

УДК 621.01:534.1

ОСОБЕННОСТИ ВОЗБУЖДЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ ПРИ ПЕРЕСЕЧЕНИИ РЕЗОНАНСНЫХ ЗОН

© Иосиф Исаакович Вульфсон

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования "Санкт-Петербургский государственный университет промышленных технологий и дизайна", СПбГУПТД, Санкт-Петербург, Россия

jvulf@yandex.ru

***Аннотация.** Анализируется ряд способов снижения возбуждения вибраций при пересечении резонансных зон цикловых машин с постоянными и переменными положениями центра масс. При параметрических резонансах для сохранения динамической устойчивости предложены способы определения пороговых значений диссипативных характеристик и длительности зоны пересечения. Полученные результаты могут быть использованы для повышения производительности машин, точности воспроизведения программного движения рабочих органов, реализации технологических требований, а также эргономических условий работы человека-оператора.*

***Ключевые слова:** центр масс, резонанс, параметрические колебания, динамическая устойчивость.*

FEATURES OF EXCITATION OF VIBRATIONS AT THE INTERSECTION OF RESONANT ZONES

© I.I. Vulfson

Saint Petersburg State University of Industrial Technologies and Design, Saint-Petersburg, Russia

jvulf@yandex.ru

***Abstract.** A number of ways to reduce vibration excitation at the intersection of resonant zones of cyclical machines with constant and variable positions of the center of mass are analyzed. For parametric resonances, methods for determining the threshold values of dissipative characteristics and the duration of the intersection zone are proposed to preserve dynamic stability. The results obtained can be used to improve the productivity of machines, the accuracy of reproducing the program movement of working bodies, the implementation of technological requirements, as well as the ergonomic working conditions of the human operator.*

***Key words:** center of mass, resonance, parametric oscillations, dynamic stability.*

1. Псевдорезонансы. Термины «псевдорезонанс» или «ложный» резонанс были предложены Я.Г. Пановко применительно к вынужденным колебаниям при быстром пересечении частотных диапазонов в резонансной зоне с целью понизить максимальные значения

амплитуд колебаний [1]. Поясним это на простом примере линейной колебательной системы с одной степенью свободы, описываемой дифференциальным уравнением

$$a\ddot{q} + b\dot{q} + cq = F_0 \cos \omega t \quad (1)$$

Поделив все члены уравнения (1) на a , запишем его в следующем виде:

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2q = W_0 \cos(\omega t - \gamma), \quad (2)$$

где $b/a = 2n$; $c/a = k^2$; $F_0/a = W_0$; $\gamma = \arctg[2n / (k^2 - \omega^2)]$; ($0 \leq \gamma \leq \pi$).

Сначала рассмотрим случай, когда отсутствует сила сопротивления ($b = 0$, $n = 0$). Решение складывается из решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения Y :

$$q = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + Y(t). \quad (3)$$

Зададимся начальными условиями $q(0) = q_0$, $\dot{q}(0) = \dot{q}_0$, Тогда $q_0 = C_1 + Y(0)$; $\dot{q}_0 = C_2 k + \dot{Y}(0)$, следовательно,

$$q = \underbrace{q_0 \cos kt + \frac{\dot{q}_0}{k} \sin kt}_1 - \underbrace{Y(0) \cos kt - \frac{\dot{Y}(0)}{k} \sin kt}_2 + \underbrace{Y(t)}_3. \quad (4)$$

Группа слагаемых 1 описывает свободные колебания, частота которых равна собственной частоте, а амплитуда зависит от начальных условий. Группа слагаемых 2 определяет так называемые сопровождающие колебания, частота которых также равна собственной частоте, но в отличие от свободных колебаний, амплитуда здесь не зависит от начальных условий, а определяется нарушением непрерывности частного решения Y и его производных [2]. Слагаемое 3 соответствует вынужденным колебаниям, зависящим как от параметров вынуждающей силы, так и от параметров колебательной системы.

При рассмотрении системы в окрестности резонанса ($\omega = k$) можно, не теряя общности, исключить из рассмотрения свободные колебания, приняв $q_0 = 0$, $\dot{q}_0 = 0$. В этом случае согласно формуле (4) получаем неопределенность, для раскрытия которой представим $q(t)$ в следующем виде:

$$q = \frac{W_0 t}{k + \omega} \frac{\sin[0,5(k - \omega)t]}{0,5(k - \omega)t} \sin[0,5(k + \omega)t] \quad (5)$$

При $\omega \rightarrow k$ получаем $q \approx [W_0 t / (2k)] \sin(kt)$.

Отсюда следует, что при отсутствии сил сопротивления резонансная амплитуда практически растет по линейному закону, поэтому при быстром пересечении резонансной зоны можно избежать аварийных последствий, т.е. возникает так называемый псевдорезонанс. Этот режим обычно реализуется при разгоне машины и в меньшей степени – при выбеге. При учете линейной силы сопротивления амплитуда и фаза колебаний определяются как

$$A = \frac{W_0}{\sqrt{(k^2 - \omega^2)^2 + 4n^2 \omega^2}}; \quad \gamma = \arctg \frac{2n\omega}{k^2 - \omega^2}. \quad (6)$$

При резонансе $q = [W_0 / (2n\omega)] \sin(\omega t)$; $A_{\max} = W_0 / (2n\omega)$; $\gamma = \pi / 2$.

Заметим, что признаком резонансного состояния системы обычно принято считать периодические колебания с собственными частотами. Между тем, экспериментальные исследования свидетельствуют о существовании случаев, когда подобные колебания возникают в нерезонансных зонах, т.е. при отсутствии $\omega \rightarrow k$. Это подтверждается приведенными на рис.1 осциллограммами колебаний петлеобразующих органов основовязальных машин при существенной разнице собственных частот и частот возбуждения [2,3]. Основной причиной подобного эффекта являются нарушения непрерывности геометрических характеристик, т.е. функции положения и ее производных: $\Pi(\varphi), \Pi'(\varphi), \Pi''(\varphi), \Pi'''(\varphi)$.

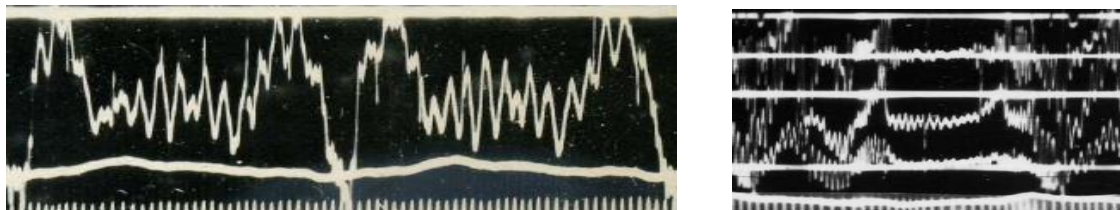


Рис.1. Осциллограммы при нерезонансном периодическом возбуждении.

При анализе амплитудной (АЧХ) и фазочастотной (ФЧХ) характеристик в инженерных расчетах предпочтительна безразмерная форма зависимостей (6). Введем в рассмотрение коэффициент динамичности \varkappa , равный отношению амплитуды вынужденных колебаний A к так называемой статической амплитуде $A_{ст} = F_0 / c$. Статическая амплитуда – это деформация системы под действием амплитудного значения вынуждающей силы, приложенной в статических условиях. Согласно (6)

$$\varkappa = \frac{A}{A_{ст}} = \frac{1}{\sqrt{(1-z^2)^2 + 4z^2\delta^2}}, \quad (7)$$

где $z = \omega/k$ – коэффициент частотной расстройки, равный отношению частоты вынуждающей силы к собственной частоте; $\delta = n/k = \vartheta / (2\pi)$ – коэффициент демпфирования; ϑ – логарифмический декремент.

Функции $\varkappa(z)$, являющейся безразмерной формой АЧХ, отвечает кривая, показанная на рис.2. При $z=0$ ($\omega=0$) имеем $\varkappa=1$. С ростом z функция $\varkappa(z)$ сначала возрастает, достигая максимума в окрестности резонанса ($z \approx 1$). Значению \varkappa_{max} отвечает минимум подкоренного выражения знаменателя формулы (7).

Легко убедиться, что $\varkappa_{max} = \varkappa(z_*) = 1 / (2\delta\sqrt{1-\delta^2})$, где $z_* = \sqrt{1-\delta^2}$. При $z=1$ (резонанс) $\varkappa_{\delta \rightarrow 0} = 1 / (2\delta)$. Принимая во внимание, что обычно $\delta < (0,1 \div 0,2)$, можно утверждать, что $\varkappa_{max} \approx \varkappa_{рез}$. Однако при больших значениях δ ($\delta^2 > 0,5$), что возможно при установке специальных демпфирующих устройств или при учете характеристик двигателей, функция $\varkappa(z)$ не имеет экстремума и является убывающей.

В резонансной зоне ($z > 1$) функция $\alpha(z)$ асимптотически стремится к нулю. Без учета силы сопротивления ($\delta = 0$)

$$\alpha(z) = 1/|1 - z^2|. \quad (8)$$

Анализ зависимостей (7) и (8) показывает, что при малых δ диссипативные факторы играют определяющую роль лишь непосредственно в резонансной зоне. При $z < 0,7$ и $z > 1,4$ результаты практически совпадают, поэтому в нерезонансных зонах нередко пользуются более простой зависимостью. В частности, при $z > \sqrt{2}$ имеем $\alpha(z) < 1$. Это означает, что амплитуда вынужденных колебаний оказывается меньше, чем статическая амплитуда, реализуемая в окрестности $\omega = 0$. Это обстоятельство часто используется с целью виброизоляции колебательных систем.

α

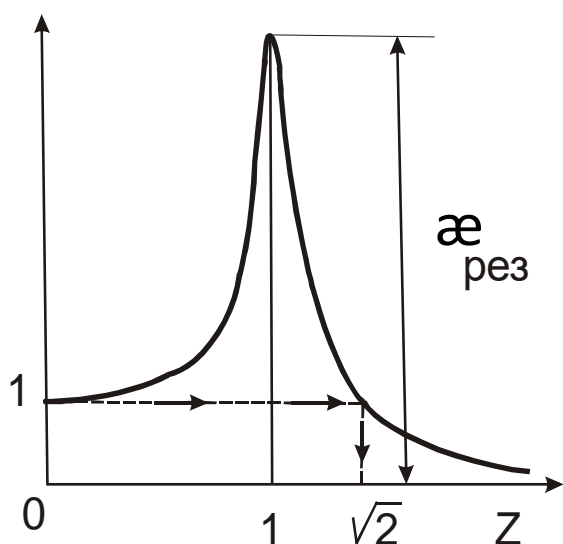


Рис.2. График АЧХ

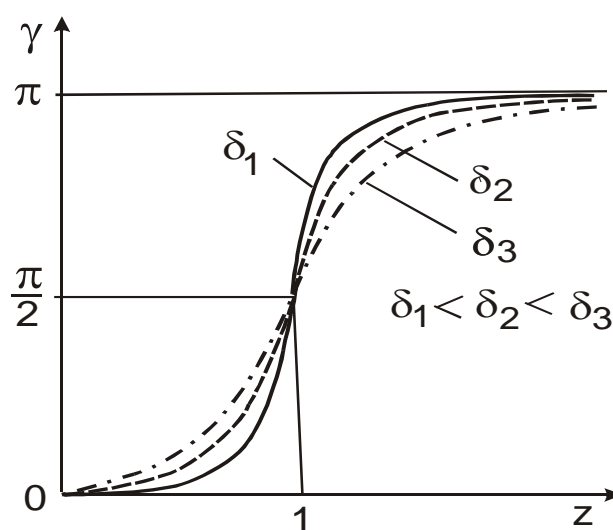


Рис.3. График ФЧХ

При кинематическом возмущении какая-либо точка или сечение системы получает принудительное движение по заданному закону. Так, например, для модели поддрессоренного экипажа (рис.4,а) источником возмущений является профиль дороги, а для толкателя кулачкового механизма (рис.4,б) – закон движения, определяемый профилем кулачка. В обоих примерах входное сечение колебательной системы перемещается по закону $x(t)$; при этом перемещение ведомой массы m складывается из переносного движения $x(t)$ и относительного движения – $q(t)$, вызванного возбуждаемыми колебаниями. Соответствующее дифференциальное уравнение при отсутствии других возмущений имеет вид

$$m\ddot{q} + b\dot{q} + cq = -m\ddot{x}(t). \quad (9)$$

С помощью нормальных (главных) координат приведенная в этом и следующем параграфах методика может быть легко распространена на систему с конечным числом степеней свободы [2, 3].

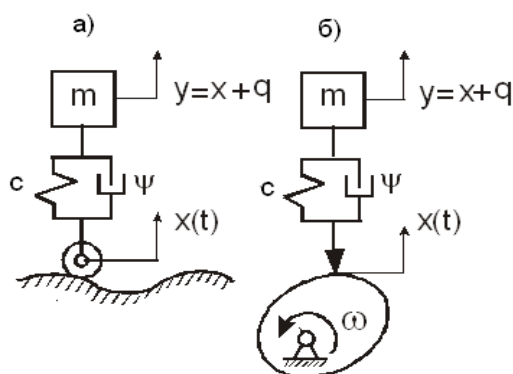


Рис. 4. Типовые динамические модели.

Наиболее естественным способом определения решения дифференциального уравнения (2), на первый взгляд, является его интегрирование с помощью численных методов до выхода на установившийся режим. Однако такой способ приводит к значительной накопленной погрешности и повышенной трудоемкости расчета. Поэтому воспользуемся более точным и экономичным методом построения замкнутой формы решения. Исследуем поведение системы, описываемой дифференциальным уравнением (9), на произвольном периоде колебаний $0 < t < \tau$. При этом решение описывается зависимостью, в которую входят начальные условия $q(0) = q_0$ и $\dot{q}(0) = \dot{q}_0$. Однако в данном случае начальные условия нам не известны, так как рассматриваемому периоду при установившемся колебательном режиме предшествует неограниченное число циклов. Для определения q_0 и \dot{q}_0 воспользуемся условиями периодичности вынужденных колебаний:

$$\left. \begin{aligned} q(q_0, \dot{q}_0, t=0) &= q(q_0, \dot{q}_0, \tau); \\ \dot{q}(q_0, \dot{q}_0, t=0) &= \dot{q}(q_0, \dot{q}_0, \tau). \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Теперь мы располагаем системой двух уравнений с двумя неизвестными q_0 , \dot{q}_0 , и можем воспользоваться зависимостью, справедливой при установившемся режиме на произвольном периоде колебаний. Повторив процедуру интегрирования с этими начальными условиями, находим окончательное решение $q(t)$, определяющее динамическую ошибку. Тем самым найдены начальные условия, соответствующие установившемуся колебательному режиму:

$$q_0 = C_1; \quad \dot{q}_0 = C_2 k - C_1 n = k(C_2 - C_1 \delta) \approx k C_2 \quad (\delta = n/k \ll 1), \quad (11)$$

где C_1 ; C_2 – произвольные постоянные.

Повторив процедуру интегрирования с этими начальными условиями, находим окончательное решение $q(t)$, определяющее динамическую ошибку. Амплитуда сопровождающих колебаний в начале цикла равна

$$D_0 = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \mu \sqrt{[Y^0(\tau) - \Delta x_0]^2 + k^{-2} [Y^0(\tau) - \Delta \dot{x}_0]^2}, \quad (12)$$

где μ – коэффициент накопления возмущений, определяемый как

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1 - 2e^{-\vartheta N} \cos 2\pi N + e^{-2\vartheta N}}}. \quad (13)$$

Семейство кривых $\mu(N, \vartheta)$, где $N = k / \omega_0$, ϑ – логарифмический декремент приведено на рис.5. Коэффициент μ может быть как больше единицы (усиление колебаний), так и меньше (ослабление колебаний).

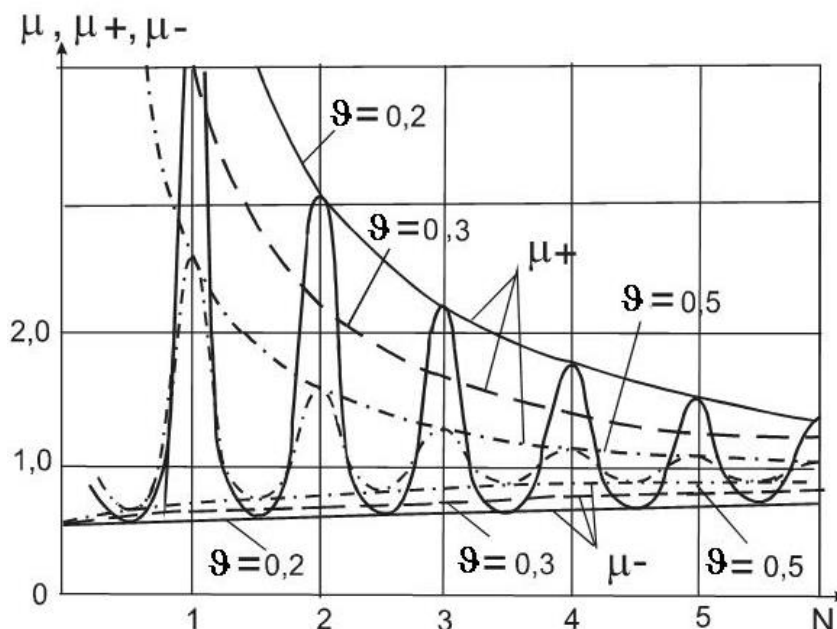


Рис. 5. Графики коэффициентов накопления возмущений

Максимальное значение μ^+ лежит в окрестности целых N , а минимальное значение μ^- , – когда $2N$ – нечетное число. Из формулы (13) следует

$$\mu^+ = [1 - \exp(-\vartheta N)]^{-1}; \quad \mu^- = [1 + \exp(-\vartheta N)]^{-1}. \quad (14)$$

Значению μ^+ отвечает совпадение фазы ранее возбужденных колебаний и колебаний в рассматриваемом цикле. При $\mu = \mu^-$ эти колебания находятся в противофазе. Подчеркнем важную особенность этого способа, связанную с возможностью рационального сочетания численных и аналитических методов: численным интегрированием здесь определено лишь частное решение на ограниченном отрезке времени; условия же, отвечающие выходу на установившийся режим, выявлены аналитически. Последнее существенно сказывается на точности решения. Разумеется, при относительно простых функциях возбуждения получение замкнутой формы решения можно осуществить и без обращения к численным методам, непосредственно используя аналитическую форму частного решения. Применение численно-аналитического способа особенно целесообразно в тех случаях, когда в геометрических передаточных функциях или внешних силах имеются разрывы непрерывности, что обычно характерно для кулачковых механизмов. При более сложной форме описания вынуждающей силы целесообразно воспользоваться **численно-аналитическим способом**, который состоит из следующих этапов:

- численное интегрирование дифференциального уравнения при нулевых начальных условиях. Определяем $\Delta Y = Y(\tau)$ и $\Delta \dot{Y} = \dot{Y}(\tau)$;
- определение по формуле (11) констант C_1, C_2 и начальных условий, отвечающих установившемуся режиму;
- повторное численное интегрирование с полученными начальными условиями.

При этом способе численным интегрированием найдены лишь отдельные промежуточные функции, вычисленные на ограниченном отрезке времени, равном одному периоду τ , в то время как установившийся режим ($t \rightarrow \infty$) определен аналитически с помощью условий периодичности. Как уже отмечалось, это существенно сказывается на повышении точности решения, а также на уменьшении трудоемкости расчета.

2. Вынужденные колебания с квазипостоянной амплитудно-частотной характеристикой. Особенности колебательных систем данного класса проиллюстрируем на примере динамической модели, приведенной на рис.6 для цикловых механизмов (звенья 1,2,3) установленных на подвижной платформе 0 с упругим подвесом [2,3,5]. Между выходным звеном 3 и корпусом установлена пружина, осуществляющая силовое замыкание кинематической цепи. В дальнейшем при динамическом анализе мы будем рассматривать лишь один механизм с приведенными инерционными и упругодиссипативными характеристиками, поскольку дублирование механизмов связано только с уравниванием горизонтальных составляющих динамических реакций и не играет принципиальной роли с позиций рассматриваемой задачи.

Примем следующие условные обозначения: m_i – массы; c_i – коэффициенты жёсткости; ψ_i – коэффициенты рассеяния; φ, ω – угол поворота и угловая скорость звена 1; y_1, y_2 – координаты звеньев 0 и 3.

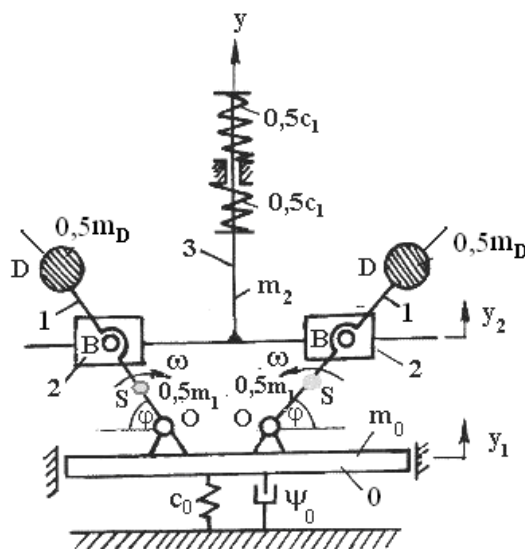


Рис.6. Схема механизма с аномальной характеристикой.

На кривошипе 1 в общем случае может быть дополнительно установлен груз массой m_D . Пусть при отсутствии этой массы кривошип уравновешен, т.е. его центр масс S совпадает с

точкой O . Тогда, при установке дополнительного груза центр масс этого звена переместится в точку D .

В качестве обобщённой координаты примем $q = y_1$, причём за нуль отсчёта примем положение равновесия системы при $\varphi = 0$. При этом кинетическая и потенциальная энергия описываются следующим образом:

$$\begin{aligned} T &= 0,5[(m_0 + m_1)\dot{q}^2 + m_D(\dot{q} + R\omega\cos\omega t)^2 + m_2(\dot{q} + r\omega\cos\omega t)^2]; \\ V &= 0,5[c_0q^2 + c_1(q + r\sin\omega t)^2]. \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь m_2 – сумма масс звеньев 2 и 3; $R = OD$; $r = OB$.

После подстановки (1) в уравнение Лагранжа второго рода при учёте эквивалентной силы линейного сопротивления получаем

$$m_2\ddot{q} + \beta\dot{q} + (c_0 + c_1)q = -[c_1r - \omega^2(m_D R + m_2r)]\sin\omega t, \quad (16)$$

где $m_2 = m_0 + m_1 + m_2 + m_D$; $\beta = (c_0 + c_1)\psi_* / (2\pi\omega)$ – приведенный коэффициент линейного сопротивления; ψ_* – приведенный коэффициент рассеяния.

Если принять $c_1r = \omega_*^2(m_D R + m_2r)$, то имеет место динамическая разгрузка, при которой на определённой частоте $\omega = \omega_*$ кинематическое возбуждение полностью компенсируется восстанавливающей силой в упругом элементе с коэффициентом жесткости c_1 . Однако в данном случае перед нами стоит другая задача – осуществить колебания платформы с амплитудой, не зависящей (или слабо зависящей) от изменения ω . Согласно (16) амплитуда вынужденных колебаний определяется как

$$A = \frac{|c_1r - \omega^2(m_D R + m_2r)|}{(c_0 + c_1)\sqrt{(1 - z^2)^2 + 4\delta^2 z^4}}, \quad (17)$$

где $z = \omega / p$; $p = \sqrt{[(c_0 + c_1) / m_2](1 - \delta^2)} \approx \sqrt{(c_0 + c_1) / m_2}$ – собственная частота; $\delta = \psi_* / (4\pi)$ – диссипативный коэффициент.

Для более ясного физического представления об исследуемой задаче сначала рассмотрим частный случай, при котором отсутствуют неуравновешенный груз ($m_D = 0$) и диссипативные силы ($\delta = 0$). Тогда формула (17) принимает вид

$$A = r \frac{|1 - \omega^2 / k^2|}{(1 + \zeta)|1 - \omega^2 / p^2|}, \quad (18)$$

где $k = \sqrt{c_1 / m_2}$; $\zeta = c_1 / c_0$.

Требование $\frac{dA}{d\omega} = 0$ приводит к очевидному условию $k = p$; при этом $c_1 / c_0 = m_2 / (m_1 + m_0)$ и $A = r / (1 + \zeta) = \text{const}$.

Полученный результат свидетельствует о нетривиальной ситуации, когда «амплитудно-частотная характеристика» не зависит от частоты возмущения. Легко убедиться в том, что собственная частота системы p при этом равна собственным частотам двух подсистем, полученных при разрыве кинематической связи в шарнирах B (см. рис.6). Это означает, что при «жёстком» соединении обеих подсистем собственная частота остаётся неизменной.

Далее вернёмся к рассмотрению общего случая, соответствующего исходной модели. Тогда

$$A = \frac{|c_1 r - \omega^2 (m_2 r + m_D R)|}{(c_0 + c_1) \sqrt{(1 - z^2)^2 + 4\delta^2 z^4}} = \frac{rk^2 |1 - \omega^2 (1 + \rho \mu_D) / k^2|}{p^2 (1 + \zeta) \sqrt{(1 - z^2)^2 + 4\delta^2 z^4}}, \quad (19)$$

где $\rho = R / r$, $\mu_D = m_D / m_2$.

При выполнении условия $k^2 / (1 + \rho \mu_D) = p^2$ на основании (19) получаем

$$A = \frac{r |1 - z^2|}{(1 + \zeta) \sqrt{(1 - z^2)^2 + 4\delta^2 z^4}}. \quad (20)$$

Принимая во внимание, что $p^2 = k^2 (1 + \zeta) / \mu_\Sigma$, где $\mu_\Sigma = 1 + \mu_0 + \mu_1 + \mu_D$, $\mu_i = m_i / m_2$, имеем дополнительное уравнение связи между безразмерными параметрами:

$$\zeta = \mu_\Sigma / (1 + \rho \mu_D) - 1 > 0 \quad (21)$$

Отметим, что при заданном дополнительном условии безразмерная собственная частота $\tilde{p} = p / k$ зависит только от произведения $\rho \mu_D$. В безразмерной форме окончательная зависимость, описывающая амплитудно-частотную характеристику, имеет вид $a = a_* \kappa(z, \delta)$, где безразмерные амплитуды вынужденных колебаний платформы и статической амплитуды равны

$$a = A / r, \quad a_* = (1 + \zeta)^{-1} = (1 + \rho \mu_D) / \mu_\Sigma.$$

Введем в рассмотрение коэффициент динамичности $\kappa(z, \delta)$, определяемый как

$$\kappa = 1 / \sqrt{1 + 4\delta^2 z^4 / (1 - z^2)^2}. \quad (22)$$

Далее определим колебания выходного звена 3

$$y_2 / r = \sin \omega t - a \sin(\omega t - \gamma), \quad (23)$$

где $\gamma = \arctg[2\delta z / (1 - z^2)]$.

Используя (11), можно показать, что

$$b = \max(y_2 / r) = \sqrt{(1 - a \cos \gamma)^2 + a^2 \sin^2 \gamma}, \quad (24)$$

где b – амплитуда звена 3.

На рис.7 приведено полученное на основании (21)–(24) семейство квазипостоянных амплитудно-частотных характеристик $a(z)$ для платформы 1 и $b(z)$ – для ведомого звена 3.

При построении графиков приняты следующие исходные данные:

$\mu_0 = 2; \mu_D = 0,5; \delta = 0,03$. Двойная индексация кривых соответствует $a - \rho, b - \rho$ (цифры отвечают численному значению параметра $\rho = R / r$).

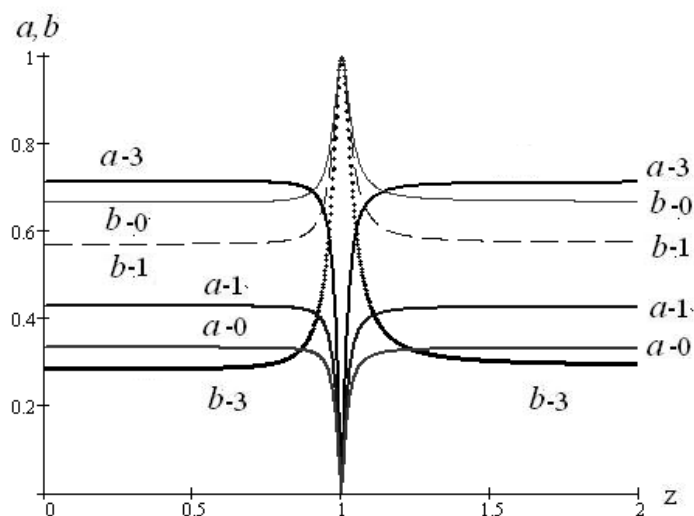


Рис.7. Семейство АЧХ

Анализ графиков выявляет следующие особенности АЧХ:

- За исключением узкого частотного диапазона в окрестности резонансной зоны ($z = 1$) амплитуды вынужденных колебаний платформы и ведомого звена практически сохраняют постоянное значение.
- При резонансе ($z = 1$) амплитуда платформы обращается в нуль (антирезонанс), а для ведомого звена принимает значение $b = 1$ ($A_2 = \max(y_2) = r$), что соответствует резонансу.

При $\rho = 0, \rho = 1$ имеем $a < b$, а при $\rho = 3$ амплитуда платформы превышает амплитуду звена 3. Представляет интерес граничный случай $a = b$. При отсутствии диссипации в (13), принимая $b = a, (\gamma = 0, \pi)$, получаем $a = b = 0,5$. Поскольку $a = a_*$, граничное значение $\rho = \rho_*$ определяется как $\rho^* = 0,5(\mu_0 + \mu_D - 1) / \mu_D$, то $a < b$, а при $\rho > \rho^* - a > b$.

Для более подробного изучения поведения системы непосредственно в резонансной зоне на рис. 8 выделён соответствующий частотный диапазон. Помимо режимов, отображённых на рис.7, приведены АЧХ для режима $\rho^* = 1,5$. Анализ графиков показывает, что при $\rho < \rho^*$ фаза колебаний платформы и выходного звена при входе в резонансную зону сохраняется неизменной (кривые $a - 0, b - 0$), и наоборот, при $\rho > \rho^*$ меняются на противоположную (кривые $a - 3, b - 3$). При $\rho = \rho^*$ и некотором удалении от резонансной зоны, как и следовало ожидать, $a \approx b \approx a_*$. Этот режим проиллюстрирован на рис.8,б (a – кривая 1; b – кривая 2). Заметим, что аналогичная ситуация возникает при динамическом гашении, когда на определённой частоте реакция со стороны гасителя на объект виброзащиты «уравновешивает» внешнее возмущение.

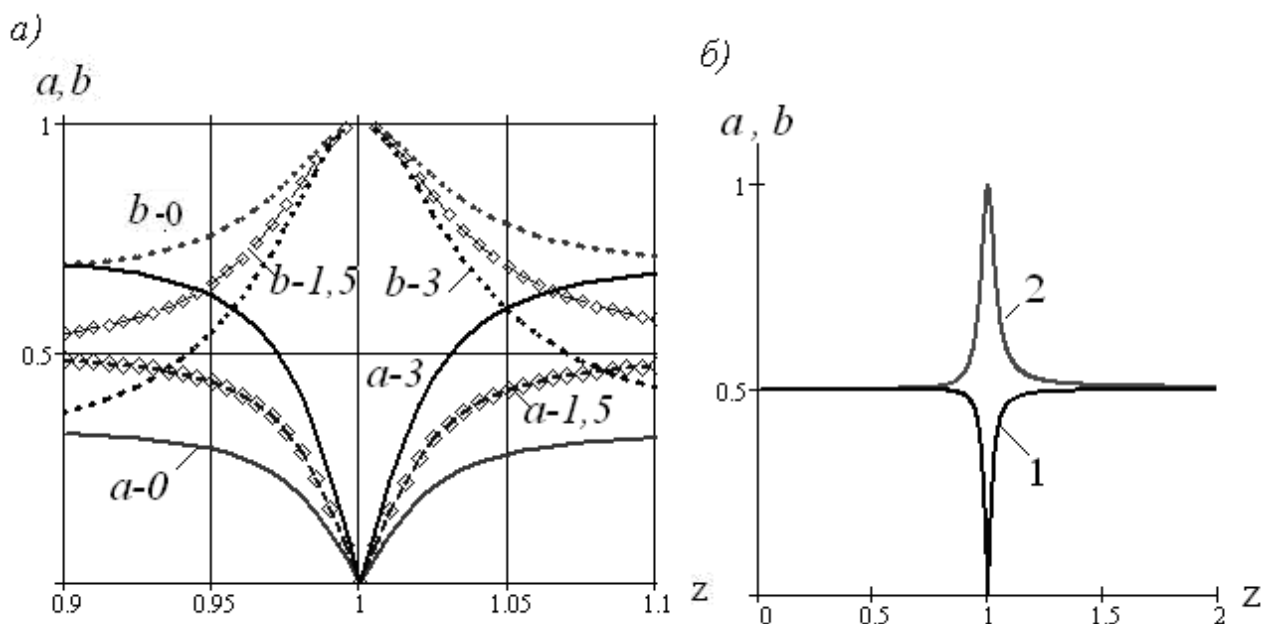


Рис.8. АЧХ в резонансной зоне

На рис.9 приведены графики $y_1(t)$, $y_2(t)$, полученные компьютерным моделированием при $\rho = \rho^* = 1,5$ (остальные данные см. выше). В нерезонансной зоне ($z = 0,7$; рис.9, а) амплитуды колебаний соответствуют полученным выше значениям (см. рис. 5, б), а фазы колебаний γ звеньев 0 и 3 смещены на π . В резонансной зоне ($z = 0,997$) амплитуда платформы стремиться к нулю, а амплитуда ведомого звена – к единице (рис. 8, 9).

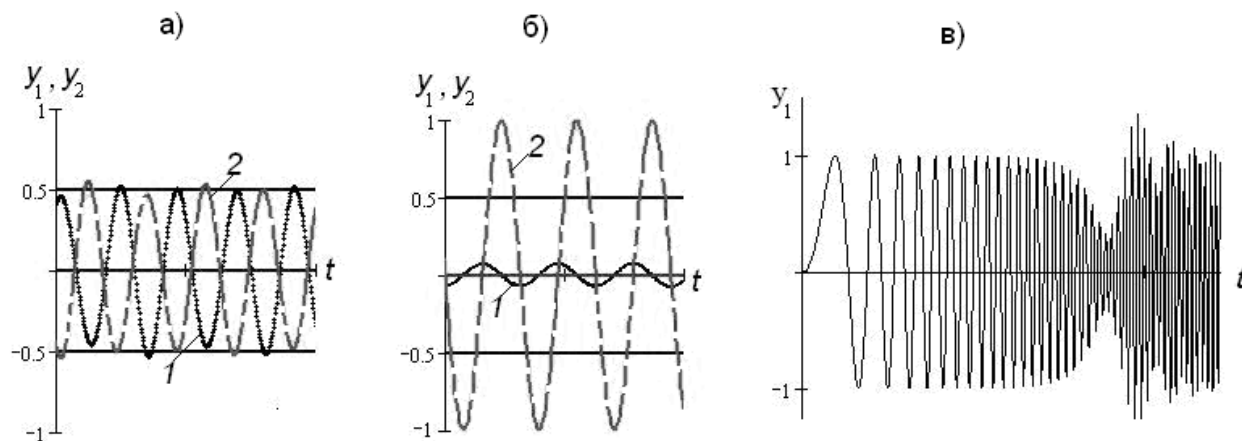


Рис.9. Колебания в нерезонансной и резонансной зоне: 1 – $y_1(t)$; 2 – $y_2(t)$.

Следует отметить, что при пересечении резонансной зоны система иногда не успевает полностью выйти на установившийся режим (см. рис.6,в), однако резкое уменьшение амплитуды колебаний платформы в резонансной зоне проявляется достаточно чётко.

3. Динамические характеристики при переменных значениях параметров. Ниже воспользуемся известным способом перехода к «безразмерному времени» $\varphi = \omega t$, где ω –

угловая скорость. При этом реализуется трансформация перехода к «безразмерным частотам» $\bar{k}_i = k_i / \omega \neq \text{const}$. При достаточной удаленности от параметрических возбуждений функция $q(\varphi)$ отображена на рис.10.

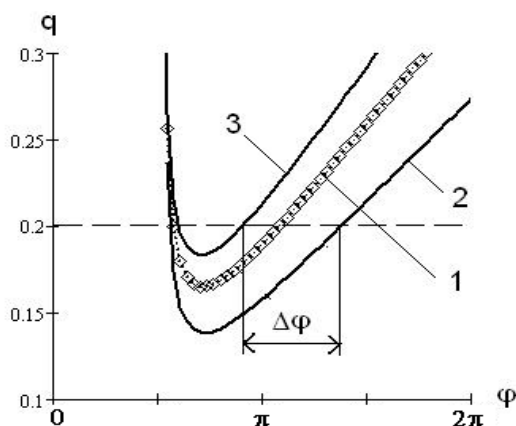


Рис.10.Графики $q(\varphi)$: 1.Среднее значение $\bar{k}_i = k_i / \omega$; 2. $\max \bar{k}_i$, 3. $\min \bar{k}_i$

Этот случай характерен для разгона и торможения двигателя, а также в процессе рабочего режима при изменении положения центра масс системы. Анализ графика наглядно показывает, что при «мгновенном» пересечении резонансной зоны $\Delta\varphi$ имеем $q \approx \text{const}$.

При увеличении q происходит рост отрезка времени пребывания в резонансной зоне. Таким образом, здесь мы опять столкнулись с типичным «ложным» резонансом, устранение которого возможно при быстром пересечении этой зоны.

Приведенные выше результаты справедливы при постоянном положении центра масс машинного агрегата. Однако в колебательных системах многих машинных агрегатов происходят перемещения центра масс, вызванные программными движениями рабочих органов и изготовляемых изделий, а также механизмами привода, подъемно-транспортными функциями и другими факторами. Это является источником возникновения реономных связей, что приводит к нестационарности частотных характеристик привода машины, к появлению динамических эффектов, связанных с возбуждением параметрических колебаний и к возможности нарушений условий динамической устойчивости [2, 5-11]. Использование изложенного выше способа ложного резонанса в данном случае, на первый взгляд, вызывает некоторые сомнения, так как амплитуда при параметрическом резонансе в отличие от резонанса при вынужденных колебаниях возрастает очень интенсивно – по экспоненте. Выход из этого положения принципиально возможен, если исключить возможность пересечения частотного диапазона главного параметрического резонанса. Однако, как показывает анализ, при учете характеристик электродвигателя и ряда других факторов снижение виброактивности системы обычно эффективно реализуется за пределами низшей частоты, что требует пересечения этой резонансной зоны. Другой способ связан с повышением уровня диссипации системы. Можно показать, что для исключения возбуждения главного параметрического резонанса должно соблюдаться условие $\varepsilon < \varepsilon_* = \psi / \pi$, где ε, ψ глубина пульсации и коэффициент рассеяния [3,5,7]. При этом

$k^2(t) = k_0^2(1 - \varepsilon \sin \Omega_1 t)$; $\Omega_1 = 2k_0$. Здесь k_0^2 – среднее значение; Ω_1 – частота главного

параметрического резонанса. В качестве базового объекта динамической модели примем жесткий элемент, установленный на двух упругих опорах (рис.11).

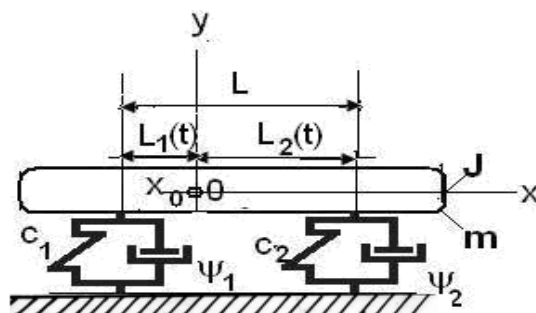


Рис. 11. Динамическая модель

Недостатками принятого варианта являются большие энергетические потери из-за преодоления диссипативных сил при подавлении параметрического резонанса. Для большей определенности при дальнейшем качественном динамическом анализе конкретизируем функции L_1, L_2 согласно следующим зависимостям:

$$L_1(\varphi) = h(0,5 + \lambda + \sigma \cos \varphi); L_2(\varphi) = h(0,5 - \lambda - \sigma \cos \varphi); (\lambda + \sigma < 0,5). \quad (25)$$

Параметры λ и σ соответствуют постоянной и переменной составляющим отклонения координаты центра масс от среднего положения. При $\sigma = 0$

$$L_1 = h(0,5 + \lambda) = a; L_2 = h(0,5 - \lambda) = b. \quad (26)$$

Тогда задача совпадает с распространенным случаем фиксированного неподвижного положения центра масс. При $\sigma \neq 0$ в данной задаче $h(\lambda + \sigma) = 0,5[L_1(0) - L_2(0)]$. Отсюда следует $\sigma = 0,5[L_1(0) - L_2(0)] / h - \lambda$. Отметим, что параметр L не зависит от φ : $L = L_1(\varphi) + L_2(\varphi) = h$.

В машинах с цикловыми механизмами нередко доминирует медленное изменение параметров. В практике это нередко приводит к ложному выводу, что влиянием нестационарных связей можно пренебречь. Однако в современных технологических машинах нередки случаи, при которых возникает необходимость в осуществлении многочастотного движения рабочего органа, когда приведенные инерционные и упругие характеристики содержат не только низкочастотные, но и высокочастотные составляющие [10, 11]. Аналогичная ситуация также возникает при использовании вибрационной линеаризации с целью уменьшения эффективных значений сил кулонова трения. Отмеченные факторы создают реономную связь и источник параметрического возбуждения. Практические приёмы определения областей динамической неустойчивости обычно базируются либо на различных модификациях метода малого параметра и других асимптотических методах, либо на численных методах. Процедура решения подобных задач далеко не элементарна, особенно если иметь в виду не эталонные упрощённые модели с одной степенью свободы, а реальные колебательные системы современных машин и механизмов, в которых параметрическое возбуждение имеет многокомпонентную структуру. Ниже задача решается на базе метода условного осциллятора, что позволяет избежать ряда трудностей, возникающих в данном случае при

использовании традиционных методов решения [6]. Выше были учтены лишь медленные составляющие движения центра масс. Однако, как показано в работах [3,11], при исследовании параметрического возбуждения нельзя пренебрегать влиянием высших частот. Поэтому наряду с формулами (4) ниже будут использованы аналогичные зависимости следующего вида:

$$L_1^* = L_1 + r \cos j\varphi; \quad L_2^* = L_2 + r \cos j\varphi, \quad (27)$$

где число j соответствует номеру учитываемой высокочастотной гармоники (рис.12). Здесь и ниже звездочка при параметрах обозначает использование функций $L_i^*(\varphi)$, что отвечает учету влияния высокочастотных гармоник.

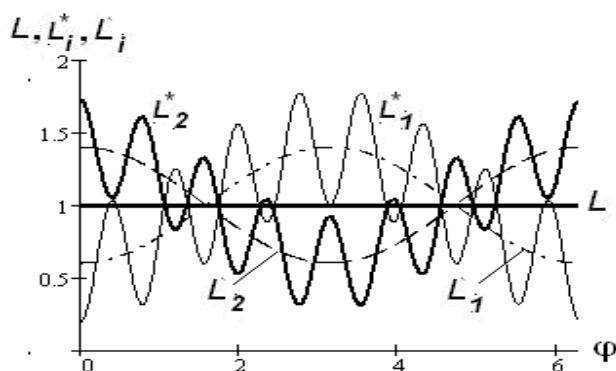


Рис. 12. Графики L, L_i^*, L_i ($i = 1; 2$)

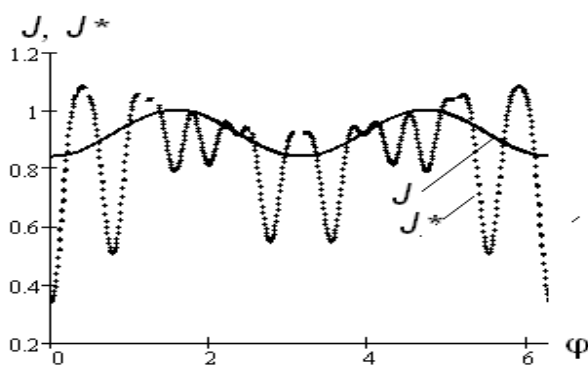


Рис. 13. Графики J, J^*

На рис.13 приведены графики моментов инерции J и J^* для частного случая, когда каждый из радиусов инерции $\rho = \sqrt{J/m}$, $\rho^* = \sqrt{J^*/m}$ соответственно равен среднему геометрическому между величинами L_1, L_2 и L_1^*, L_2^* .

Для определенности при численной оценке влияния переменности параметров примем $L=1$, $r=0,4L$, $j=8$, $c_1=100$ Н/м, $\tilde{n}_2=30$ Нм. В качестве обобщенных координат примем вертикальное перемещение центра масс $y = q_1$ и угол поворота качающегося объекта q_2 с моментом инерции J или J^* . Исследуемая динамическая модель описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} m q_1'' + 2\delta_1^* m k_1^* q_1' + (c_1 + c_2) q_1 + (c_1 L_1^* - c_2 L_2^*) q_2 &= Q_1; \\ J^* q_2'' + 2\delta_2^* J^* k_2^* q_2' + (c_1 L_1^* - c_2 L_2^*) q_1 + (c_1 L_1^{*2} + c_2 L_2^{*2}) q_2 &= Q_2. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Здесь Q_1, Q_2 – обобщенные силы; $k_1^*(\varphi), k_2^*(\varphi)$ значения собственных частот (рис.14); $(\cdot)' = d/d\varphi$; $\delta_i^* = \vartheta_i^*/(2\pi)$ (рис.15) – коэффициент демпфирования; ϑ_i^* – логарифмический декремент.

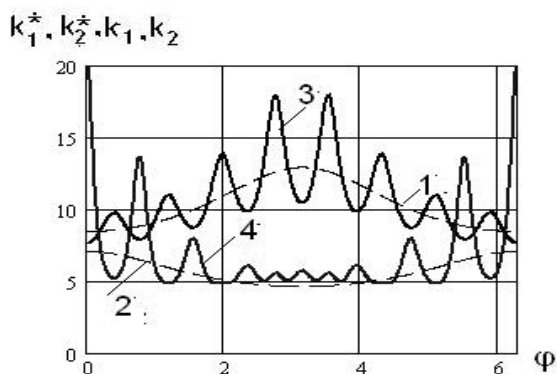


Рис. 14. Собственные частоты:
 – k_1^* ; 4. – k_2^*

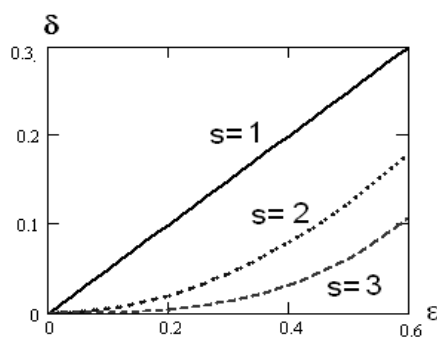


Рис.15. Коэффициент диссипации: 1.– k_1 ; 2.– k_2 ; 3.
 s – номер параметрического резонанса

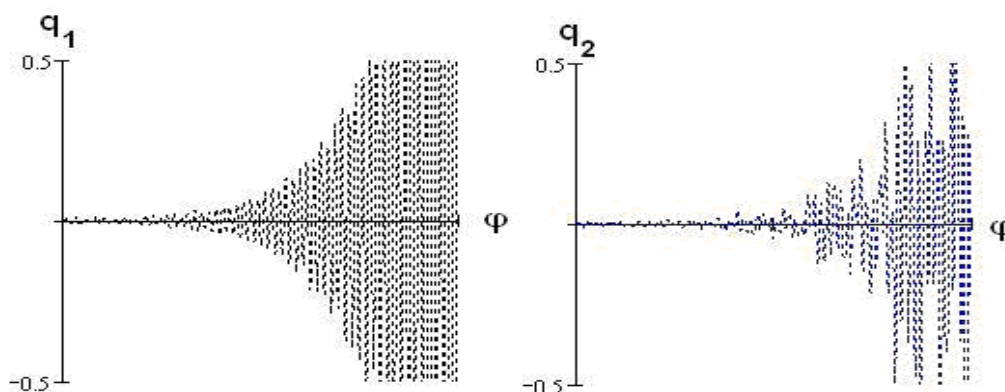


Рис. 16. Параметрический резонанс при высокочастотном возбуждении

При анализе параметрического возбуждения и использовании «ложного резонанса» может возникнуть сомнение в эффективности этого способа из-за интенсивного роста амплитуд, требующего почти мгновенного перехода через резонансную зону. Однако, графики на рис.16, построенные согласно решению системы уравнений (28), свидетельствуют об относительно длительной задержке, предшествующей проявлению динамической неустойчивости. В более наглядном виде этот эффект отображен на рис.17 на графиках огибающих резонансных амплитуд и на фазовой плоскости, а также на графике Ω/k_2 (рис.18).

Как показал анализ, причиной данного эффекта является значительное уменьшение моментов инерции в этой зоне (см. рис.13), что привело к росту «собственных» частот, и к пересечению областей неустойчивости. На рис. 18 приведены три области параметрического резонанса и график, соответствующий главному параметрическому резонансу с частотой Ω . На графике также показано критическое значение глубины пульсации $\varepsilon < \varepsilon_*$, зависящее от уровня диссипации, при котором система сохраняет динамическую устойчивость.

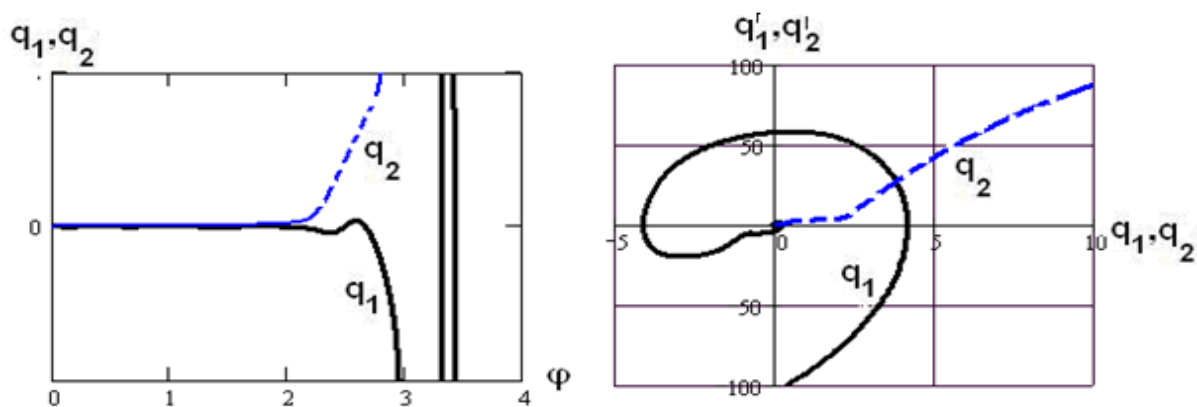


Рис.17. К анализу эффекта задержки режима динамической неустойчивости.

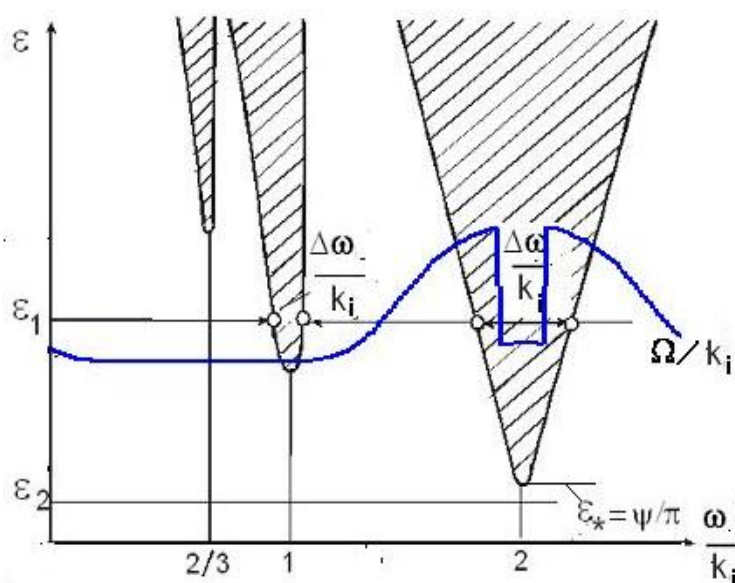


Рис.18. Зоны динамической неустойчивости

Для принятой модели критическое значение коэффициента демпфирования равно

$$\delta > \delta_* = 3\mu\Pi'_*\Pi''_*\omega_0[2k_1\sqrt{1+\mu\Pi'^2_*}]^{-1}$$

Выводы. В статье решается задача оптимального пересечения резонансных зон и анализа зависимости виброактивности от перемещений центра масс машинного агрегата. Важным результатом проведенного исследования является устранение нарушений условий динамической устойчивости в частотном диапазоне параметрических резонансов.

Список литературы

1. Пановко Я. Г. Механика деформируемого твердого тела. - М.: Наука, 1985. - 288 с.
2. Вульфсон И.И. Динамика машин. Колебания. - М.: Юрайт, 2017. - 274 с.
3. Вульфсон И.И. Динамика цикловых машин. – СПб.: Политехника, 2013. - 425 с.

4. Вульфсон И.И., Тетерина В.В. Экспериментальное исследование усилий, возникающих в приводных тягах петлеобразующих органов основовязальной машины ОВ-7.- М.: ЦНИИТЭИ «Машиностроение для легкой промышленности». Вып.5, 1968. - С.28-34.
5. Вульфсон. И.И. , Коловский М.З. Нелинейные задачи динамики машин. – Л.: Машиностроение, 1968. - 284 с.
6. Вульфсон И.И. Параметрический синтез колебательных систем механизмов с аномальными характеристиками // СПб. Теория механизмов и машин (под ред. А.Н. Евграфова). - 2003. - №2. - С. 40 – 49.
7. Вульфсон И.И. О колебаниях систем с параметрами, зависящими от времени// Прикладная математика и механика. - 1969. - Т.33, №2. - С. 331–337.
8. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. - М.: Гостехтеоретиздат, 1956. – 600 с.
9. Вульфсон И.И. К проблеме снижения виброактивности приводов машин при учете динамических характеристик электродвигателя // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2017. - №4. - С. 12–19.
10. Ганиев Р.Ф., Кононенко В.О. Колебания твердых тел. - М.: Наука, 1976. – 431 с.
11. Вульфсон И.И. Условия динамической устойчивости при совместном учёте медленных и быстрых изменений параметров// Вестник научно-технического развития. - 2015. - Т.91, №3. - С.3-13.

Дата поступления: 11 июня 2020 г.