

УДК 534.1

**ДИНАМИКА ДЕФОРМИРУЕМЫХ СИСТЕМ,  
НЕСУЩИХ ДВИЖУЩИЕСЯ НАГРУЗКИ  
(ОБЗОР ПУБЛИКАЦИЙ И ДИССЕРТАЦИОННЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ)**

© Сергей Иванович Герасимов, Владимир Иванович Ерофеев,  
Даниил Александрович Колесов, Елена Евгеньевна Лисенкова

*Институт проблем машиностроения РАН – филиал Федерального государственного  
бюджетного научного учреждения «Федеральный исследовательский центр Институт  
прикладной физики Российской академии наук» (ИПМ РАН), Нижний Новгород, Россия*  
[s.i.gerasimov@mail.ru](mailto:s.i.gerasimov@mail.ru), [erof.vi@yandex.ru](mailto:erof.vi@yandex.ru)

***Аннотация.** Работа посвящена обзору публикаций по динамике деформируемых систем, несущих движущиеся нагрузки, по основным направлениям разработки и совершенствования методов расчета конструкций на действие подвижных нагрузок. Отмечен вклад в формирование и развитие указанного научного направления отечественных и зарубежных исследователей. Приведен также обзор диссертационных исследований по волновой динамике упругих систем, взаимодействующих с движущимися нагрузками, включающий в себя анализ докторских и кандидатских диссертаций.*

***Ключевые слова:** деформируемая система, движущаяся нагрузка, обзор.*

*Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (Грант № 20-19-00613).*

**DYNAMICS OF DEFORMABLE SYSTEMS  
CARRYING MOVING LOADS  
(REVIEW OF PUBLICATION AND DISSERTATION RESEARCH)**

© S.I. Gerasimov, V.I. Erofeev, D.A. Kolesov, E.E. Lissenkova

*Mechanical Engineering Research Institute of the Russian Academy of Science,  
Nizhny Novgorod, Russia*  
[s.i.gerasimov@mail.ru](mailto:s.i.gerasimov@mail.ru), [erof.vi@yandex.ru](mailto:erof.vi@yandex.ru)

***Abstract.** The work is devoted to a review of publications on the dynamics of deformable systems carrying moving loads, in the main areas of development and improvement of methods for calculating structures for the action of moving loads. The contribution to the formation and development of this scientific direction of domestic and foreign researchers is noted. A review of dissertation research on the wave dynamics of elastic systems interacting with moving loads is also given, including the analysis of doctoral and candidate dissertations.*

***Keywords:** deformable system, moving load, review.*

***Acknowledgements.** The work was supported by the Russian Science Foundation, project no. 20-19-00613.*

## 1. Теоретические основы и ведущие направления в развитии методов расчета конструкций на действие подвижных конструкций

**Теоретические основы расчета.** Проведём краткий обзор направлений развития методов расчета транспортных сооружений на подвижные нагрузки. Наиболее полные обзоры работ по этой теме представлены в трудах [1-7]. Далее в исторической последовательности изложены основные этапы в развитии методов решения в рассматриваемой области динамики сооружений.

Первые приближенные методы учета действия подвижной нагрузки строились, опираясь на то, что форма прогиба конструкции, вызванного действием нагрузки, в каждый момент времени определяется из решения соответствующей данному положению нагрузки статической задачи. К этому периоду относятся исследования О. Мора, Э. Винклера, Ф. Виллиса, Дж. Стокса [4].

Исторически выделяются четыре группы исследований действия подвижных нагрузок на конструкции, классифицируемых по следующим признакам в ходе решения:

- 1) не учитываются массы груза и конструкции;
- 2) учитывается масса груза, но не учитывается масса конструкции;
- 3) не учитывается масса груза, но учитывается масса конструкции;
- 4) учитываются и масса груза, и масса конструкции.

Для современных задач решения в первых двух постановках лишены практического интереса. Из третьей группы следует отметить первые исследования, к которым относятся работы А.Н. Крылова [8] и С.П. Тимошенко [5]. В этих трудах по балке, имеющей распределённую по длине массу, движется постоянная или пульсирующая масса.

Также к первому этапу можно отнести работы А.Г. Барченкова и Р.И. Мальцева [9], посвященные безынерционным периодическим воздействиям на рамы и неразрезные балки. В работах последующего периода [10, 11] исследователи при рассмотрении движения простейших силовых нагрузок по рамам использовали разложение смещений по собственным формам этих сооружений. По третьему этапу в работах [12, 13] представлено применение Метода конечных элементов для рам при использовании традиционной полиномиальной аппроксимации смещений. В работах [14] рассмотрено движение группы сил по балке, а в [7, 15-17] движение силы по балке рассматривалось с учетом сдвига и инерции вращения.

Решение задач четвертой группы приводит к приближенному учету влияния массы при её движении конструкции. В частности, одной из первых работ, учитывающей движение массы по балке, было исследование Инглисса [18], в рамках которого уравнение движения с учетом одночленного разложения в ряд по собственным формам шарнирно опертой балки было сведено к дифференциальному уравнению с периодическими коэффициентами.

Существенный вклад в развитие методов расчета конструкций на подвижную нагрузку внесли исследования В.В. Болотина [19, 20]. В данных работах отброшено ограничение учета только одного члена в разложении прогиба и получена система связанных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами относительно обобщенных координат, зависящих от времени. В.В. Болотиным найдены критические скорости движения грузов и на уровне третьего приближения получены на основе асимптотического метода динамические прогибы балок [20]. Метод Инглисса нашёл развитие в работах [3, 21-25] при выявлении критических скоростей и определении динамических коэффициентов по прогибам.

Другой способ решения четвертого класса задач (с учетом масс конструкции и движущейся нагрузки) был предложен Шалленкампом [26]. Он основан на разложении в ряд Фурье с

неизвестными коэффициентами сил инерции груза. Эта методика нашла широкое применение при исследовании задач для балки в работах [3, 26, 27]. При этом стоит отметить, что методы Инглиса-Болотина и Шалленкампа позволяют определить только смещения балки.

Также следует отметить методологию расчета на инерционную подвижную нагрузку более широкого класса сооружений, чем балочные конструкции, предложенный исследователями Воронежской школы А.Г. Барченкова [9, 28, 29]. Этот метод внес существенный вклад в развитие методологии решения задач подвижной нагрузки с использованием разложения прогибов конструкции по собственным формам.

Альтернативным методом решения задачи о совместных колебаниях простейших конструкций в виде балки и движущейся массы, который стоит упомянуть, является метод интегральных уравнений. Он в сравнении с подходом Инглисса позволяет в более точной постановке единообразно исследовать совместные колебания или системы грузов при их движении (в том числе по более сложным конструкциям, чем «однопролетные» балки).

Принято считать, что истоки идеи метода интегральных уравнений, развитой рядом авторов независимо друг от друга [26, 30], в той или иной мере обращены к интегральному уравнению Тимошенко [5] для решения задачи упругого удара о балку.

Существенный вклад в развитие метода интегральных уравнений внес Г.Б. Муравский своими исследованиями бесконечных балок на упругом основании [30]. В этой работе автором при моделировании действия подвижной нагрузки на бесконечные балки на упругом основании было предложено использовать для решения задач фундаментальные решения. Также Г.Б. Муравский обобщил свой подход для балок конечной длины, повторив при этом результаты, полученные иным способом в работе С.П. Тимошенко [5], для силы, движущейся по шарнирно опертой балке. Такой способ позволил в [46] эффективно учесть массу груза и осциллятора (через интегральные уравнения, как при упругом ударе). Этот подход был позже использован при расчете на подвижную нагрузку в виде экипажа трехпролетного моста [31]. В этом исследовании после разделения системы на группу, фактически, конечных элементов решалась динамическая задача методом сил. Числовые же исследования данной задачи показали, что процедуры при решении интегральных уравнений относительно динамических реакций обладают слабой устойчивостью.

Одновременно с указанной в [30] методологией и независимо от неё развивался другой подход к построению интегральных уравнений при решении задач подвижной нагрузки для одно- и многопролетных балок. Он был сформулирован в работе А.П. Филлипова [26] и далее развит С.С. Кохманюком [26, 48]. Авторы, используя условие равенства смещения у груза и балки в месте контакта, решали систему интегральных уравнений шаговым методом, применяя теорему о среднем. Но и в этом случае устойчивость решения достигалась только специальными процедурами осреднения [31].

Следует отметить работы Нижегородской школы А.И. Весницкого и его коллег [33-35], где, основываясь на вариационный принцип Гамильтона-Остроградского, предположение о непрерывности распределенной системы и безотрывности контакта, получены и решены уравнения согласованного движения распределенной системы и сравнительно простых движущихся объектов.

Незаменимым в задачах подвижной нагрузки для исследования конструктивно сложных сооружений становится метод конечных элементов. Работы по рассмотрению методов расчета линейно-деформированных систем на подвижную нагрузку с применением МКЭ можно разделить на две группы: на базе разложения смещений по собственным формам [9, 25, 26]; на базе прямого интегрирования системы [36-38]. В работе [36] при рассмотрении метода дискретизации интегральных уравнений при использовании традиционного МКЭ

предложен алгоритм расчета линейно-деформируемых систем при декомпозиции системы на несущую конструкцию и подвижную нагрузку. Также в [36] при условии равенства смещений несущей конструкции и подвижной нагрузки в месте контакта и использовании метода Ньюмарка (в традиционной форме) получены алгебраические уравнения относительно контактных дискретных сил, удовлетворяющие указанным условиям совместности. Данный алгоритм в дальнейшем использовался в [39], но последующего развития и применения не нашёл.

Стоит также обратить внимание на исследования, которые так или иначе повлияли на вектор общего развития методов расчета на подвижную нагрузку, решали задачи её взаимодействия с несущими конструкциями при использовании МКЭ, но несколько иначе, чем описанные выше. Например, в [40] применялся традиционный конечный элемент с четырьмя обобщенными координатами (как и в [39]), являющимися линейными и угловыми перемещениями концов стержневого элемента. В данной работе изучалась задача взаимодействия на балку нагрузки в виде массы и осциллятора. Полученная в результате математического моделирования система уравнений решалась шаговым методом, рассмотренным в [41]. В целом, подход к исследованию подвижной нагрузки в [40] можно отнести к методу Инглиса.

Обобщая краткий анализ, можно прийти к выводу, что при исследовании взаимодействия балки с простейшей подвижной нагрузкой в виде движущейся массы, так или иначе, применяются два основных метода решения задачи, которые используются и для других конструкций и нагрузок. В первом методе используются обобщенные координаты при разложении прогиба по собственным формам балки, что сводит задачу к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами [3, 19, 42]. Во втором случае осуществляется разделение системы «балка-груз» и сведение задачи к интегральному уравнению относительно динамической реакции груза [15, 32]. В этом случае при увеличении числа удерживаемых форм происходит увеличение порядка системы [3, 19, 42], а в [15, 32] возникают трудности при решении интегральных уравнений из-за условной устойчивости шаговых процедур.

В [43, 44] предложен метод «узловых ускорений» для балок, который объединяет между собой рассмотренные выше подходы, но при этом ликвидирует указанные в них недостатки. Это обусловлено учетом любого необходимого числа форм в разложении прогиба балки и наличием разрешающей системы уравнений при безусловно-устойчивой схеме интегрирования с минимальным числом неизвестных (по аналогии с методом интегральных уравнений [15, 32]). Более того, данный метод сохраняет свои преимущества и при расчете стержневых систем на подвижные нагрузки, обладающие массой.

Обобщим упомянутые выше подходы к расчету на подвижную нагрузку стержневых систем и рассмотрим направления применения этих методов в современности. Как отмечалось, расчеты стержневых систем на подвижную нагрузку исторически связаны с МКЭ при использовании полиномов при аппроксимации смещений [1, 38, 39, 44, 46]. По аналогии с методологией решения «классической» задачи о движении груза по балке для стержневых систем применяются два упомянутых ранее основных метода для учета воздействия подвижной нагрузки. При этом остаются актуальными и особенности численной реализации этих подходов. Оба метода используют МКЭ, но для различных целей: в одном случае, для решения вспомогательной задачи на собственные значения, в другом – для построения системы разрешающих уравнений при их прямом интегрировании.

Первый подход сводится к построению дискретных аналогов для метода Инглиса [1, 42], второй – для метода интегральных уравнений [36, 39]. Оба метода требуют определенных

упрощений и обобщений, в том числе, и рассматриваемого сооружения (пространственная дискретизация конструкции), так как воздействие импульсных, быстродвижущихся и вибрационных нагрузок порождает потребность учета вкладов в колебательных процессах большого числа собственных форм. Это приводит к расширению спектра частот, что в свою очередь, как упоминалось ранее, повышает порядок системы разрешающих уравнений. Метод «узловых ускорений» объединяет два указанных выше подхода как для стержневых систем, так и для балок, используя при этом разработанный ранее метод расчета на подвижную нагрузку балок и метод расчета стержневых систем с распределенными параметрами на неустановившиеся воздействия (в гранично-элементной постановке), в том числе и на подвижные нагрузки [59]. Для учета действия подвижной нагрузки (с ненулевой массой) предлагаются большие по длине конечные (граничные) стержневые элементы при аппроксимации смещений линейными функциями и тригонометрическими рядами Фурье. При прямом интегрировании разрешающей системы на каждом шаге получается система уравнений относительно узловых ускорений (и только их), включая узлы стержневой системы и узлы в точках контакта конструкции и подвижной нагрузки. При этом увеличение пространственной дискретизации сооружения не приводит к увеличению порядка разрешающей системы уравнений. Таким образом, на базе «смешанного» метода в строительной механике строится безусловно-устойчивая по времени шаговая процедура, которая позволяет исследовать поля усилий, смещений и динамических давлений подвижной нагрузки (в том числе с ненулевой массой) на стержневые системы, моделирующие, например, конструкции мостов.

В «классической» теории «подвижная нагрузка» моделирует множество прикладных объектов (скоростные поезда, автомобили и создаваемые ими или их комбинациями различные нагрузки). Задачи, связанные с движением нагрузок, особенно высокоскоростных, по сложным конструкциям (балки на упругом основании, рамные и многопролетные мосты, стержневые системы и т.д.) продолжают оставаться актуальными для современных исследователей как в РФ, так и за рубежом. Стоит отметить работы последнего периода, связанные с этой проблематикой [13, 35, 38, 40, 46-90]. Среди зарубежных исследователей данных задач стоит упомянуть: Л. Фрыба, Р. Богач, К. Кнот, К. Поп, С. Брауни, М. Гао, И. Пэн, Я. Янг, Я. Ву.

***К истории расчета железнодорожных мостов на подвижную нагрузку.*** В силу большой практической востребованности стоит отдельно выделить историю (её основные этапы) развития общей методики расчета взаимодействия железнодорожного пути, искусственных сооружений и подвижного состава в части её совершенствования применительно к различным конструкциям мостов.

Среди первых работ по динамике мостов стоит упомянуть работы А.Н. Крылова и С.П. Тимошенко [8, 5]. По первому периоду в [5] дана краткая историческая справка и ценные обобщения достижений по изучению колебаний железнодорожных мостов. В последующих периодах большой вклад в развитие современных методов учета динамического воздействия нагрузки при проектировании мостов внесли исследования С.А. Бернштейна, Е.Е. Гибшмана, С.А. Ильясевича, В.В. Болотина. Также следует отметить большой вклад в развитие методологий расчета и строительства сложных инженерных конструкций (в том числе и мостов) ученых МИИТа: Г.П. Передерий, Н.Н. Богданов, Г.К. Евграфов, Л.И. Иосилевский, В.М. Круглов, А.А. Кирста, А.В. Носырев, В.О. Осипов, П.Н. Поликарпов, А.А. Петропавловский, В.М. Честной, В.М. Фридкин и др. [57, 91-96]; ученых ЦНИИСа: К.С. Силин, О.Я. Берг, Я.А. Дорман, Н.М. Колоколов, Н.Б. Лялин, Б.Е. Улицкий, А.А. Потапкин, А.А. Цернант и др.; мостостроителей СССР и РФ: Н.А. Холин, И.А. Иванченко, Б.А.

Забродин, Е.А. Сидоров, А.И. Жуковский, Ю.М. Митрофанов, А.Д. Потапов, Л.С. Блинков, П.П. Куракин, М.М. Грутман, С.А. Мелконян, В.Н. Власов и др.

В последующем периоде основное направление развития методов расчета динамических воздействий с мостами задавали работы [3, 19, 20, 24, 25, 28, 29, 32, 39, 42, 44, 48, 58, 93, 94, 97-107]. Особенного упоминания заслуживают авторы: Л. Фрыба, Т. Борович, Я. Гарг, С. Бруни, А. Матсура, С. Миязаки, М. Канамори, в том числе и работы [45, 46, 66, 67, 69, 80, 85, 86, 108-110].

Рассматривая вопросы динамики более детально, следует отметить, что развитие методов расчета сопровождается усложнением как рассматриваемой конструкции, так и подвижной нагрузки. Если до середины 1960-х гг. XX в. преимущественно исследовались вопросы динамики моста на простейшие подвижные нагрузки, то вместе с развитием методологии и ростом практического интереса произошёл переход к расчетам конструктивно более сложных сооружений в комплексе с нагрузкой, состоящей, например, из нескольких экипажей. Так, в работах [31, 32] на базе метода интегральных уравнений рассмотрены задачи об экипаже, движущемся по неразрезной балке и неразрезному мосту.

Существенный вклад на определенном историческом этапе в развитие методологии динамического расчета мостов в СССР произвели исследования, собранные в монографию [42] и посвященные широкому спектру задач динамики систем типа «мост-поезд». При расчете взаимодействия движущегося с постоянной скоростью железнодорожного состава в комплексе с одно- и двухпролетными неразрезными металлическими мостами авторы выводят кинетическую и потенциальную энергии системы типа «мост-поезд», а затем, строят математическую модель. Из полученных энергий вычисляется лагранжиан и, используя уравнения Лагранжа второго рода, получается система дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами относительно обобщенных координат пролетных строений и экипажей. При этом при учете только одной или двух форм колебаний пролетный конструкций типа «мост» фактически авторы монографии приходят к виду задачи Инглиса. Прогресс в сфере развития ЭВМ уже тогда позволял реализовать и численно проанализировать полученную систему дифференциальных уравнений, но такой подход лишал исследователей возможности рассматривать пролетные конструкции типа «мост» на уровне напряжений, т.к. одна или две формы колебаний рассматриваемой сложной конструкции не позволяли определять с достаточной точностью моменты и усилия в характерных (и обусловленный практической применимостью) сечениях пролетного строения.

На следующем же историческом этапе, как отмечалось ранее, возможности исследователей динамики сложных систем типа «мост-поезд» сильно расширило появление МКЭ. Среди отечественных и зарубежных работ по этой тематике стоит упомянуть [29, 36, 39, 43-46, 65, 71-80, 87, 98, 99, 109, 110-115]. В своем историческом этапе развития теории расчета на подвижную нагрузку из отечественных работ начального периода использования МКЭ следует отметить [116], где для моста применяется плоская конечно-элементная дискретизация. За основу авторы взяли алгоритм расчета системы типа «несущая конструкция-подвижная нагрузка», сформулированный в [36].

Развитие возможностей ЭВМ и численных методов расширяет динамические модели сложных пролетных конструкций. Для этого направления исследований стоит упомянуть В.К. Гарга [1], который рассматривает уже пространственную модель пролетного строения при использовании традиционного стержневого конечного элемента (КЭ).

Как уже отмечалось, получение достоверных результатов для системы типа «несущая конструкция-подвижная нагрузка» (конструкция – сложная, а нагрузка – высокоскоростная)

требует высокой степени дискретизации конструкции. Логичным в данных условиях стал следующий этап развития методов расчета на подвижную нагрузку, связанный с методом подконструкций. Так, в работах [44, 98, 99, 112] описывается суперэлементный метод и алгоритм численного расчета на подвижную нагрузку для конструкции, представляющей собой стержневую систему с распределенными параметрами. Эта методология впервые позволила достаточно точно исследовать задачу динамики на уровне напряжений для класса систем типа «ферма-состав». Такой метод позволяет учесть совместную работу фермы с продольными балками и моделей реальных экипажей, а также оценить динамические коэффициенты как по прогибам, так и по внутренним усилиям (моментам) в характерных сечениях конструкции. Подводя итог, стоит отметить, что стержневыми системами могут моделироваться многие сложные мостовые конструкции (в том числе рамовые, вантовые, арочные и пологие мосты, понтонные и паромные переправы).

Отдельно стоит упомянуть, что пролетные строения, используемые на высокоскоростных магистралях (ВСМ), имеют свою специфику. Основной тип мостовых конструкций средних пролетов – это пролетные конструкции с ездой поверху. Например, на ВСМ Франции, Германии и Китая наибольшее применение получили двухпутевые пролетные строения мостов коробчатого поперечного сечения. Стоит отметить, что современные ЭВМ позволяют не осуществлять глубокое типизирование математических моделей с разработкой индивидуальных подходов к их исследованию. Задачи динамики пролетных строений любого типа можно решать единообразно. Если вернуться к примеру с коробчатыми сечениями мостов, то современные ЭВМ и численных методов избавляют ученых от необходимости прибегать к методам исследования систем складчатого типа [48, 57]. Развитие методов такого единообразного расчета описано в [117, 118].

Остановившись на последних этапах развития исследований по динамическом расчету сложных конструкций типа «мост», можно отметить, что большинство современных методов расчета взаимодействия мостов и высокоскоростных подвижных составов [45, 65-67, 73-77, 80, 85, 87, 103] основаны на повсеместном применении ЭВМ и вычислительной техники при использовании МКЭ и методов шагового интегрирования уравнений движения системы. Например, в [45] при декомпозиции системы типа «мост-состав» в моделях большой размерности применяется итерационный подход, а в работах [67, 103] с целью компенсации большой размерности задачи дифференциальные уравнения интегрируются в явном виде. В то же время в [85] при моделировании однопролетного, двухопорного моста коробчатого сечения используются всё ещё балочные КЭ. При этом после разделения системы типа «мост-состав» на подсистемы на этапе дискретизации по времени (по методу Ньюмарка) исключаются реакции связей при сохранении большой размерности задачи.

Резюмируя, стоит отметить, что проблема большой размерности в задачах динамики актуальна, т.к. часто решается приближенно и с потерями точности. Поэтому в настоящее время для решения класса задач динамического взаимодействия сложных конструкций (мостов) и высокоскоростных подвижных составов по-прежнему используется суперэлементный подход. Особенно он актуален в расчетах мостов в резонансных режимах, возникающих при движении высокоскоростных составов.

Делая вывод по представленной выше исторической справке, можно отметить, что разработка новых и совершенствование существующих методов расчета сложных пролетных конструкций типа «мост» на действие высокоскоростной подвижной нагрузки типа «состав» представляет, как теоретический, так и практический интерес. К этому же классу задач можно отнести расчет сложных пролетных конструкций типа «мост» на действие импульсной нагрузки, вызванной прохождением составом стыковых участков строения пути на мосту или неровностью, вызванной неравноупругостью рельса [119]. Практическая

ценность обусловлена возможностью посредством математического моделирования оценить надежность существующих и будущих транспортных сооружений при предполагаемых (прогнозируемых) или даже перспективных (в том числе, в отдалённом будущем) нагрузках. Это, в свою очередь, позволяет проактивно корректировать нормативные материалы, стандарты и т.д. к новым условиям и технологиям. Особенно это актуально для строительства мостов новых конструкций и их последующих реконструкций [103, 1104, 107, 120-128]. Как следствие, методология расчета мостовых конструкций на динамические воздействия требует постоянного совершенствования и развития.

В современности, помимо описанных выше проблематик, представляет интерес и вопросы, связанные с аэродинамикой пролетных мостовых конструкций, подвергаемых динамическим воздействиям. Актуальность задач расчета сложных сооружений и конструкций на подвижную нагрузку при учете дополнительно ветровых и сейсмических нагрузок не подлежит сомнению.

## 2. Обзор диссертационных исследований по волновой динамике упругих систем с движущимися нагрузками

Докторская диссертация Уткина Г.А. [129] посвящена разработке универсальной физически и математически корректной процедуры постановки задач динамики одномерных направляющих с движущимися по ним объектами при использовании вариационного принципа Гамильтона-Остроградского. Полученная методология позволяет учитывать основные факторы, определяющие качественные особенности моделируемых процессов (в том числе волнообразование), а также демонстрирует эффективность для исследования в том числе и нетрадиционных проблем динамики систем. Г.А. Уткин показывает, что при моделировании задач предложенным образом, возникает новый класс существенно нелинейных краевых задач математической физики. Для некоторых задач этого класса (задачи с квадратичным лагранжианом) предложены методы их преобразования к удобной для аналитического и численного исследования форме. Также в ходе диссертационного исследования впервые получено: выражение для силы давления волн на препятствие в универсальной форме (через лагранжиан); математическая модель задачи о движении тел под действием сил давления упругих волн; общая постановка задачи о косом ударе с учетом проскальзывания. Для полученных математических моделей проведены исследования в общем виде (по возможности), а также частных случаев (с определенными упрощениями).

Диссертационное исследование Крысова С.В. [130] также при использовании вариационного принципа Гамильтона-Остроградского формулирует условия согласования для дифференциальных уравнений соответствующей динамической краевой задачи контактного взаимодействия абсолютно твердых тел и упругих систем, которые необходимы для описания границ неизвестной контактной области. В целом, диссертация посвящена исследованию волновых процессов в упругих системах, возникающих при контактных взаимодействиях на их подвижных сопряжениях с твердыми телами и связанного с ними явления волнового сопротивления движению тел (обусловлено потерями энергии на возбуждение и излучение упругих волн) применительно к задачам динамики систем с движущимися нагрузками и теории качения и скольжения. Для задач, моделирующих при должном уровне абстракции железнодорожный транспорт, транспорт на магнитном подвесе, вездеходные машины и эластичные гусеницы, построены всевозможные зависимости сил сопротивления от исходные параметров и оценен их вклад в общее сопротивление. Также в ходе исследования развита теория возбуждения волн в рассматриваемых системах подвижными источниками. Особого упоминания требуют исследование особенностей



проявления сложного эффекта Доплера и его влияния на резонансные свойства систем, а также анализ влияния нелинейных и диссипативных свойств систем и неравномерности движения взаимодействующих с ними источников на характер возбуждения волн. Также важным для развития теории является экспериментально обнаруженный эффект генерации волн импульсной формы (параметрическая неустойчивость второго рода в распределенных системах) и подтверждение условий его возникновения.

Докторская диссертация Метрикина А.В. [131] посвящена исследованию переходного излучения упругих волн, возникающего при равномерном движении объекта вдоль неоднородной упругой системы. Переходное излучение – один из характерных источников вибраций в упругих системах. Эффект его возникновения рассмотрен на основе анализа пересечения объектом уединенной области неоднородности упругой системы. В ходе рассмотрения изучены причины возникновения излучения, его спектральный состав, реакция и диаграмма направленности, законы изменения энергии и импульса, установлена возможность и условия разрыва контакта движущегося объекта и неоднородной упругой системы, являющейся направляющей для него.

Для периодически-неоднородных систем А.В. Метрикиным показано, что спектр переходного излучения в установившемся режиме дискретен. Резонанс возникает при совпадении скорости движения объекта с групповой скоростью одной из гармоник этого спектра. Если же диссипацией пренебречь, то амплитуда резонансных колебаний неограниченна. Для случайно неоднородных систем показано, что спектр переходного излучения оказывается сплошным, а поле излучения – локализованным вблизи движущегося объекта (амплитуда резонансных колебаний, вызываемых осцилляциями движущегося объекта, ограничена всегда).

Практическая значимость данных исследований обусловлена моделированием железнодорожного пути и взаимодействующих с ним объектов. Колеса поезда, прижатые к рельсовым направляющим силой тяжести, возбуждают в пути упругие волны. Неоднородность же пути (шпалы, стыки, дефекты и т.д.) служит причиной излучения. Второй класс задач для моделирования, обуславливающий практическую значимость, это возбуждение упругих волн движущимся пантографом (токосъемником) поезда, который взаимодействует с проводами. В данном случае неоднородность и, как следствие, излучение обусловлено сложностью конструкции пантографа (наличие зажимов, фиксаторов, воздушных стрелок, демпферов и т.д.) В частности, А.В. Метрикиным показано, что динамическая жесткость грунта резко понижается при движении состава со скоростью волн Рэлея в грунте (200 км/ч – достижимая величина для современных поездов), амплитуда колебаний резко возрастает, а при превышении этой скорости в системе появляется возможность неустойчивости. На основе этого можно утвердиться в том, что описанные и исследованные выше волновые эффекты представляют наряду с академическим и практический интерес для современной инженерии.

В продолжении рассмотрения математических моделей верхнего строения железнодорожного пути и грунтовой среды с позиции механики сплошной среды стоит отметить докторскую диссертацию Суворовой Т.В. [132]. В ходе данной работы впервые разработаны теоретические и экспериментальные основы анализа динамики напряженно-деформированного состояния железнодорожного пути и слоистой грунтовой среды как результата взаимодействия вязко-упругих и гетерогенных полуограниченных тел. Для этого класса задач (в том числе краевых) создан комплекс аналитических и численных методов исследования. Автором установлено, что взаимное влияние систем вибрирующих жестких и гибких объектов, систем заглубленных включений в зависимости от соотношения механических и геометрических параметров задачи, может приводить как к усилению, так и

к ослаблению колебаний. Т.В. Суворова впервые смоделировала и аналитико-численно решила: задачу действия рельсошпальной решетки в наиболее опасном подрельсовом сечении, что позволило спрогнозировать напряженно-деформированное состояние железнодорожного полотна при изменении свойств основания и найти оптимальное положение для армирующих земляное полотно конструкций; задачу о воздействии вибрирующей нагрузки на слоистое пористо-упругое обводненное основание, что дало возможность прогнозировать возможные возмущения при возрастании скорости движения транспорта. Все полученные результаты и практические рекомендации были проверены и подтверждены натурными исследованиями.

Докторская диссертация Костарева С.А.[133] нацелена на изучение механизма генерации и распространения вибрационного поля от линий метрополитена и снижения их вибрационного воздействия на прилегающей территории. В работе проведены теоретические исследования колебаний обделок тоннелей метрополитена различного типа, рассматриваемых как упругие оболочки, создана математическая модель упругих волн в грунте, учитывающая распространение продольных, поперечных, а также волн Рэлея в грунте. Последовательно произведен учет поверхностных волн Рэлея в практике акустических расчетов, связанных с метрополитеном. Показана важность роли последних при передаче энергии вибрации к жилой застройке вследствие малого затухания поверхностных волн. Их роль особенно важна при расчетах для линий мелкого заложения. Проведен ряд натурных измерений уровней колебаний обделок, а также генерируемых вибраций в жилой застройке. Анализ полученных экспериментальных результатов показал, что традиционный подход к моделированию вибрационного поля в окрестности трасс метрополитена дает существенно заниженные результаты для уровней вибрации. Учет волны Рэлея позволяет значительно лучше прогнозировать уровни вибрации в зоне, прилегающей к линиям метрополитена. Разработаны рекомендации по снижению уровней вибрации. Основное внимание при этом уделено подавлению вибрации в источнике. Создана «Методика прогнозирования уровня вибрации от движения поездов метрополитена и расчет виброзащитных устройств», включающая в себя пакет программ и позволяющая производить необходимые расчеты уровней вибрации на поверхности почвы, на внешней стороне обделки, в тоннеле и на станциях метрополитена. Разработаны Своды правил: «Оценка вибрации при проектировании, строительстве и эксплуатации объектов метрополитена» (СП 23-105-2004) и «Оценка шума при проектировании, строительстве и эксплуатации объектов метрополитена» (СП 23-104-2004), включенные в СНиП 32-02-2003.

В докторской диссертация Веричева С.Н. [134] на основе исследований устойчивости колебаний объекта, обладающего собственными степенями свободы, движущегося по распределенной упругой системе показано, что необходимым условием возникновения неустойчивости является превышение объектом минимальной фазовой скорости волн в упругой системе. Установлено, что определяющее влияние на устойчивость оказывают вязкостные характеристики, как объекта, так и распределенной системы. Изучена устойчивость колебаний объекта, движущегося по периодически неоднородной балке, моделирующей шпальную структуру, а также износ поверхности рельсов. Показано, что неоднородность балки приводит к возможности возникновения неустойчивости при скоростях движения объекта, меньших, чем минимальная скорость волн в соответствующей однородной балке. Физической природой неустойчивости является параметрический резонанс, возникающий при близости удвоенной собственной частоты колебаний объекта на балке к частоте изменения параметра неоднородности в движущейся точке контакта. Исследована устойчивость колебаний модели колесной пары, движущейся по трехмерной

модели рельсового пути. Показано, что неустойчивость колебаний может возникнуть при превышении колесной парой скорости поверхностных волн в грунте. В мягких грунтах эта скорость может быть порядка 250 км/ч, что является вполне достижимым для современных скоростных поездов. Основанная на данной модели программа позволяет оптимизировать параметры подвески современных высокоскоростных поездов.

В докторской диссертации Гаврилова С.Н. [135] разработан аналитический подход к решению нестационарных задач динамики упругих тел с включениями и границами, движущимися с переменной скоростью, связанной с представлением решений рассматриваемых задач в виде многомасштабных асимптотических разложений по малому параметру, являющемуся свойством рассматриваемых механических систем. Подход применен к исследованию задач кинематического и силового типов о движении инерционного включения с переменной докритической скоростью по бесконечной струне на винклеровском основании. Это позволило исследовать эволюцию ловушечной моды колебаний в системе с медленно изменяющимися параметрами, а именно, найти зависимость амплитуды колебаний от переменной скорости включения; показать, что эффект нелинейного взаимодействия посредством конфигурационной силы материального включения с упругим полем, излученным им самим, приводит к появлению у подвижного включения «присоединенной массы», зависящей от скорости включения. Значение присоединенной массы обращается в бесконечность при стремлении скорости к критическому значению. Присоединенная масса не зависит от массы включения и возникает, таким образом, даже при нулевой массе включения.

В докторской диссертации Сергеева А.Д. [136] изучается взаимодействие бесконечных одномерных континуальных структур (струна, балка Бернулли-Эйлера) с подвижными инерционными нагрузками. Рассматриваются задачи о спектре локализованных колебаний инерционного объекта, контактирующего с лежащим на винклеровском основании упруго-инерционным континуумом в ситуации, когда объект движется вдоль континуума с постоянной продольной скоростью. Также в диссертации исследована динамика системы «пантограф – контактный провод». Предложена физическая модель, учитывающая наличие поля тяжести, но игнорирующая инерционные свойства контактного провода. Это позволило аналитически описать взаимодействие в многоуровневой дискретно-континуальной системе с подвижной нагрузкой и периодически изменяющимися свойствами.

Кандидатская диссертация Болдина В.П. [137] посвящена разработке физических и математических составляющих теории колебаний, и волн в двумерных упругих системах, взаимодействующих с движущимися нагрузками и закреплениями. Автором впервые для упомянутого класса задач учтены дополнительные инерционные силы и силы давления волн. При этом показано, что последние выступают посредником преобразования энергии элементов движущейся нагрузки в энергию колебаний двумерной системы и наоборот. Для линейных двумерных упругих систем проанализированы различные режимы волнообразования (и их влияние на динамику системы) при взаимодействии с равномерно движущейся нагрузкой, обусловленные особенностями проявления эффекта Доплера.

В кандидатской диссертации Сьянова С.А. [138] изучаются динамические процессы в упругих системах с движущимися по ним нагрузками (сосредоточенные объекты), совершающими вынужденные колебания. Работа представляет собой исследование кинематики гармонических волн в линейных задачах динамики одномерных упругих систем неограниченного размера. На основе частных примеров изучены кинематические эффекты: эффект Доплера; излучение волн Вавилова-Черенкова, тормозного излучения; излучение упругих волн (подтверждено как теоретически, так и экспериментально). Для исследуемого класса задач выявлена зависимость между скоростью движения объекта и проявлением

эффекта резонанса в системе, а также исследовано влияние резонансных свойств движущейся нагрузки и дисперсионных свойств распределенной системы на критические (вызывающие резонанс) значения параметров.

Кандидатская диссертация Быченкова В.А. [139] посвящена исследованию сопротивления движению абсолютно твердых тел при скольжении и качении по одномерным упругим системам, возникающего вследствие волнового характера их деформирования и связанных с этим особенностей контактного взаимодействия. Проведен анализ сил волнового сопротивления движению сосредоточенных постоянных и переменных нагрузок вдоль одномерных вязкоупругих систем в зависимости от их волновых, нелинейных, вязкоупругих свойств и скорости движения. Определены силы волнового сопротивления качению и скольжению твердого колеса по деформируемым основаниям, входящих в качестве составляющих в полные сопротивления движению. Для стационарных режимов движения колеса проведен расчет сил сопротивления движению в режимах скольжения и качения и оценен вклад в них сил волнового сопротивления движению.

Разработке основ теории преобразования энергии источников колебаний в энергию поступательного движения объектов вдоль упругих направляющих посредством волнообразования посвящена кандидатская диссертация Лисенковой Е.Е. [140]. В ходе данной работы рассматривалось движение объектов вдоль направляющих (струн, балок, мембран) под действием упругих волн, которые отражались от них, как от препятствий. В том числе определены зависимости между скоростью движения объекта и движущей силой, а также коэффициентом преобразования энергии волн в энергию поступательного движения. Также в ходе диссертационной работы автором показана возможность создания преобразователя энергии источника в энергию поступательного движения тел посредством волнообразования. Особенное внимание по этому направлению уделено элементарному (сосредоточенному) волновому движителю, а также идеальному волновому движителю (в том числе при закритических – «сверхзвуковых» – скоростях, при которых КПД может быть бесконечно близок к 1). Также в данной работе для широкого класса упругих систем найдены инвариантные соотношения для частот и энергий волн как для энергий излучаемых движущимся источником волн, так и для их волновых импульсов и волновых чисел.

Кандидатская диссертация Маланова С.Б. [141] посвящена разработке методов исследования качественных особенностей ударного взаимодействия материальной точки и одномерной упругой системы (струна, балка) с учетом волнообразования и проскальзывания. Для построения математической модели описываемого класса задач используется вариационный принцип Гамильтона-Остроградского. Предложенные методы решения полученных задач основаны на сведении общей нелинейной задачи к системе обыкновенных интегродифференциальных уравнений, описывающих движение материальной точки. Также автором проведено исследование зависимостей характеристик исходных задач и ударного взаимодействия. В частности, для удара материальной точки по бесконечной струне на упругом основании получено теоретическое подтверждение основных положений стереомеханической теории удара.

В кандидатской диссертации Кажяева В.В. [142] на основе точных решений выявлен и теоретически обоснован эффект уменьшения вибраций упругой направляющей, вдоль которой под действием сил давления волн движется элементарный (сосредоточенный) объект. Особое внимание в результатах диссертационного исследования стоит обратить на задачу гашения вибраций балки свободно скользящей массой. Автор показывает, что даже в случае отсутствия диссипации все резонансные явления ограничены (исключение – резонанс на минимальной собственной частоте всей системы).

В кандидатской диссертации Сазоновой (Смирновой) М.Л. [143] обсуждается вопрос о расчете импульса распространяющихся в упругих системах волн и их воздействии на препятствия (закрепления, ограничители, сосредоточенные объекты и т.д.) На конкретных примерах продольных колебаний стержня автор показывает: наличие/отсутствие импульса у распространяющихся в упругих средах волн определяется начальными условиями; направление импульса волны не всегда совпадает с направлением её распространения; перенос волной импульса сопровождается переносом массы в направлении импульса. Также изучено в приближении первого и второго порядка влияние параметров нелинейной системы на величину импульса волн и оказываемого ими на границе давления. В общем виде автором при использовании вариационного принципа Гамильтона-Остроградского проведено математическое моделирование движения одномерных упругих систем (с учетом нелинейных факторов) с движущимися закреплениями и нагрузками и соответствующими им естественными краевыми условиями. В частном виде автором рассмотрены задачи: о движении бусины вдоль струны (поперечное смещение бусины ограничено жесткими направляющими), для которой во втором приближении получена генерация волны, обладающей импульсом, а также равный по величине и противоположный по направлению импульс, приводящий в движение бусину; о движении распределенных нагрузок по мембране со скоростью, превышающей скорость распространения волн в ней же, и сверхзвукового обтекания тел потоком газа, для которой показана возможность такой конфигурации движущейся конструкции (группа объектов), при которой сопротивление движению будет минимальным, либо нулевым.

Кандидатская диссертация Востроухова А.В. [144] посвящена исследованию динамического отклика трехмерных моделей железнодорожного пути на равномерно движущуюся постоянную нагрузку. В ходе исследования показано, что при анализе движения поездов со скоростями, сравнимыми со скоростью поверхностных волн в грунте, необходимо учитывать трехмерность и слоистость грунта. Также большую практическую значимость имеют результаты анализа энергозатрат двигателя локомотива, возникающих вследствие вязкости грунта и генерации волн в грунте и зачастую достигающих значений, сравнимых с потерями мощности на преодоление поездом аэродинамического сопротивления.

Кандидатская диссертация Филатова Л.В. [145] посвящена аналитическим и численным исследованиям отдельных задач динамики тел (точечная масса, абсолютно твердое тело), движущихся вдоль одномерных упругих направляющих (в том числе неограниченных). Следует упомянуть, что в данной работе впервые исследована задача о движении точечной массы с неизвестным заранее законом движения вдоль направляющей, для которой найдены установившиеся режимы движения с постоянной и переменной скоростью и условия их устойчивости. При рассмотрении прикладных задач автором обнаружено перерождение непрерывной области контакта в дискретную (вплоть до одноточечной) при изменении скорости стационарного скольжения твердого диска по струне на вязкоупругом основании от докритических до закритических значений. На основании полученных результатов предложена модель описания качения твердого колеса по деформируемому основанию, с помощью которой исследовано качение без проскальзывания и определены условия его возникновения.

Кандидатская диссертация Кононова А.В. [146] посвящена исследованию процессов волнообразования, возникающих при равномерном и прямолинейном движении тяжелых объектов вдоль неоднородных двумерных упругих систем. В ходе работы исследовано (теоретически) переходное излучение для описанного класса задач, получены и проанализированы условия возникновения резонансных, ударных режимов, исследованы спектральные характеристики дифракционного излучения упругих волн. Особую

практическую значимость имеют результаты исследования процесса разрыва контакта между упругой системой и движущимся объектом вблизи закрепления.

В кандидатской диссертации Усошина С.А. [147] развиваются аналитико-численные методы решения динамических задач воздействия движущихся осциллирующих нагрузок на гетерогенное слоистое полупространство или пакет слоев. Если говорить о результатах численных исследований, то стоит упомянуть анализ воздействия групп осциллирующих движущихся нагрузок, которые можно интерпретировать в существенный (55-60%) рост амплитуд колебаний при встречном движении поездов. Аналитические исследования были сосредоточены на влиянии неоднородности основания на динамические эффекты, сопровождаемые увеличением скорости движения нагрузки, определяемые поведением дисперсионных поверхностей. Полученные результаты были подтверждены натурным экспериментом по регистрации волновых полей, генерируемых в основании магистрали нагрузкой, возникающей от поезда.

Кандидатская диссертация Точилина М.В. [148] посвящена разработке моделей, позволяющих: во-первых найти и оптимизировать новые конструктивные решения для скоростного пассажирского и грузового транспорта с учетом энергосбережения, экологических и многих других требований, предъявляемых современными условиями к транспорту; во-вторых раскрывать перспективы и возможности оптимизации конструктивных параметров и технологических режимов эксплуатации объектов скоростного наземного транспорта.

Кандидатская диссертация Богданова Ю.В. [149] посвящена экспериментальному исследованию волновых процессов при контактном и бесконтактном взаимодействии движущихся нагрузок с вязкоупругими опорными направляющими.

Кандидатская диссертация Бутовой С.В. [150] посвящена изучению динамики взаимодействия высокоскоростных ступеней ракетных поездов с рельсовыми направляющими ракетного трека, определению причин возмущений поперечного движения ступеней ракетных поездов и выработке рекомендаций по уменьшению их возмущений. Автором получено экспериментальное подтверждение развития изгибно-крутильных колебаний в рельсовых направляющих при боковом нагружении. На примере модели объекта, движущегося по упругой рельсовой направляющей, представляющей собой двухмассовый осциллятор, рассмотрена устойчивость поперечного движения высокоскоростных объектов по направляющей ракетного трека. Определена зависимость динамической жесткости рельсовой направляющей в движущемся контакте от скорости движения объекта и частоты возмущения. Определены области неустойчивости поперечного движения двухмассовых осцилляторов, моделирующих движение реальных объектов, проведено сопоставление с результатами экспериментов. Определены области неустойчивости движения двухопорных объектов, моделирующих движение ракетных поездов, проведено сопоставление с результатами экспериментов. Разработан и внедрен в практику штатных экспериментов метод визуализации процессов, сопровождающих разгон ракетного поезда по рельсовым направляющим.

Кандидатская диссертация Оконечникова А.С. [151] посвящена изучению нестационарного движения сосредоточенной нагрузки по границе упругой полуплоскости. Построено и полностью исследовано во всем диапазоне изменения параметров процесса аналитическое решение задачи о воздействии подвижной нагрузки. Предложен метод, построен и реализован алгоритм решения задачи о движении нагрузки по произвольному временному закону.

В кандидатской диссертации Колесова Д.А. [152] поставлена самосогласованная динамическая задача для системы, включающей в себя одномерную гибкую направляющую (струна), упруго-инерционное основание (массив осцилляторов) и движущуюся осциллирующую нагрузку. Проанализировано влияние параметров основания на дисперсионные характеристики (зависимости частоты, фазовой и групповой скоростей от волнового числа) поперечных волн, распространяющихся по струне. Показано, что наличие инерционности основания приводит к возникновению двух критических частот (частот отсечки), а движущаяся вдоль такой системы нагрузка вызывает в ней упругие колебания, представляющие собой бегущие волны, при любых скоростях движения и частотах источника. Исследовано распространение квазигармонической поперечной волны в нелинейно-упругой струне, лежащей: (а) на упруго-инерционном основании; (б) на периодически-неоднородном упругом основании. В случае (а) показано, что такая волна неустойчива к малым возмущениям и при любых значениях параметров струны и основания разбивается на отдельные волновые пакеты (модуляционная неустойчивость). В случае (б) получена зависимость амплитуды энергии волнового пакета от волнового числа, или от скорости переноса энергии (не совпадающей с групповой скоростью).

### Список литературы

1. Гарг В.К., Дуккипати Р.В. Динамика подвижного состава. - М.: Транспорт, 1988. - 391 с.
2. Дмитриев А.С. Вопросы взаимодействия балочных конструкций с движущейся сосредоточенной нагрузкой // Пробл. машиностроения. - 1986. - №25. - С. 43-50.
3. Моргаевский А.Б., Карпов Л.Н., Никитин Г.Ф. Об исследовании величины динамического воздействия подвижной нагрузки с учетом высших гармоник // Исслед. по теории сооружений. - 1968. - Вып. 16. - С. 15-24.
4. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. - М.: Наука, 1967. - 419 с.
5. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. - М.: Наука, 1967. - 444 с.
6. Якушев Н.З. Динамика деформируемых систем под воздействием движущихся нагрузок // Исслед. по теории пластин и оболочек. - Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1972. - №8. - С. 3-42.
7. Fryba L. Vibration of solids and structures under moving loads. - Prague: Academia, 1972. - 484 p.
8. Крылов А.Н. Вибрации судов. - М.: ОНТИ, 1936. - 404 с.
9. Барченков А.Г., Мальцев Р.И. Колебания плоских рам и балок под действием подвижных периодических сил // Тр. ВИСИ. - 1964. - №10, вып. 1. - С. 60-89.
10. Kruszewski J. Metoda sztywnych elementow skonronych. - Warszawa, Arcady, 1975. - 292 p.
11. Reipert Z. Vibration of Frames under moving load // Arch. inż. ład. - 1970. - Vol. 16, N 3. - P. 419-447.
12. Borowicz T. Przybliżona analiza nieustalonych drgan ram nieprzesuwnych. // Arch. inż. ład. - 1978. - Vol. 24, N. 4/ - P. 619-628.
13. Borowicz T., Hendel J. Algorytm analizy drgan ram poddanych dzialaniu sil ruchomych. // Arch. inż. ład. - 1979. - Vol. 25, N. 3. - P. 239-447.
14. Конашенко С.И. К вопросу о вынужденных колебаниях простой балки при равномерном движении по балке силы и группы сил // Тр. ДИИТ. - 1956. - Вып. 25. - С. 275-300.
15. Кохманюк С.С., Филиппов А.П. Колебания стержней при подвижной нагрузке // Стронт. механика корабля. - Л.: Судостроение, 1968. - Вып. 108. - С. 108-112.

16. Моргаевский А.Б., Кожемякина И.Ф. Решение задачи о динамическом воздействии подвижной нагрузки с учетом сдвига и инерции вращения // Динамика и прочность машин. - 1976. - Вып. 23. - С. 23-27.
17. Муравский Г.Б. Колебания бесконечной балки Тимошенко на упругом основании // Строит. механика и расчет сооружений. - 1979. - №6. - С. 56-61.
18. Inglis C.E. A Mathematical Treatise on Vibrations in Railway Bridges. - Cambridge: Univ. Press, 1934. - 203 p.
19. Болотин В.В. О воздействии подвижной нагрузки на мосты // Тр. МИИТ. - 1950. - Вып. 74. - С. 269-296.
20. Болотин В.В. Задача о колебаниях мостов под действием подвижной нагрузки // Механика и машиностроение. - 1961. - №4. - С. 109-115.
21. Гальченко А.Г., Конашенко С.И. О колебаниях балки при движении по ней группы грузов и груза с пульсирующей силой // Тр. ДИИТ. - 1963. - Вып. 44. - С. 145-161.
22. Кравченко Г.Ф. Об одной задаче колебаний шарнирно-опертой балки под действием движущихся грузов // Сопротивление материалов и теория сооружений. - 1968. - Вып. 7. - С. 128-135.
23. Моргаевский А.Б., Кучма Т.К. О динамическом воздействии подвижной нагрузки, распределенной на участке конечной длины // Динамика и прочность машин. - 1971. - Вып. 12. - С. 72-80.
24. Радиховский Ю.А., Ройтбурд З.Г., Тененбаум Э.М. Взаимодействие одиночного экипажа с балочным пролетным строением // Тр. ДИИТ. - 1973. - Вып. 150. - С. 139-146.
25. Радиховский Ю.А., Ройтбурд З.Г., Тененбаум Э.М. Взаимодействие подвижного состава с балочным пролетным строением железнодорожного моста // Тр. ДИИТ. - 1973. - Вып. 150. - С. 216-236.
26. Филиппов А.П., Кохманюк С.С. Динамическое воздействие подвижных нагрузок на стержни. - Киев: Наукова думка, 1967. - 132 с.
27. Licari J.S., Wilson E.N. Dynamic response of a beam subjected to a moving forcing system // Proc. 4-th V.S. Nat. Congr. Appl. Mech. - Berkeley. - 1962. - N 1. - P. 419-425.
28. Барченков А.Г., Котуков А.Н., Сафронов В.С., Орежова Л.Д. Моделирование на ЦВМ совместных колебаний упругих систем и подвижной нагрузки // Применение методов вычислительной математики и вычислительной техники для решения научно-исследовательских и народнохозяйственных задач. - 1969. - Вып. 4. - С. 48-55.
29. Барченков А.Г. Динамический расчет автодорожных мостов. - М.: Транспорт, 1976. - 200 с.
30. Муравский Г.Б. Действие подвижной нагрузки на балку бесконечной длины, лежащую на упругом основании // Тр. МИИТ. - 1961. - Вып. 34. - С. 54-84.
31. Иванченко И.И. О колебаниях моста при движении по нему экипажа // Тр. МИИТ. - 1975. - Вып. 476. - С. 64-71.
32. Кохманюк С.С., Янютин Е.Г., Романенко Л.Г. Колебания деформируемых систем при импульсных и подвижных нагрузках. - Киев: Наукова думка, 1980. - 231 с.
33. Весницкий А.И., Уткин Г.А., Крысов С.В. Постановка краевых задач динамики упругих систем исходя из вариационного принципа Гамильтона-Остроградского. - Горький: ГГУ, 1983. - 90 с.
34. Крысов С.В., Холуев В.В. Силы сопротивления движению постоянных нагрузок вдоль упругих направляющих // Динамика систем. - Горький: Изд. Горьк. Ун-та, 1985. - С. 142-149.



35. Крысов С.В., Филатов Л.В. О движении тел вдоль упругих направляющих с закритическими скоростями // Прикладные проблемы теории колебаний. - Н.Новгород: ННГУ, 1991. - С. 40-51.
36. Муравский Г.Б. Алгоритм исследований динамики линейно-деформируемых систем при действии подвижной нагрузки // Тр. ДИИТ: Вопр. динамики мостов и теории колебаний. - 1983. - С. 40-48.
37. Муравский Г.Б., Поволоцкая М.Ф. К вопросу о действии подвижной нагрузки на деформируемые системы // Строит. механика и расчет сооружений. - 1988. - №3. - С. 38-43.
38. Borkowski W. Model dynamiczny i algorytm numerycznej analizy konstrukcji mostowych poddanych działaniu ruchomego obciążenia // Biul. DAT J.Dabrowskiego. - 1984. - Vol. 33, N. 7. - P. 43-57.
39. Шапошников Н.Н., Кашаев С.К., Бабаев В.Б., Долганов А.А. Расчет конструкций на действие подвижной нагрузки с использованием метода конечных элементов // Строит. механика и расчет сооружений. - 1986. - №1. - С. 50-54.
40. Borowicz T. Wytezenie belek pod obciążeniem ruchomym. // Arch. inż. ład. - 1978. - Vol. 24, N. 2. - P. 219-235.
41. Langer J. Analiza dynamiczna przeesła mostowego obciążonego ruchomym pojazdem // Arch. inż. ład. - 1974. - Vol. 24, N. 4. - P. 591-599.
42. Бондарь Н.Г., Козьмин Ю.Г., Ройтбурд З.Г., Тарасенко В.П., Яковлев Г.Н. Взаимодействие железнодорожных мостов с подвижным составом. - М.: Транспорт, 1984. - 272 с.
43. Иванченко И.И. Расчеты на подвижные и импульсные нагрузки стержневых систем с распределенными параметрами // Прикл. механика. - 1988. - Т. 24, №9. - С. 109-118.
44. Иванченко И.И. О действии подвижной нагрузки на мосты // Изв. РАН. Механика твердого тела. - 1997. - №6. - С. 180-185.
45. Bruni S., Collina A., Corradi R. Train-track-bridge interaction: Influence of track typology on structure dynamic performance // Structural Dynamics. EUROODYN 2005. Processing of the 6-int. conf. on structural dynamics. - Paris. France. 4-7 September, 2005. - P. 1063-1068.
46. Yang Y.B., Wu Y.S. Behavior of moving trains over bridges shaken by earthquakes // Structural Dynamics. EUROODYN 2002. - Munich. Germany. 2-5 September, 2002. - P. 509-514.
47. Александров В.М., Дуплякин И.А. Динамика бесконечной балки Тимошенко, лежащей на основании с двумя упругими характеристиками, при движении деформируемого экипажа // Изв. РАН. Механика твердого тела. - 1996. - №1. - С. 180-197.
48. Александров А.В., Гарбер Б.Г. Вынужденные колебания плитно-балочных конструкций при движении нагрузок, обладающих массой // Тр. ХИИТ. - 1968. - Вып. 34. - С. 252-263.
49. Ананьин А.И., Барченков А.Г., Сафронов В.С. Динамика автодорожных мостов // динамический расчет специальных сооружений / Под ред. Б.Г. Коренева, А.Ф. Смирнова. - М.: Стройиздат, 1986. - С. 327-349.
50. Весницкий А.И., Метрикин А.В. Неустойчивость колебаний объекта, равномерно движущегося по случайно-неоднородной упругой системе // Изв. РАН. Механика твердого тела. - 1996. - №5. - С. 162-169.
51. Весницкий А.И., Метрикин А.В. Параметрическая неустойчивость колебаний тела, равномерно движущегося по периодически неоднородной упругой системе // Прикл. мат. и техн. физика. - 1993. - №2. - С. 127-133.

52. Гаврилов С.Н., Индейцев Д.А. Об эволюции локализованной моды колебаний в системе «струна на упругом основании – подвижное инерционное включение» // Прикл. математика и механика. - 2002. - Т. 66, вып. 3. - С. 864-875.
53. Глинов А.П. Анализ изгибных колебаний балки, обусловленных движением погонной нагрузки балки // Прикл. математика и механика. - 1994. - Т. 59, вып. 4. - С. 626-633.
54. Денисов Г.Г., Новиков В.В. О деформировании мембраны подвижной нагрузкой // Прикл. математика и механика. - 1997. - Т. 61, вып. 4. - С. 647-653.
55. Дерендяев Н.В., Солдатов И.Н. О движении точечной массы вдоль колеблющейся струны // Прикл. математика и механика. - 1997. - Т. 61, вып. 4. - С. 703-713.
56. Дуплякин И.А. Движение экипажа с постоянной скоростью по балке бесконечной длины, лежащей на основании с двумя упругими характеристиками // Прикл. математика и механика. - 1993. - Т. 55, вып. 3. - С. 461-471.
57. Иванченко И.И. Воздействие импульсивных и подвижных нагрузок на балку, лежащую на упругом основании // Строит. механика и расчет сооружений. - 1976. - №1. - С. 44-49.
58. Кадисов Г.М. Колебания складчатых систем при подвижных нагрузках. - Омск: СибАДИ, 1997. - 178 с.
59. Каплунов Ю.Д., Муравский Г.Б. Действие равнопеременно движущейся силы на балку Тимошенко, лежащую на упругом основании. Переходы через критические скорости // Прикл. математика и механика. - 1987. - Т. 51, вып. 3. - С. 475-482.
60. Каплунов Ю.Д. Крутильные колебания стержня на деформируемом основании при действии движущейся инерционной нагрузки // Изв. ИИ. СССР. Механика твердого тела. - 1986. - №6. - С. 174-177.
61. Колотовичев Ю.А. Проблемы совершенствования уровней колебаний поверхности грунта при движении поездов метрополитена в тоннелях неглубокого заложения // Сб. научн. тр. Ин-та строительства и архитектуры. - МГСУ, 2008. - С. 55-57.
62. Липень А.В., Чигарев А.В. Перемещения в упругом полупространстве при движении нагрузки по балке, лежащей на его поверхности // Прикл. математика и механика. - 1998. - Т. 62, вып. 5. - С. 854-859.
63. Резинов В.Г., Цыбочкин С.Г., Конон Ю.А. Напряженно-деформированное состояние упругого полупространства под воздействием перемещающейся нагрузки // Проблемы прочности. - 1987. - №10. - С. 94-98.
64. Bruni S., Collina A., Corradi R. Numerical modelling of railway runnability and ballast settlement in railroad bridges // Structural Dynamics. EUROODYN 2002. - Munich. Germany. 2-5 September, 2002. - P. 1143-1148.
65. Cojocary C.E., Irschik H., Schlacher K. Elastically supported beam carrying a beam moving at constant speed // Structural Dynamics. EUROODYN 2002. - Munich. Germany. 2-5 September, 2002. - P. 1149-1154.
66. Dahlberg T. Dynamic interaction between train and non-linear railway track model // Structural Dynamics. EUROODYN 2002. - Vol. 2. - P. 1155-1160.
67. Gao M.M., Pan J.Y. Coupling vibration analysis for train-track-bridge system // Structural Dynamics. EUROODYN 2005. - Paris. France, 4-7 September, 2005. - P. 1069-1075.
68. Gerstberger U., Knothe K. Coupling of vertical and lateral dynamics of ballasted track // Structural Dynamics. EUROODYN 2002. - Vol. 2. - P. 1167-1172.
69. Gyorgyi J., Szoke D. Calculation of vehicle-bridge dynamic interaction in shared system // Structural Dynamics. EUROODYN 2002. - Munich. Germany. 2-5 September, 2002. - P. 1083-1088.

70. Tsunashima H., Sato Y., Kondo D. Dynamics of automated guide way transit vehicle under earthquake // Intern. Symp. on Speed-up and Service Technology for Railway and Maglev Systems, STECH'03. 2003, 19-22 Aug. Tokyo, Japan. - 2003. - P. 571-576.
71. Ivanchenko I.I. Determining Moving and Impulsive Loading of Beam Systems with Distributed Parameters // Prikl. Mech. 24(9). 109-118 (1988). Int. Appl. Mech. (Engl. Transl.) 24(9), - 931-938 (1988).
72. Ivanchenko I.I. The development of analytical models for railway track dynamics // EUROMECH Colloquium 409, Abstracts, Dynamics and Long-Term Behavior of Railway Vehicles, Track and Subgrade: University of Hannover, Germany, March 6-9, 2000. - 37 p.
73. Ivanchenko I.I. Dynamic interaction of high speed railway train and bridges // Structural Dynamics. EUROLYN 2002. Munich. Germany. 2-5 September, 2002. - P. 1173 – 1178.
74. Ivanchenko I.I. The development of models for high speed railway track and bridges dynamics // Intern. Symp. on Speed-up and Service Technology for Railway and Maglev Systems, STECH'03. 2003, 19-22 Aug. Tokyo, Japan. 2003. - P. 512-517.
75. Ivanchenko I.I. Analytical study dynamic interaction between vehicles and viaducts in high speed railways // Processing of the conference: Vehicle system dynamics, identification and anomalies, 6-8 November, 200, Budapest, Hungary. 2000. - P. 119-128.
76. Ivanchenko I.I. Dynamics interaction of high-speed monorails trains and viaduct-structures // Structural Dynamics. EUROLYN 2005. - Vol. 3. - P. 1675-1681.
77. Ivanchenko I.I. Dynamics Interaction of High Speed Railway Train And Double-Track Bridges // Structural Dynamics. EUROLYN 2008. Southampton. United Kindom. 7-10 July, 2008; book of abstracts (P. 36) and the CD-ROM (E62).
78. Ivanchenko I.I., Shapovalov S.N. Design of composite, long structures modeling railway tracks for moving loads // EUROMECH Colloquium 484, Abstracts, Wave mechanics and stability of long flexible structures subject to moving loads and flows. University of Delft, Netherlands. 19-22 September, 2006. - P. 30-31.
79. Ivanchenko I.I., Shapovalov S.N. The development of models for high-speed railway track dynamics // Intern. Symp. on Speed-up and Service Technology for Railway and Maglev Systems, STECH'09, 2009. Niigata, Japan, book of abstracts (P. 100-101) and the CD-ROM (ID352225).
80. Klasztorny M., Myslecki K., Machelski C., Podworna M. Dynamic analysis of a series-of-types of steel beam bridges loaded by a Shinkansen train moving at high speeds // Structural Dynamics. EUROLYN 2002. - Munich. Germany. 2-5 September, 2002. - P. 1179-1184.
81. Knothe K., Grassie S.L. Modeling of railway track and vehicle/track interaction at high frequencies // Vehicle System Dynamics. - 1993. - Vol. 22. - P. 209-262.
82. Ishiida M., Namura A., Suzuki T. Prediction model of track settlement based on dynamic simulation // Intern. Symp. on Speed-up and Service Technology for Railway and Maglev Systems, STECH'03. 2003, 19-22 Aug. - Tokyo, Japan. - 2003. - P. 65-70.
83. Metrikine A.V. Energetics of a moving object on a long elastic structure // Vehicle System Dynamics. EUROLYN 2005. - Vol. 2. - P. 1155-1160.
84. Metrikine A.V., Popp K. vibration of a periodically supported beam on an elastic half-space // European J. of Mechanics A. Solids 18(4). - 1999. - P. 679-701.
85. Tanabe T., Matsumoto N., Wakui H., Okuda H., Sogabe N., Tanabe Y. Dynamic interaction analysis of a Shinkansen train and the railway structure under seismic loads // Structural Dynamics. EUROLYN 2005. - Paris. France, 4-7 September, 2005. - P. 1001-1005.
86. Weitkemper U., Krill A. Dynamic Rolling Stock of a Railway Bridge with Single Span Precast Box Girders // Structural Dynamics. EUROLYN 2002. - Munich. Germany. 2-5 September, 2002. - P. 259-263.

87. Xia H., Zhang N., Sun G.J. Experimental study of railway bridges under high speed trains // Structural Dynamics. EUROODYN 2005. - Paris. France, 4-7 September, 2005. - P. 1083-1088.
88. Yau J.D., Fryba L. Chu S.J., Yang Y.B. Resonance of Ballastless Track Systems Caused by Vehicle-Track // Structural Dynamics. EUROODYN 2002, Supplement to the Proceedings of EUROODYN 2002. - 6 p.
89. Zoller V. Zobory I. Analysis of railway track dynamics by using Winkler model with initial geometrical irregularity // VSDIA 2000. - P. 113-118.
90. Igumnov L.A., Okonechnikov A.S., Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. Plane nonstationary problem of motion of the surface load over an elastic half space // Journal of Mathematical Sciences. - 2014. - Vol. 203, No 2. - P.193-201.
91. Богданов Н.Н., Сильницкий И.А. Общие положения классификации пролетных строений железнодорожных мостов по грузоподъемности по методу предельных состояний // Тр. МИИТ: Железобетонные пролетные строения мостов. - 1969. - Вып. 275. - С. 3013.
92. Евграфов Г.К., Богданов Н.Н. Проектирование мостов. - М.: Транспорт, 1966. - 664 с.
93. Круглов В.М., Потапов В.Д., Косицин С.Б., Долотказин Д.Б., Лукьянов М.А. Статические расчеты вантового моста с арочными пилонами // Строит. механика и расчет сооружений. - 2008. - №5. - С. 19-23.
94. Носырев А.В., Сильницкий И.А. Об одном виде динамического взаимодействия подвижного состава на балочные пролетные строения железнодорожных мостов // Тр. МИИТ. - Вып. 252. - С. 101-105.
95. Осипов В.О. Резервы металлических мостов и их реализация // Тр. МИИТ. - Вып. 898. - С. 46-49.
96. Петропавловский А.А. Матричные алгоритмы смешанного метода в нелинейных задачах теории висячих и арочных мостов современных систем // Тр. МИИТ. - 1977. - Вып. 561. - С. 3-58.
97. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. - М.: Гостехиздат, 1956. - 600 с.
98. Иванченко И.И. Динамика мостовых и путевых конструкций при действии железнодорожной подвижной нагрузки // Изв. РАН. Механика твердого тела. - 2005. - №4. - С. 158-177.
99. Иванченко И.И. Метод подконструкций в задачах динамики скоростной монорельсовой дороги // Изв. РАН. Механика твердого тела. - 2008. - №6. - С. 101-117.
100. Китаев К.Е. Вынужденные колебания балочных и арочных систем железнодорожных мостов в вертикальной плоскости // Тр. МИИТ. - 1971. - Вып. 364. - С. 11-20.
101. Козьмин Ю.Г. Кондратов В.В. Метод оценки влияния вибраций элементов решетки главных ферм металлических сквозных пролетных строений на усталостную прочность // Вопр. динамики мостов и теории колебаний. - Днепропетровск: 1983. - С. 27-32.
102. Колоушек В. динамика строительных конструкций. - М.: Стройиздат, 1965. - 632 с.
103. Поляков В.Ю. Системный анализ в проектировании мостов при высокоскоростном движении // Тр. МИИТ. - 1993. - Вып. 863. - С. 57-65.
104. Потапов В.Д., Папаев М.А. Об устойчивости висячих вантовых мостов, находящихся под действием ветровых нагрузок, в детерминированной и стохастических постановках // Строит. механика и расчет сооружений. - 2007. - №5. - С. 30-37.
105. Сафронов В.С. Расчет висячих и вантовых мостов на подвижную нагрузку. - Воронеж: ВГУ, 1983. - 196 с.
106. Смирнов В.А. Висячие мосты больших пролетов. - М.: Высшая школа, 1970. - 407 с.

107. Цернант А.А., Звягинцев А.Н., Матвеев И.К., Павлов Е.И. Возможности технологии вибродиагностики мостовых сооружений // Вест. отд.: Транспортное строительство Рос. Акад. транспорта. - 2002. - С. 69-71.
108. Gerlich K., Pfeifer R. Moderne Eisenbahnbrücke in Betonbauweise // ETR 36(1987). Н. 7/8, 1987. - P. 495-502.
109. Hale A.L., Meirovitch L. A procedure for improving discrete substructure representation in dynamic synthesis // AIAA J., 1982. - Vol. 20, N 8. - P. 1128-1136.
110. Issa Raja R.A., Avent R. Richard Superelement stiffness matrix for space trusses // J. Struct. Eng. 1984. - Vol/ 110, N 5. - P. 1163-1179.
111. Miyazaki S., Kanamori M., Wakui H., Matsumoto N., Sogabe M. Analytical Study on Dynamic Response and Riding Comfort of PC Multicable-stayed Railway Bridge // The third International Congress on high-speed Transport. - Yokohama, Japan. - 1993. - P. 421-435.
112. Иванченко И.И. Метод расчета на подвижную нагрузку стержневых систем, моделирующих мосты // Изв. РАН. Механика твердого тела. - 2001. - №4. - С. 151-165.
113. Garg V.K., Chu K.H., Wang T.L. A study of railway bridge/vehicle interaction and evaluation of fatigue life // Earthquake Engineering and Struct. Dynam. - 1985. - Vol 13. - P. 687-709.
114. Heubner K.H. The finite element method for engineers. - N.-Y.-Toronto: John. Wiley and Sons, 1975. - 500 p.
115. Jacquot R.G. The application of sinusoidally derived beam receptance to calculation of transient responses for damped composite systems // J. Sound and Vibr. - 1983. - Vol. 90, N 4. - P. 471-478.
116. Шапошников Н.Н., Юдин В.В., Шварцман Л.М. расчет регулярных конструкций с использованием метода последовательного удвоения суперэлемента // Расчеты на прочность. - 1984. - №25. - С. 259-285.
117. Иванченко И.И., Грошев Д.Г. Теоретические исследования воздействия подвижной нагрузки на мосты: Фундаментальные и поисковые научно-исследовательские работы в области железнодорожного транспорта // Тр. МИИТ. - 2001. - Вып. 928. - С. 72-74.
118. Иванченко И.И. Динамическое взаимодействие мостов и высокоскоростных железнодорожных составов // Изв. РАН. Механика твердого тела. - 2011. - №3. - С. 146-160.
119. Вериго М.Ф., Коган А.Я. Взаимодействие пути и подвижного состава. - М.: Транспорт, 1987. - 559 с.
120. Дробышевский Б.А. Специфические особенности малых мостов и их учет // Транспортное строительство. - 2006. - №2. - С. 12-15.
121. Зылёв В.Б. Компьютерное моделирование сбрасывания старого пролетного строения моста при демонтаже // Вестн. мостостроения. - 1999. - №3-4. - С. 55-56.
122. Иванченко И.А., Платонов Е.В. Железнодорожные паромные переправы. - М.: Трансжелдориздат, 1943. - 132 с.
123. Иванченко И.И. Современные динамические модели верхнего строения железнодорожного пути // Безопасность движения поездов. 11-я научно-практич. конф. М., 21-22 октября 2010 г.: МИИТ, 2010. -С. 11-40.
124. Кляйн П., Ямут М. Вантово-арочный мост в Малайзии // Мостостроение мира. - 2004. №1-2. - С. 3-8.
125. Меле Р., Теста М., Тисальви М. Новая конструкция пути длч металлических мостов // Железные дороги мира. - 2004. - №2. - 80 с.
126. Потапкин А.А. Проектирование стальных мостов с учетом пластических деформаций. - М.: Транспорт, 1984. - 201 с.

127. Россихин Ю.А., Шитикова М.В. Влияние вязкости на характер протекания колебательных процессов в висячей комбинированной системе // Изв. РАН. Механика твердого тела. - 1995. - №1. - С. 168-177.
128. Сравнение системы на магнитном подвесе с традиционной колесо-рельс (R. Breimeier) // Железные дороги мира. - 2001. - №4. - С. 33-39.
129. Уткин Г.А. Теоретические основы динамики одномерных систем с движущимися по ним объектами. Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. - Нижний Новгород : Нф ИМАШ АН СССР, 1991. - 256 с.
130. Крысов С.В. Волновые процессы при контактных взаимодействиях подвижных сопряжений в упругих элементах машин и конструкций. Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. - Нижний Новгород: Нф ИМАШ РАН, 1992. -313 с.
131. Метрикин А.В. Переходное излучение в упругих системах. Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. - Нижний Новгород: Нф ИМАШ РАН, 1998. - 221 с.
132. Суворова Т.В. Динамическое взаимодействие систем полуограниченных и ограниченных деформируемых тел, моделирующих железнодорожный путь и объекты инфраструктуры. Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. - Ростов-на-Дону: РГУПС, 2004. - 319 с.
133. Костарев С.А. Анализ вибраций, генерируемых линиями метрополитена, и разработка комплекса мероприятий по их снижению. Диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук. - М.: Тоннельная ассоциация России, 2004. - 270 с.
134. Веричев С.Н. Устойчивость колебаний механических систем с движущимися нагрузками. Диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук. Нижний Новгород: Нф ИМАШ РАН, 2009. - 312 с.
135. Гаврилов С.Н. Нестационарная динамика упругих тел с подвижными включениями и границами. Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. - С.Петербург: ИПМаш РАН, 2013. - 239 с.
136. Сергеев А.Д. Динамика дискретно-континуальных механических систем. Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. - С.Петербург: ИПМаш РАН, 2007. - 332 с.
137. Болдин В.П. Динамика двумерных упругих систем с движущимися нагрузками и закреплениями. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. - Горький: ГИСИ им. В.П. Чкалова, 1987. - 149 с.
138. Сьянов С.А. Вынужденные колебания и резонанс одномерных упругих систем с движущимися нагрузками. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. - Горький: ГГУ им. Н.И. Лобачевского, 1987. - 120 с.
139. Быченков В.А. Волновое сопротивление движению нагрузок вдоль одномерных упругих систем. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. - Горький: ГГУ им. Н.И. Лобачевского, 1988. - 184 с.
140. Лисенкова Е.Е. Движение объектов под действием давления упругих волн. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Нижний Новгород: Нф ИМАШ РАН, 2009. - 146 с.
141. Маланов С.Б. Ударное взаимодействие материальной точки с одномерной упругой системой. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. - Горький: Гф ИМАШ АН СССР, 1989. - 140 с.

142. Кажаяев В.В. Волновые процессы в распределенных системах, взаимодействующих с сосредоточенными объектами. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. - Нижний Новгород: Нф ИМАШ РАН, 1999. - 140 с.
143. Сазонова М.Л. Некоторые особенности динамики распределенных упругих систем и их взаимодействия с дискретными объектами. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. - Нижний Новгород: ННГУ им. Н.И. Лобачевского, 2011. - 119 с.
144. Вострухов А.В. Динамика железнодорожного пути с учетом волн в грунте. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. - Нижний Новгород: ННГУ им. Н.И. Лобачевского, 2001. - 139 с.
145. Филатов Л.В. Задачи динамики тел, движущихся вдоль упругих направляющих. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. - Нижний Новгород: Нф ИМАШ РАН, 1993. - 190 с.
146. Кононов А.В. Переходное излучение в двумерных упругих системах. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. - Нижний Новгород: Нф ИМАШ РАН, 1995. - 120 с.
147. Усошин С.А. Воздействие движущихся нагрузок на слоистые гетерогенные основания. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. - Ростов-на-Дону: РГУПС, 2011. - 130 с.
148. Точилин М.В. Разработка моделей для оптимизации объектов скоростного наземного транспорта. Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук. - Нижний Новгород: Нф ИМАШ РАН, 2005. - 153 с.
149. Богданов Ю.В. Экспериментальные исследования волновых процессов при контактном и бесконтактном взаимодействии движущихся нагрузок с вязкоупругими опорными направляющими. - Нижний Новгород: Нф ИМАШ РАН, 2004. - 152 с.
150. Бутова С.В. Динамическая устойчивость высокоскоростных объектов при движении по направляющим ракетного трека. Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук. - Саров: СарФТИ – филиал НИЯУ «МИФИ», 2014. - 107 с.
151. Оконечников А.С. Нестационарное движение сосредоточенной нагрузки по границе упругой полуплоскости. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. - М.: МАИ, 2015. - 96 с.
152. Колесов Д.А. Волны в одномерных распределенных механических системах, взаимодействующих с упруго-инерционными и неоднородными основаниями. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. - Нижний Новгород: ИПМ РАН, 2019. - 133 с.

*Дата поступления: 14 января 2021 г.*