n

$$[\partial/\partial t + \mathbf{v}\nabla]F_n + e_n\boldsymbol{E}\partial f_n/\partial\mathbf{p} = J(F_n) = -\,\bar{\nu}_n^{(f\text{-}p)}(\mathbf{p})\,F_n \qquad (11)$$

противоречит ещё и диффузионному оператору

$$\bar{\nu}_n(k,\mathbf{p}) = -\,\partial/\partial p_s\, D^{(n)}{}_{s\sigma}(k,\mathbf{p})\,\partial/\partial p_\sigma \qquad (12)$$

интегралов столкновений

$$I(\delta f_n) = -\,\bar{\nu}_n(k,\mathbf{p}))\delta f_n(k,\mathbf{p}) \qquad (13)$$

в линейных по полю $\delta\mathbf{e}_k$ кинетических уравнениях Власова для фурье-компонент $\delta f_n=\delta f_n(k,\mathbf{p})$ [12-15][4]

$$i[\mathbf{kv} - \omega - i\,\bar{\nu}_n(k,\mathbf{p})]\delta f_n(k,\mathbf{p}) + e_n\delta\mathbf{e}_k\,\partial f_n(p)/\partial\mathbf{p} = \delta f_n(0,\mathbf{k},\mathbf{p}), \qquad (14)$$

---

[3] Это важный этап в развитии физической кинетики, тем более для плазмы в магнитном поле. Своевременным было и знакомство с монографией [21] в теоротделе ФИАНа до её публикации: способствовало интересу к дальнейшим исследованиям [23-25], в том числе и к проблеме линейных по полю интегралов столкновений (см., например, [17-20, 9]).

[4] В чём легче всего убедиться, следуя используемому в [15] подходу, который напрямую подтверждает диффузионный, а не фоккер-планковский характер уширения плазменных резонансов (см. оператор (2.180).

где $\delta f_n(0,\mathbf{k},\mathbf{p})\neq 0$ – начальные условия (см. первое уравнение в (51.11)) с пояснениями к (51.7) [1], где столкновения не учтены). В операторе (12) коэффициент диффузии

$$D^{(n)}_{s\sigma}(k,\mathbf{p}) = -\,ie_n^2 \int dq\ q_s q_\sigma\ G_n(k-q,\mathbf{v})\ (\delta\varphi^2)_q, \qquad (15)$$

где $\mathbf{v}$ – скорость частицы, $dq=d\Omega d\mathbf{q}/(2\pi)^4$, четырёх-вектор $k=(\omega,\mathbf{k})$, а в функции

$$G_n(k-q,\mathbf{v}) = 1/[(\mathbf{k}-\mathbf{q})\mathbf{v}-(\omega-\Omega)-io] \qquad (16)$$

обратное правило обхода полюса: см. сноску[2] к (51.21) [1]. Операторы (12) и (6), не совпадая по форме, имеют ещё и разные коэффициенты диффузии, заданные, правда, одной и той же спектральной плотностью флуктуаций плазмы $(\delta\varphi^2)_q$ (51.20) [1] (для равновесной см - (51.25)). Причём оператор столкновений $\breve{\nu}_n(k,\mathbf{p})$ содержит как радиационный коэффициент действительную и мнимую часть и, - обнаруживая эффект Крамерса-Гинзбурга [26, 27] (зависит от $k=(\omega,\mathbf{k})$), - снимает ограничения (10). Ничего этого нет у оператора $\breve{\nu}_n^{(f-p)}(\mathbf{p})$ в уравнениях (7), (11), более того он ещё и не тождествен оператору в интегралах (13), учитывающих влияние столкновений на уширение плазменных резонансов в уравнениях (14) для $\delta f_n(k,\mathbf{p})$ [12-15]. Но разные операторы столкновений в линеаризованных уравнениях Власова (11) и (14) – это разные проводимости $\sigma(k)$ плазмы для полей ($\boldsymbol{E}$ и $\delta\mathbf{e}$) одного (продольного) типа. А проводимости, будучи характеристикой одной и той же среды, должны быть инвариантны относительно того, где (в какой теории) и как (каким методом) получены[5].

3. **Флуктуационный метод нахождения интегралов столкновений.** Следовательно, есть потребность в регулярном методе линеаризации, который снял бы эти проблемы, заменив в уравнении (11) фоккер-планковский оператор (6) на диффузионный (12). Показав тем самым, что извлекать линейные по полю интегралы столкновений, «вторично линеаризуя» интегралы нулевого приближения (5) (см. (4) в [21]), - метод хоть и простой, но неадекватный.

В связи с чем вполне подойдет всё тот же флуктуационный подход, составляющий суть регулярного метода нахождения интегралов столкновений, что систематизирован в § 51 [1]. Достаточно лишь расширить его, - изначально проведя линеаризацию в самом уравнении Лиувилля. Если флуктуации $\delta\mathbf{e}$, δf_n задают интегралы (4) в нулевом по полю приближении, то линейные по нему интегралы должны быть выражены через соответствующие к ним добавки $\delta\mathbf{E}$, δF_n и отвечающий им коррелятор [17-19, 9].

Действительно, - если с включением внешнего поля $\mathbf{E}$, вводят линейные по нему добавки F_n, заданный ими потенциал Φ (9), приводящий к среднему полю Власова $\boldsymbol{e}=-\nabla\Phi$ и действующему в плазме полю $\boldsymbol{E}=\mathbf{E}+\boldsymbol{e}$ (8), - нельзя не ввести и их флуктуации δF_n: они задают линейные добавки $\delta\Phi$ и $\delta\mathbf{E}=-\nabla\delta\Phi$ к флуктуациям потенциала и поля.

С учётом их появления интеграл столкновений для добавок F_n должен по логике интеграла (4) отвечать простой его симметризации

$$I(F_n,\boldsymbol{E}) = -\,e_n\partial/\partial\mathbf{p}\langle\delta\mathbf{e}\delta F_n + \delta\mathbf{E}\delta f_n\rangle, \qquad (17)$$

- ничего другого, линейного по полю нельзя составить из 4-х разных флуктуаций, попарно их перемножив. Что и получится, если линеаризацию начинать не с функций f_n в интеграле (5) уравнений (7) (см. (4) в [21]), а из уравнения Лиувилля

[5] Методы в [12-15] достаточно сложные, разные, но результаты по форме оператора $\breve{\nu}_n(k,\mathbf{p})$ совпадают.

$$[\partial/\partial t + \mathbf{v}\nabla + e_n(\mathbf{E} + \boldsymbol{\mathcal{E}})\partial/\partial\mathbf{p}]\, N_n = 0 \qquad (18)$$

Здесь $N_n=N_n(t,\mathbf{r},\mathbf{p})$ - точные флуктуирующие функции распределения заряженных частиц в точном поле плазмы $\mathbf{E}+\boldsymbol{\mathcal{E}}$, флуктуирующем вместе с точным самосогласованным полем $\boldsymbol{\mathcal{E}}=\boldsymbol{\mathcal{E}}(t,\mathbf{r})=-\nabla\varphi$, потенциал которого $\varphi=\varphi(t,\mathbf{r})$ задан функциями N_n в уравнении (2).

Усредняя систему (18), (2), выделим в средних функциях $f_n=<N_n>$, $\varphi=<\varphi>$ ($\boldsymbol{e}=<\boldsymbol{\mathcal{E}}>$) регулярные функции нулевого (f_n, φ) и первого (F_n, Φ) приближений по полю с уравнениями (3) и

$$[\partial/\partial t + \mathbf{v}\nabla]F_n + e_n\boldsymbol{E}\partial f_n/\partial\mathbf{p} = I(F_n,\boldsymbol{E}) \qquad (19)$$

Что, сменив интеграл $J(F_n)$ с оператором (6) на интеграл $I(F_n,\boldsymbol{E})$ (17), как раз и приводит левую потоковую часть уравнения (11) к уравнению (19) с начальным условием $F_n(0)=F_n(0,\mathbf{r},\mathbf{p})=0$. Это следует из усреднения $<(\boldsymbol{E}+\delta\mathbf{e}+\delta\mathbf{E})(f_n+F_n+\delta f_n+\delta F_n)>\approx<\delta\mathbf{e}\delta f_n>+\boldsymbol{E}f_n+<\delta\mathbf{e}\delta F_n+\delta\mathbf{E}\delta f_n>$ в (18) третьего члена, - за вычетом коррелятора $<\delta\mathbf{e}\delta f_n>$ (4), произведения средних $\boldsymbol{E}f_n$ (см. $\boldsymbol{E}\partial f_n/\partial\mathbf{p}$ в (19)) и квадратичных по полю членов $\delta\mathbf{E}\delta F_n$ [17-20, 9].

Уравнения линейных по полю флуктуаций находятся так же, как и для флуктуаций без поля в [1]: вычитанием усреднённых уравнений из уравнений Лиувилля (18). Пренебрегая влиянием столкновений на флуктуации[6], получим в представлении фурье (включая и уравнение (2))

$$\delta\Phi_q = 4\pi/q^2\sum e_n\int d\mathbf{p}\,\delta F_n(q,\mathbf{p}) \qquad (20)$$

$$i[\mathbf{qv} - \Omega]\delta F_n(q,\mathbf{p}) - e_n\, i\mathbf{q}\delta\Phi_q\, \partial f_n/\partial\mathbf{p} + e_n\int dq'dq''\, \delta(q-q'-q'')\, \partial/\partial\mathbf{p}\, \times$$
$$\times\, [i\mathbf{q}'\delta\varphi_{q'}F_n(q'',\mathbf{p}) + \boldsymbol{E}_{q''}\, \delta f_n(q',\mathbf{p})] = \delta F_n(0,\mathbf{q},\mathbf{p}) = 0, \qquad (21)$$

где $q=(\Omega,\mathbf{q})$, $dq=d\Omega d\mathbf{q}/(2\pi)^4$, $\delta\mathbf{e}_q=-i\mathbf{q}\delta\varphi_q$, $\delta\mathbf{E}_q=-i\mathbf{q}\delta\Phi_q$.

Подставив (21) в (20) и вычислив линейные по полю флуктуации потенциала

$$\delta\Phi_q = 4\pi/\varepsilon(q)q^2 \sum e_{n'}^2\int d\mathbf{p}'G_{n'}(q,\mathbf{v}') \times$$
$$\times \int dq'dq''\delta(q-q'-q'')\, \partial/\partial\mathbf{p}' \times$$
$$\times\, [\mathbf{q}'\delta\varphi_{q'}F_{n'}(q'',\mathbf{p}') - i\boldsymbol{E}_{q''}\delta f_{n'}(q',\mathbf{p}')], \qquad (22)$$

- можно вычислить интеграл (17)[7]. Здесь $G_n(q,\mathbf{v})=1/[\mathbf{qv}-(\Omega+io)]$ с известным правилом обхода полюса, $\mathbf{v}$ – скорость частицы. Продольная диэлектрическая проницаемость ε(q) в (22) та же, что и в (29.9) [1] - бесстолкновительная. Но если учесть в (17) только первый член, а в квадратных скобках (21), так же оставив лишь первое слагаемое, пренебречь членами с полем $\boldsymbol{E}$ и интегральными по F_n членами, - легко увидеть фурье-компоненту чисто столкновительной части интеграла (17), что выявлен в [17]

$$I(F_n) = -\,\bar{\nu}_n(k,\mathbf{p})\,F_n(k,\mathbf{p}) \qquad (23)$$

Это интеграл столкновений для функций $F_n=F_n(k,\mathbf{p})$ в линеаризованном уравнении Власова (19), но без учёта в (17) эффекта перенормировок и других членов

[6] Здесь линейные по полю интегралы (4) за вычетом не усреднённых их слагаемых. Что, представляя отдельную задачу, рассмотрено для свободно-свободных переходов в [19, 12-15], причем так, что разные методики приводят к одному и тому же интегралу столкновений (13) с оператором (12). Некоторые другие случаи, в том числе и для атомов, - приведены в [19, 20]).

[7] В отличие от интеграла (4) (см. (5), (6)) в интеграле (17) нет конвективного члена: начальные флуктуации функций $\delta F_n(0)=0$ (см. (21)) и соответствующий коррелятор $<\delta\mathbf{e}\delta F_n(0)>=0$.

$$i[\mathbf{kv} - \omega - i\bar{\nu}_n(k,\mathbf{p})]F_n(k,\mathbf{p}) + e_n\boldsymbol{E}_k\,\partial f_n(p)/\partial\mathbf{p} = F_n(0,\mathbf{k},\mathbf{p}) = 0 \qquad (24)$$

Он полностью тождествен интегралу столкновений (13) с оператором (12) в линейном по полю $\delta\mathbf{e}_k$ уравнении Власова (14) для флуктуаций δf_n. Это показывает, что «*важные, но не доказанные допущения*», - как пишет автор [16] о диффузионном характере уширения плазменных резонансов в [12-15], - оказались, однако, адекватны очевидному и доказанному «критерию (принципу) инвариантности» проводимости плазмы (см. пояснения в конце п. 2). Здесь и независимость её от методов нахождения, равно как и от теории, где она исследуется. То есть, авторы [12-15], предвидь этот критерий и зная уравнение (24), могли бы сразу прийти к уравнению (14): флуктуационный подход к решению задачи линейного отклика дал бы им интеграл (23) с диффузионным оператором (12) в интеграле (13). Что, конечно, не умаляет развитый ими математический аппарат в решении уравнений Власова с квадратичными по флуктуациям членами в правой части первого уравнении системы (51.11) [1].

Как и в (15), функция $G_n(k\text{-}q,\mathbf{v})$ определена в бесстолкновительном приближении для оператора в (23). Но учитывая влияние столкновений на флуктуации $\delta f_n(k,\mathbf{p})$ (см. (14)), можно заменить (16) в (12) и (15) на оператор, формально представив его в виде

$$\bar{G}_n(k\text{-}q,\mathbf{v}) = 1/[(\mathbf{k\text{-}q})\mathbf{v} - (\omega\text{-}\Omega) - i\bar{\nu}_n(k\text{-}q,\mathbf{p})] \qquad (25)$$

Усложнив расчёты интеграла (23), это сильно изменит результат решения уравнения (24), в том числе и для резонансных частот ($\omega=\Omega\approx\Omega_p$). А именно здесь в экспериментах группы Бучельниковой [8] и выявлены проблемы с интерпретацией затухания ленгмюровских волн, превышающего уровень затухания Ландау. Несколько упростит ситуацию модель плазмы с Лоренцевым интегралом электрон-ионных столкновений (n=e – электрон, эффективный заряд ионов Z>>1). Оператор $\bar{\nu}_n(k,\mathbf{p})$ (12) в (13), (24) и (25) перейдёт в эффективную частоту столкновений электронов $\nu_e(k,\mathbf{v})$ [17, 9], которая получается точно таким же образом, как и в § 44 [1]. Но не из интеграла (5) с оператором (6) при ограничениях (10), а из интеграла (23) с оператором (12), зависящим от галилей-инвариантной частоты ω-$\mathbf{kv}$.

Это заменит ДП плазмы $\varepsilon(k)$ (29.9) [1] на ДП, учитывающую столкновения с частотой $\nu_e(k,\mathbf{v})$. А если в уравнении (19) учесть и перенормировочную часть интеграла (17) это изменит ДП плазмы до перенормированных значений $\tilde{\varepsilon}(k)$. Перейдя к фурье-представлению уравнений (8), (9), (19) и учтя выражение для $F_n(q,\mathbf{p})$ в фурье-компоненте потенциала Φ_k (см. (9)), а его в уравнении $\boldsymbol{E}_k=\mathbf{E}_k+\boldsymbol{e}_k$ (8) ($\boldsymbol{e}_k=-i\mathbf{k}\delta\Phi_k$), получим для внешнего и действующего полей

$$\boldsymbol{E}_k = \mathbf{E}_k/\tilde{\varepsilon}(k) \qquad (26)$$

связь с этой ДП плазмы $\tilde{\varepsilon}(k)$. Будучи частью отклика среды $\boldsymbol{E}_k$ (26), поле Власова

$$\boldsymbol{e}_k = \mathbf{E}_k\,[1/\tilde{\varepsilon}(k)\text{-}1] \qquad (27)$$

задано функцией $F_n(k,\mathbf{p})$, перераспределяющей частицы в устойчивой системе. Значит поле $\boldsymbol{e}_k$ должно уменьшать воздействие на неё внешнего поля $\mathbf{E}_k$ (принцип Ле Шателье-Брауна). Отсюда и допустимые значения статической ДП плазмы

$$1/\tilde{\varepsilon}(0.\mathbf{k}) - 1 \le 0, \qquad (28)$$

включающие и $\tilde{\varepsilon}(0.\mathbf{k})\ge 1$, и $\tilde{\varepsilon}(0.\mathbf{k})<0$. Применительно к проблеме высокотемпературной сверхпроводимости такие ограничения, обсуждаемые при её решении, рассмотрены в [27].

4. **Заключение.** Перспективы применения и развития флуктуационного метода к интегралам столкновений (см. § 51 [1]) имеют далеко идущие последствия. Будучи новым при их нахождении в линейном по полю приближении и приводя к новой форме (12) интеграла (23), метод расширяет саму суть проблемы отклика, углубляя и её понимание. Полученные уравнения (17)-(28), показав существенную роль самосогласованных полей Власова в её решении, содержат ещё и новый подход к задаче о перенормировках взаимодействия частиц**.** Что придаёт всем здесь новеллам (открытиям) и некий «забег в ширину»: уравнения такого типа (см. (26)), связывающие действующее поле с внешним («затравочным»), используют, например, в теории сверхпроводимости, правда, для кулоновского взаимодействия пары электронов [27]. Однако множитель типа $4\pi/\varepsilon(q)|\mathbf{q}|^2\sum e_{n'}^2$ присутствует и в потенциале (22), - правда, с ДП $\varepsilon(q)$ изначально простого вида (29.9) [1] - без столкновений и перенормировок. Но выявленная в [17] инвариантность проводимости, - ставшая очевидной и доказанной (см. тождество интегралов столкновений (13), (23) в уравнениях Власова (14)), (24)), - позволяет и для потенциала $\delta\Phi_q$ (22) получить точно такую же, как в (26), замену бесстолкновительной $\varepsilon(q)$ на ДП с учётом влияния столкновений типа (13), (23) и на флуктуации δF_n. А важный здесь, в отличие от флуктуаций δf_n, эффект перенормировок ДП до значений $\widetilde{\varepsilon}(q)$ ещё и актуализирует непосредственный расчёт такого эффекта любым из методов [12-15]. Речь об учёте квадратичных по флуктуациям слагаемых в правой части уравнений для флуктуаций δF_n: в (21) их нет, хотя именно они и содержат линейные по полю интегралы (17) за вычетом не усреднённых их слагаемых, - в целом зависящих от поля $\boldsymbol{E}_k$ (8), а значит и от поля Власова $\boldsymbol{e}_k$, задающего эти перенормировки.

Список литературы

1. Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Физическая кинетика. – М.: Наука, 2003.
2. Ландау Л.Д. Кинетическое уравнение в случае кулоновского взаимодействия // ЖЭТФ. - 1937. - т. 7. - с. 203 [L. D. Landau, Phys. Z. Sowjetunion 10, 154 (1936)].
3. Боголюбов Н.Н. Проблемы динамической теории в статистической физике. - М.: Гостехиздат, 1946.
4. Власов В. П. О вибрационных свойствах электронного газа // ЖЭТФ. – 1938. - т. 8. – с. 291 [Воспроизведено в УФН. – 1967. - 93. – С. 444–470].
5. Александров А.Ф., Рухадзе А.А. К истории основополагающих работ по кинетической теории плазмы // Физика плазмы. – 1997. – т. 23. – С. 474.
6. Рухадзе А.А., Силин В.П. От лорда Рэлея до профессора А.А. Власова // УФН. – 2019. - т. 189. № 7. – С. 739-746.
7. Рухадзе А.А. Основные этапы развития фундаментальной физики бесстолкновительной плазмы // Вопросы атомной науки и техники (Плазменная электроника и новые методы ускорения). – 2015. – т. 4. – С. 3-8.
8. Бучельникова Н.С., Маточкин В.П. Затухание ленгмюровских волн большой амплитуды в бесстолкновительной плазме // Физика плазмы. – 1980. - т. 6. – № 5. - С. 1079-1104.
9. Туганов В.Ф. О поглощении ленгмюровских волн в плазме. Затухание Ландау и роль столкновений. Международная конференция MSS-09 «Трансформация волн, когерентные структуры и турбулентность» (Москва, ИКИ РАН, 2009), сб. трудов, ЛЕНАНД, Москва (2009), С. 100-105.
10. Tuganov V.F. Stark-zeeman effect and diagnostics of the poloidal magnetic fields in tokamaks Plasma Physics Reports. - 1996. – v. 22, - P. 174-176.

11. Вейсман М. Е., Андреев Н. Е., Г. Г. Матевосян и др. Широкодиапазонная диэлектрическая проницаемость столкновительной плазмы с произвольным зарядом ионов // Доклады НАН РА (ФИЗИКА). - 2017. – v. 117, - С. 222-233.
12. Dupree T.H. A Perturbation Theory for Strong Plasma Turbulence // Phys. Fluids. – 1966. – v. 9. – P. 1773-1782.
13. S.A. Orsag and R. H. Kraichnan. Model equations for strong turbulence in a Vlasov plasma. // Phys. Fluids. – 1967. - v. 10. – P. 1720-1782.
14. Weinstock T. Formulation of a statistical theory of strong plasma turbulence. // Phys. Fluids. - 1969. - v. 12. – P. 1045-1058.
15. Цытович В.Н. Теория турбулентной плазмы. - М.: Атомиздат, 1971.
16. Сизоненко В.Л. Нелинейное движение частиц плазмы в турбулентных электрических полях // Вопросы атомной науки и техники (Плазменная электроника и новые методы ускорения). - 2008. – т. 4.- № 6. - С. 250-254.
17. Туганов В.Ф. Флуктуации и регулярный метод нахождения интегралов столкновений в линеаризованных кинетических уравнениях Препринт № 0096-А. – Троицк: ГНЦ РФ ТРИНИТИ, 2002.
18. Туганов В.Ф. Плазменное эхо и диагностика методов линеаризации интегралов столкновений в кинетических уравнениях. Международная конференция MSS-09 «Трансформация волн, когерентные структуры и турбулентность» (Москва, ИКИ РАН, 2009), сб. трудов, ЛЕНАНД, Москва (2009), С. 147-152.
19. Туганов В.Ф. Регулярный метод нахождения интегралов столкновений в линеаризованных кинетических уравнениях и радиационные «константы» атомов в плазме // Международная конференция MSS-14 «Трансформация волн, когерентные структуры и турбулентность» (Москва, ИКИ РАН, 2014), сб. трудов. – М.: ЛЕНАНД, 2014. - С. 94-99. URL: http://www.iki.rssi.ru/conf/2014mss/MSS-14_files/Sec1/MSS14-1-16.pdf
20. Туганов В.Ф. Диэлектрическая проницаемость и форма интегралов столкновений в линеаризованных кинетических уравнениях плазмы // Международная конференция MSS-14 «Трансформация волн, когерентные структуры и турбулентность» (Москва, ИКИ РАН, 2014), сб. трудов. – М.: ЛЕНАНД, 2014. - С. 100-105. URL: http://www.iki.rssi.ru/conf/2014mss/MSS-14_files/Sec1/MSS14-1-15.pdf
21. Силин В.П. Кинетическое уравнение для быстропеременных процессов // ЖЭТФ. – 1960. –v. 38. – С. 1771-1777 [V.P. Silin Kinetic equation for rapidly varying processes // JETF. - 1960. – v. 11. – P. 1277-1280].
22. Силин В.П. Введение в кинетическую теорию газов. – М.: Наука, 1971.
23. Сазонов В.Н., Туганов В.Ф. Тормозная неустойчивость и когерентное усиление поляризованного излучения в плазме, находящейся в магнитном поле // ЖЭТФ. – 1974. – v. 67. – С. 2157-2160 [Sazonov V.N. and Tuganov V.F. Bremsstrahlung instability and coherent amplification of polarized radiation in plasma located in a magnetic field // JETF. – 1975. - v. 40. – P. 1070-1071].
24. Sazonov V.N. and Tuganov V.F. Bremsstrahlung in a plasma in a quantizing magnetic field // Radiophisics and Quantum Electronics. – 1975. v. 18. – P. 119-124 [P. N. Lebedev Physics Institute, Academy of Sciences of the USSR. Translated from Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii, Radiofizika. – 1975. - v. 18. – P.165-170].
25. Туганов В.Ф. Уширение спектральных линий ионизованных атомов в постоянном магнитном поле // ЖЭТФ. – 1984. - т. 60. – С. 225-228 [Tuganov V.F. Broadening of spectral lines of ionized atoms in a constant magnetic field // JETF. - 1984. – 87. – P. 393-399].

26. Kramers H.A. On the theory of X-ray absorption and of the continuous X-ray spectrum // Phil. Mag. – 1923. - v. 46. – P. 836-871.
27. Гинзбург В.Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. - М.: Гостехиздат, 1960.
28. Киржниц Д.А. Лекции по физике. - М.: Наука, 2006.

Дата поступления: 29 января 2021 г.