DOI: 10.18411/vntr2020-156-2

УДК 621.9.02

НОВЫЙ РЕЗУЛЬТАТ В КЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ОГИБАЮЩИХ КРИВЫХ И ПОВЕРХНОСТЕЙ

© Степан Павлович Радзевич
EATON Corp., Detroit, USA
radzevich@usa.com

Аннотация. *Поверхности, образованные как огибающие некоторой заданной поверхности, широко используются в инженерной практике. В первую очередь, это боковые поверхности зубьев зубчатых колес, методы и режущие инструменты для обработки боковые поверхностей зубьев колес и пр. В статье рассмотрено необходимое и достаточное условие для нахождения огибающей к последовательными положениям некоторой гладкой регулярной поверхности, совершающей движение в пространстве. Показано, что огибающай может быть образована не любой гладкой поверхностью, и не при любом ее движении относительно системы отсчета, в которой огибающую требуется определить. Установлено, что огибающие поверхности двух видов образуются в общем случае пространственного движения исходной поверхности. Эти огибающие предложено называть* "*огибающими первого рода*" и "*огибающими второго рода". Рассмотренный в статье результат является новым для классической теории огибающих кривых и поверхностей*.

Ключевые слова: *гладкая поверхность, огибающая поверхность, движение поверхностей, уравнение Шишкова, интерференция, сепарация*.

A NEW ACCOMPLISHMENT IN THE CLASSICAL THEORY OF ENVELOPE CURVES AND SURFACES

© Stephen P. Radzevich
EATON Corp., Detroit, USA
radzevich@usa.com

Abstract. *Surfaces generated as envelopes to a family of smooth surfaces are widely used in engineering practice. First of all, these are the tooth flanks of the gear teeth, methods and cutting tools for machining the tooth flanks of the gear teeth, etc. The article considers the necessary and sufficient condition for finding the envelope to the successive positions of some smooth regular surface that travels in space. It is shown that the envelope can be formed not by any smooth surface, and not by any of its movement relative to the frame of reference in which it is required to determine the envelope. It has been established that the enveloping surfaces of two types are formed in the general case of the spatial motion of the original surface. It is prepositional to call these envelopes "envelopes of the first kind" and "envelopes of the second kind". The result reported in the paper is new for the classical theory of enveloping curves and surfaces*.

Key words: *smooth surface, envelope surface, motion of surfaces, "Shishkov equation of contact", interference of surfaces, separation of surfaces*.

Введение. Классическая теория огибающих плоских кривых и поверхностей представляет собой один из разделов классической дифференциальной геометрии поверхностей, которая приобрела завершенную форму в XIX столетии (дифференциальная геометрия плоских и пространственных кривых во многих отношениях представляет собой частный случай дифференциальной геометрии поверхностей). Разработанные в классической теории огибающих методы позволяют найти огибающую к последовательным положениям гладкой регулярной поверхности, совершающей известное движение в системе координат, в которой требуется найти огибающую.

Ниже однопараметрическое движение гладкой регулярной поверхности рассматривается как пример. Полученные таким путем результаты могут просто быть обобщены на случай многопараметрического движения гладкой поверхности в пространстве.

Огибающая поверхность: дифференциально-геометрический подход. Рассмотрим некоторую гладкую регулярную поверхность, которая совершает некоторое движение в пространстве. Эта исходная поверхность задана векторным уравнением вида $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1(U_1, V_1)$. Здесь обозначено: $\mathbf{r}_1$ – радиус-вектор текущей точки поверхности, U_1 и V_1 – криволинейные (гауссовы) координаты текущей точки на этой поверхности.

Предполагается, что уравнение движущейся поверхности $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1(U_1, V_1)$ удовлетворяет условию:

$$\frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial U_1} \times \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial V_1} \neq 0 \qquad (1)$$

а параметры U_1 и V_1 определены в закрытых интервалах:

$$U_1^{\min} \le U_1 \le U_1^{\max} \qquad \text{и} \qquad V_1^{\min} \le V_1 \le V_1^{\max} \qquad (2)$$

где $U_1^{\min}$, $U_1^{\max}$ и $V_1^{\min}$, $V_1^{\max}$ являются граничными значениями изменения параметров U_1 и V_1, соответственно.

Параметр движения поверхности $\mathbf{r}_1$ обозначим через ω_1. В произвольном положении исходной поверхности $\mathbf{r}_1$, радиус-вектор $\mathbf{r}_1^*$ текущей точки поверхности удовлетворяет уравнению $\mathbf{r}_1^* = \mathbf{r}_1^*(U_1, V_1, \omega_1)$. Чтобы найти огибающую к последовательным положениям движущейся поверхности $\mathbf{r}_1$, необходимо исключить параметр огибания ω_1 из уравнения $\mathbf{r}_1^* = \mathbf{r}_1^*(U_1, V_1, \omega_1)$. Для этого используется дополнительное уравнение $\partial \mathbf{r}_1^* / \partial \omega_1 = 0$. Решив это уравнение относительно параметра огибания ω_1, и подставив найденное решение в уравнение $\mathbf{r}_1^* = \mathbf{r}_1^*(U_1, V_1, \omega_1)$, приходим к уравнению огибающей поверхности $\mathbf{r}_2$, которое может быть приведены к виду $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_2(U_1, V_1)$.

В этом сущность т.н. *традиционного* подхода определения огибающей поверхности, разработанный в дифференциальной геометрии поверхностей.

Огибающая поверхность: кинематический подход. При исследовании механизмов и машин давно обратили внимание на то, что если контак двух взаимодействующих поверхностей непрерывен, то в точке (точках) контакта нормальная составляющая скорости относительного дважения поверхностей равна нулю. Аналитически это условие контакта записывается так: $\mathbf{n} \cdot \mathbf{V}_{\Sigma} = 0$. Здесь обозначено: $\mathbf{n}$ – единичный вектор контактной нормали, и $\mathbf{V}_{\Sigma}$ – вектор линейной скорости мгновенного относительного движения поверхностей $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ в точке контакта.

Кинематический метод нахождения огибающей поверхности разработан в первой половине XX столетия с учетом особенностей задач, решаемых в теории механизмов и машин, и в теории зубчатых зацеплений, в частности. Определяющий вклад в разработку кинематического метода сделан проф. *В.А. Шишковым* [1], [2]. В связи с этим введенное проф. *В.А. Шишковым* уравнение контакта в форме скалярного произведения $\mathbf{n} \cdot \mathbf{V}_{\Sigma} = 0$ предложено [3] называть "*уравнением Шишкова*".

"*Уравнение Шишкова,* $\mathbf{n} \cdot \mathbf{V}_{\Sigma} = 0$" эквивалентно уравнению $\partial \mathbf{r}_1^* / \partial \omega_1 = 0$ (см. выше), в чем легко убедиться, представив уравнение $\partial \mathbf{r}_1^* / \partial \omega_1 = 0$ в виде:

$$\left[\frac{\partial \mathbf{r}_1^*}{\partial U_1} \quad \frac{\partial \mathbf{r}_1^*}{\partial V_1} \quad \frac{\partial \mathbf{r}_1^*}{\partial \omega_1} \right]^T = 0 \tag{3}$$

Из уравнения (3) легко видеть, что первые две компоненты определяют контактную нормаль, $\mathbf{n}$, тогда как третья компонента определяет линейную скорость, $\mathbf{V}_{\Sigma}$, относительного движения поверхностей в точке (точках) их контакта:

$$\left[\underbrace{\frac{\partial \mathbf{r}_1^*}{\partial U_1} \quad \frac{\partial \mathbf{r}_1^*}{\partial V_1}}_{\mathbf{n}} \quad \underbrace{\frac{\partial \mathbf{r}_1^*}{\partial \omega_1}}_{\mathbf{V}} \right] = 0 \tag{4}$$

Поскольку скалярное произведение двух векторов, $\mathbf{n}$ и $\mathbf{V}_{\Sigma}$, приравнивается нулю, нормирующий множитель $\left| \frac{\partial \mathbf{r}_1^*}{\partial U_1} \times \frac{\partial \mathbf{r}_1^*}{\partial V_1} \right|^{-1}$ в выражении для $\mathbf{n}$ опущен.

Ограничения, свойственные рассмотренным подходам нахождения огибающей поверхности. Круг задач, которые можно решить каждым из кратко рассмотренных выше методов нахождения огибающей поверхности (т.е., как *дифференциально-геометрическим* методом, так и *кинематическим* методом) ограничен простыми случаями, когда либо движущаяся поверхность допускает движение "*самой по себе*", либо (что наблюдается реже) полученная огибающая поверхность допускает движение "*самой по себе*", либо (вырожденный случай) – когда обе поверхности допускают движение указанного вида. Примерами поверхностей, допускающих движение "*самих по себе*", являются поверхности вращения, цилиндры общего вида, винтовые поверхности постоянного шага, а также вырожденные случаи поверхностей видов: круглые цилиндры, плоскость и сфера.

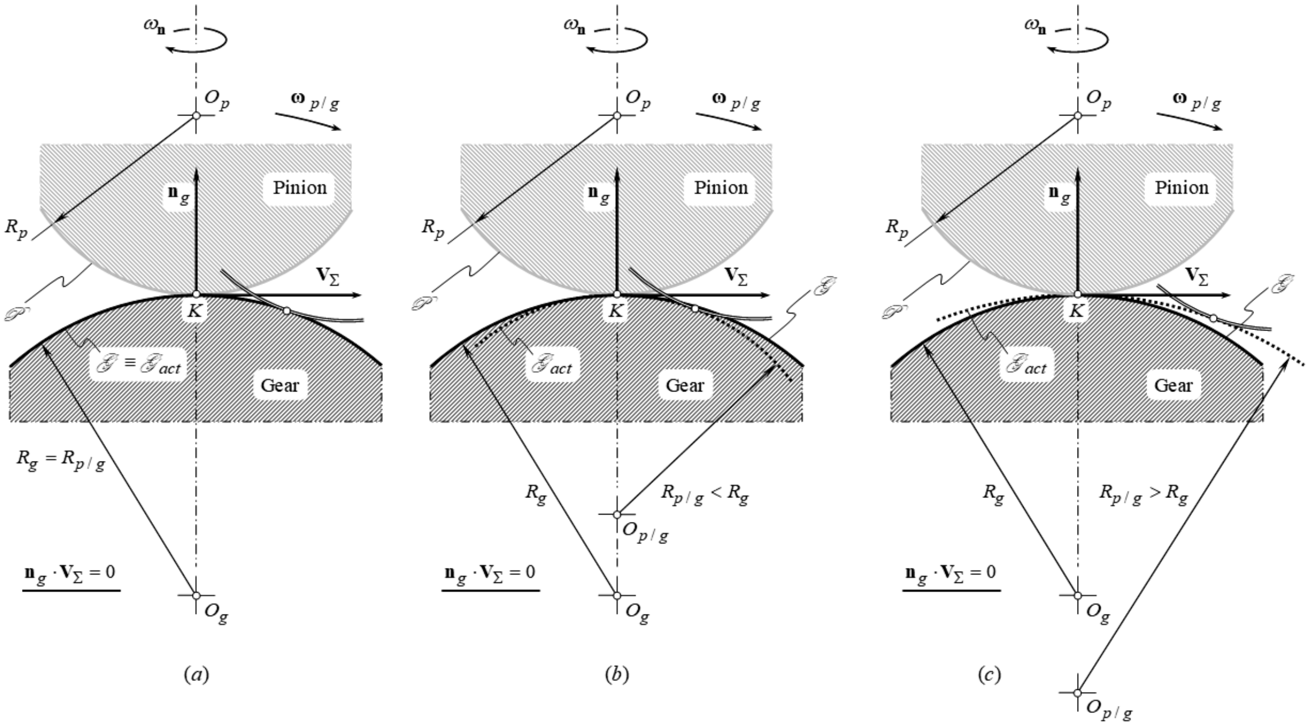

Рис. 1. Примеры (a) выполнения и нарушения (b) и (c) закона сопряженности поверхностей: (b) интерференция, и (c) сепарация, боковых поверхностей зубьев зубчатого колеса, $\mathcal{G}$, и сопряженной шестерни, $\mathcal{P}$: "*уравнение Шишкова,* $\mathbf{n} \cdot \mathbf{V}_\Sigma = 0$" выполняется во всех трех случаях (a), (b), и (c), тогда как закон сопряженности поверхностей $\mathcal{G}$ и $\mathcal{P}$ нарушается в случаях (b) и (c).

{Подробнее поверхности, допускающие движение "*самих по себе*", рассмотрены в [4], [5], и др.}.

Если поверхность $\mathbf{r}_1$ (или поверхность $\mathbf{r}_2$) относится к группе поверхностей, допускающих движение "*самих по себе*", то образуемые в этом случае огибающие будет называть "*огибающей первого рода*".

В чем особенность огибания первого рода?

Пусть поверхность $\mathbf{r}_2$ образована как огибающая движущейся поверхности $\mathbf{r}_1$. Естественно предположить, что поверхность $\mathbf{r}_1$ может быть образована поверхностью $\mathbf{r}_2$, совершающей движения, обратные движениям поверхности $\mathbf{r}_1$. Такое огибание поверхностей возможно, а огибающая и огибаемая поверхности в этом случае называются "*возвратно-огибаемыми поверхностями*" {т.е., "*reversibly-enveloping surfaces*" или, для простоты, "R_e – *surfaces*" [4]}.

Рассмотренные методы нахождения огибающей поверхности нельзя использовать при формообразовании методом обката точных поверхностей, например, боковых поверхностей зубьев точных колес для зубчатых передач с перекрещивающимися осями вращения колеса и шестерни.

В более общем случае, например, когда огибающая поверхность, $\mathbf{r}_2$, образуется в обкаточном движегнии поверхности $\mathbf{r}_1$, огибающая поверхность, $\mathbf{r}_2$, существует, но она не является “*возвратно-огибаемой поверхностью*” к поверхности $\mathbf{r}_1$. Это следует понимать так, что в рассматриваемом случае огибающая поверхность $\mathbf{r}_2$ образуется при движении исходной поверхности $\mathbf{r}_1$; но если попытаться образовать исходную поверхность $\mathbf{r}_1$ обратным движением поверхности $\mathbf{r}_2$, то вместо ожидаемой поверхности $\mathbf{r}_1$ образуется некая другая поверхность $\mathbf{r}_3$, отличная от поверхности $\mathbf{r}_1$. Это как раз и является следствием того, что поверхности $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ не являются “*возвратно-огибаемыми*”. Изложенное иллюстрируется простым примером.

На рис. 1 показаны возможные виды контакта боковых поверхностей, $\mathcal{G}$ и $\mathcal{P}$, зубьев зубчатого колеса и шестерни. Помним, что в процессе обкатки движения поверхностей $\mathcal{G}$ и $\mathcal{P}$ взаимоувязаны. При образовании поверхности, $\mathcal{G}$, как огибающей поверхности, $\mathcal{P}$, возможны следующие три случая.

Во-первых, в процессе обкаточного движения радиус кривизны, R_g, поверхности $\mathcal{G}$ и радиус $R_{p/g}$ траектории контактной точки на поверхности $\mathcal{P}$ могут быть равны один другому ($R_g = R_{p/g}$), как это показано на рис. 1,a. В этом случае в качестве огибающей поверхности образуется ожидаемая поверхность $\mathcal{G}$.

Во-вторых, в относительном движении поверхностей может иметь место случай (см. рис. 1,b), когда радиус кривизны, R_g, поверхности $\mathcal{G}$ больше радиуса $R_{p/g}$ траектории контактной точки поверхности $\mathcal{P}$ ($R_g > R_{p/g}$). В этом случае в качестве огибающей поверхности образуется некая поверхность $\mathcal{G}_{act}$, отличающаяся от требуемой поверхности $\mathcal{G}$.

В-третьих, в относительном движении поверхностей радиус кривизны, R_g, поверхности $\mathcal{G}$ может быть меньше радиуса $R_{p/g}$ траектории контактной точки поверхности $\mathcal{P}$ ($R_g < R_{p/g}$), как это показано на рис. 1,c. В этом случае в качестве огибающей поверхности образуется некая поверхность $\mathcal{G}_{act}$, также отличающаяся от требуемой поверхности $\mathcal{G}$.

Из рассмотренного простого примера видно, что условия, накладываемые “*уравнением Шишкова,* $\mathbf{n} \cdot \mathbf{V}_{\Sigma} = 0$”, выполняются во всех трех случаях (см. рис. 1), тогда как “*огибающая первого рода*” образуется только в первом случае (см. рис. 1,a). Во втором (см. рис. 1,b) и в третьем (см. рис. 1,c) случаях образуются “*огибающая второго рода*”.

Необходимое и достаточное условие существования “*огибающая первого рода*”. Ограничение, накладываемое “*уравнением Шишкова,* $\mathbf{n} \cdot \mathbf{V}_{\Sigma} = 0$”, является необходимым и достаточным условием существования “*огибающая второго рода*”. Для существования “*огибающей первого рода*”, ограничение, накладываемое “*уравнением Шишкова,* $\mathbf{n} \cdot \mathbf{V}_{\Sigma} = 0$”, является только необходимым, то не достаточным. Чтобы существовала “*огибающая первого рода*”, контактная нормаль должна пересекать ось мгновенного относительного вращения (в общем случае: ось мгновенного винтового движения) в каждый момент относительного движения поверхностей. Для общего случая

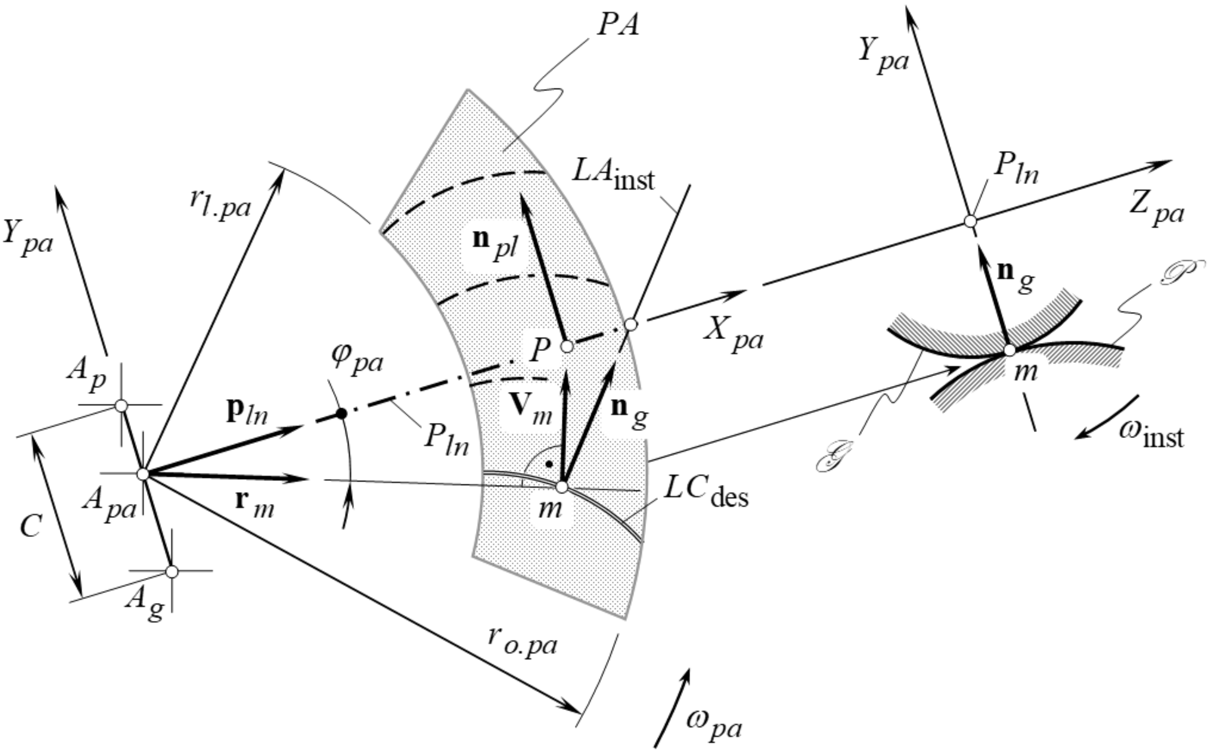

Рис. 2. К выводу достаточного условия существования “*огибающих первого рода*”.

образования огибающей поверхности, это условие впервые было сформулировано (~2008) в [6].

Желательно иметь аналитически описанный критерий, позволяющий определить, являются ли две поверхности “*огибающими первого рода*”.

Когда определяется огибающая к последовательным положениям движущейся поверхности, прямые линии, направленные вдоль контактной нормали, $\mathbf{n}_1$, в каждой точке характеристики $\mathscr{E}$ должны пересекать ось мгновенного вращения, P_{ln}. Это требование является ключевым для того, чтобы некоторая пара гладких поверхностей могла быть отнесена к группе “*огибающих первого рода*”.

Еще не имея построенных поверхностей, $\mathscr{G}$ и $\mathscr{P}$, зададимся характеристикой $\mathscr{E}$. В произвольной точке m характеристики $\mathscr{E}$ общая нормаль $\mathbf{n}_1$ пересекает ось мгновенного вращения, P_{ln}, и образует с ней некоторый угол.

На рис. 2 построены три вектора $\mathbf{p}_{ln}$, $\mathbf{V}_m$, and $\mathbf{n}_1$. Два из них, $\mathbf{p}_{ln}$ и $\mathbf{V}_m$, определяют плоскость, в которой наблюдается мгновенное относительное вращение поверхностей.

Единичный вектор $\mathbf{p}_{ln}$ направлен вдоль оси мгновенного вращения, P_{ln}. В декартовой системе координат $X_{pa}Y_{pa}Z_{pa}$ этот вектор представим в виде:

$$\mathbf{p}_{ln} = \mathbf{i} \tag{5}$$

В системе координат $X_{pa}Y_{pa}Z_{pa}$ вектор линейной скорости, $\mathbf{V}_m$, может быть представлен уравнением:

$$\mathbf{V}_m = \mathbf{i} \cdot V_m \sin\varphi_{pa} + \mathbf{j} \cdot V_m \cos\varphi_{pa} \tag{6}$$

Абсолютная величина вектора, $\mathbf{V}_m$, здесь опущена т.к. для рассмотрения ниже важно только направление вектора, $\mathbf{V}_m$, а не его величина.

Третий единичный вектор, $\mathbf{n}_1$, перпендикулярен к поверхности 1 в точке m. Поэтому вектор $\mathbf{n}_1$ может быть описан уравнением:

$$\mathbf{n}_1 = \frac{\dfrac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial U_1} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial V_1}}{\left| \dfrac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial U_1} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial V_1} \right|} = \mathbf{i} \cdot n_{1.x} + \mathbf{j} \cdot n_{1.y} + \mathbf{k} \cdot n_{1.z} \tag{7}$$

Чтобы пара поверхностей соответствовала “*огибающей первого рода*”, три вектора $\mathbf{p}_{ln}$, $\mathbf{V}_m$, и $\mathbf{n}_1$ должны составлять тройку компланарных векторов. В этом случае тройное смешанное произведение этих векторов тождественно равно нулю:

$$\mathbf{p}_{ln} \times \mathbf{V}_m \cdot \mathbf{n}_1 = 0 \tag{8}$$

В общем случае, единичный вектор $\mathbf{p}_{ln}$ представим в виде:

$$\mathbf{p}_{ln} = \mathbf{i} \cdot p_{ln.x} + \mathbf{j} \cdot p_{ln.y} + \mathbf{k} \cdot p_{ln.z} \tag{9}$$

Аналогично, вектор линейной скорости, $\mathbf{V}_m$, может быть записан так:

$$\mathbf{V}_m = \mathbf{i} \cdot V_{m.x} + \mathbf{j} \cdot V_{m.y} + \mathbf{k} \cdot V_{m.z} \tag{10}$$

Выражение, эквивалентное уравнению (8), может быть записано в форме определителя:

$$\mathbf{p}_{ln} \times \mathbf{V}_m \cdot \mathbf{n}_1 = \begin{vmatrix} p_{ln.x} & p_{ln.y} & p_{ln.z} \\ V_{m.x} & V_{m.y} & V_{m.z} \\ n_{1.x} & n_{1.y} & n_{1.z} \end{vmatrix} = 0 \tag{11}$$

Чтобы исключить случаи, когда векторы, $\mathbf{V}_m$ и $\mathbf{p}_{ln}$, параллельны один другому, дополнительное условие должно быть соблюдено:

$$|\mathbf{V}_m \times \mathbf{p}_{ln}| = \left| \frac{\partial \mathbf{r}_s}{\partial \varphi_{pa}} \times \mathbf{p}_{ln} \right| \neq 0 \tag{12}$$

Случай параллельности векторов, $\mathbf{n}_{pl}$ и $\mathbf{n}_1$, может быть также исключен, если выполнено условие:

$$\mathbf{p}_{ln} \times \mathbf{n}_1 \neq 0 \tag{13}$$

Две поверхности представляет собой пару “*огибающих первого рода*”, если условия:

$$\begin{cases} \mathbf{p}_{ln} \times \mathbf{V}_m \cdot \mathbf{n}_1 = 0 \\ \mathbf{p}_{ln} \times \mathbf{n}_1 \neq 0 \end{cases} \tag{14}$$

соблюдены в каждой точке характеристики E во всех возможных относительных положениях движущейся и огибающей поверхностей.

Изложенное подтверждает ранее сделанный вывод о том, что возможны два вида огибающих поверхностей: "*огибающие первого рода*" и "*огибающие второго рода*".

Не каждая гладкая регулярная поверхность может образовать огибающую первого рода.

Когда выполняется условие для "*огибающии первого рода*", условие для "*огибающии второго рода*" выполняется всегда. Обратное утверждение не верно.

Связь полученных результатов с ранее выполненными исследованиями. Связь изложенных в статье результатов может быть прослежена вплоть до исследований, выполненных *Charles Camus*, и до фундаментальных публикаций *Leonhard Euler* [7] и [8].

Camus был близок к пониманию сущности образования в обкаточном движении "*огибающих первого рода*", но не сделал последний шаг в этом направлении.

Euler в статьях [7] и [8] исследовал простейший случай передачи вращения зубчатой парой с ***параллельными*** осями (т.н., "*parallel-axes gearing*", или просто "$P_a - gearing$") и указал на обязательность в этом случае прохождения "*линии действия*" (контактной нормали) через стационарный полюс зацепления.

Позже (~1835-1836) и независимо от *Euler* к эквивалентным результатам пришел *Félix Savary*.

Конечным достижением *Camus, Euler* и *Savary* в этой области стала т.н. *основная теорема теории плоских зубчатых зацеплений*, т.е. относящаяся к $P_a - gearing$. Эту теорему принято называть "*Camus-Euler-Savary теорема*" (или просто "*CES-теорема*" теории зубчатых зацеплений). В Европе "*CES-теорема*" стала широко известной после издания книги *Robert Willis* [9]. Вследствие этого *основная теорема теории зубчатых зацеплений* в Европе называется "*теоремой Виллиса*", что не правильно. Эту теорему *Willis* не доказывал и прямого отношения к ней не имеет. Он только способствовал распространению сведений об этой теореме.

Критерий существования огибающей кривой на плоскости в работах [7], [8] и [9] не рассматривался. Везде, где это допустимо и недопустимо, для нахождения огибающей используется кинематический метод и "*уравнением Шишкова,* $\mathbf{n} \cdot \mathbf{V}_{\Sigma} = 0$". Ранее кинематический метод нахождения огибающей поверхности применялся без использования "*уравнением Шишкова*", что конечно же, менее удобно. Такая практика наблюдается со времен *Franz Reuleaux* [10], который, вероятно, был первым, кто применил кинематический метод на практике.

К пониманию особенностей образования огибающей при вращательном движении исходной и огибающей поверхностей вокруг ***пересекающих*** осей (т.н., "*intersected-axes gearing*", или просто "$I_a - gearing$") достаточно близок подошел *George B. Grant*. Однако и в его патенте [11] вопросы кинематики зацепления и геометрии боковых сторон профиля зубьев колеса и сопряженной шестерни в "$I_a - gearing$" решения не получили.

С точки зрения кинематики зацепления и геометрии боковых сторон профиля зубьев колеса и сопряженной шестерни нахождение огибающей в общем случае вращения, т.е. когда исходная и огибающая поверхности вращаются вокруг ***перекрещивающихся*** осей, ранее не рассматривался.

В дифференциальной геометрии поверхностей подобные вопросы также не рассматривались.

Выводы: Кратко изложены особенности нахождения огибающей к последовательным положениям движущейся гладкой регулярной поверхности традиционными методами: (a) дифференциально-геометрическим и (b) кинематическим. Показана недопустимость применения этих методов в общем случае, когда исходная и огибающая поверхности согласованно вращаются вокруг перекрещивающихся осей, что имеет место, например, в зубчатых передачах с перекрещивающимися осями вращения зубчатого колеса и шестерни. Аналитически представлено необходимое и достаточное условие, при выполнении которого пара поверхностей представляет собой две взаимоогибаемые поверхности.

Выявлено два вида огибающих поверхностей: “*огибающие первого рода*” “*огибающие второго рода*”. Если некоторая поверхность не удовлетворяет приведенному в статье необходимому и достаточному условию, то образуется “*огибающии второго рода*”.

Изложенные в статье результаты исследований получены автором примерно в ~2008 году. Они многократно использовались в практике проектирования зубчатых передач с перекрещивающимися осями (т.н., “*crossed-axes gearing*”, или просто “$C_a - gearing$”), и оказались полезными при решении сложных вопросов кинематики зубчатых передач и геометрии боковых сторон зубьев колес в зацеплении.

Список литературы

[1] Шишков, В.А., “Элементы кинематики образования и зацепления зубчатых передач”, в сб. Лонитомаш *Теория и расчет зубчатых передач*, кн. 6. – М.: Машгиз, 1948. - С. 123.

[2] Шишков В.А., *Образование поверхностей резанием по методу обкатки*. – М.: Машгиз, 1951. –152с.

[3] Радзевич, С.П., “Кратко о кинематическом методе и об истории уравнения контакта в форме $\mathbf{n} \cdot \mathbf{V} = 0$”, *Теория механизмов и машин*. – 2010. - Том 8, №1 (15). - С.42-51.

[4] Radzevich, S.P., *Geometry of surfaces: A Practical Guide for Mechanical Engineers*, 2nd edition, Springer International Publishing, 2019, 329 pages, 182 illustrations. [First edition: Radzevich, S.P., *Geometry of Surfaces: A Practical Guide for Mechanical Engineers*, Wiley, 2013, 264 pages].

[5] Radzevich, S.P., *Generation of Surfaces*: *Kinematic Geometry of Surface Machining*, *CRC* Press, Boca Raton, Florida, 2014, 738 pages. [First edition: Radzevich, S.P., *Kinematic Geometry of Surface Machining*, *CRC* Press, Boca Raton, FL 2008, 508pages].

[6] Radzevich, S.P., *Theory of Gearing: Kinematics, Geometry, and Synthesis*, 2nd Edition, revised and expanded, *CRC* Press, Boca Raton, FL, 2018, 934 pages. [First edition: Radzevich, S.P., *Theory of Gearing: Kinematics, Geometry, and Synthesis*, *CRC* Press, Boca Raton, Florida, 2012, 743 pages].

[7] Euler, L., *De Optissima Figura Rotarum Dentibus Tribuenda*. Novi Comm. Acad. Sc. Petropol, 1750.

[8] Euler, L., *Supplementum*. *De figura dentium rotarum*. Novi Comm. Acad. Sc. Petropol, 1767. (Originally published in *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* 11, 1767, pp. 207-231).

[9] Willis, R., *Principles of Mechanisms, Designed for the Use of Students in the Universities and for Engineering Students Generally*, London, John W. Parker, West Stand, Cambridge: J. & J.J. Deighton, 1841, 446 pages.
[10] Reuleaux, F., *Kinematics of Machinery*, Kennedy, Alex B.W., Editor, Translator, 1876.
[11] U.S. Pat. No. 407.437. *Machine for Planing Gear Teeth*./G.B. Grant, Filed: January 14, 1887 (serial No. 224,382), Patented: July 23, 1889.

Дата поступления: 15 октября 2020 г.