Bulletin of Science and Technical Development

www.vntr.ru № 4 (152), 2020

DOI: 10.18411/vntr2020-152-3

УДК 534.11

ЗАДАЧА О ПРОДОЛЬНОМ УДАРЕ ГРУЗА ПО СТЕРЖНЮ С ДВИЖУЩЕЙСЯ ГРАНИЦЕЙ

© Владислав Львович Литвинов
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия
Самарский государственный технический университет, Самара, Россия
vladlitvinov@rambler.ru

Аннотация. *С помощью аналитического метода замены переменных в системе функционально–разностных уравнений находится решение задачи о продольных колебаниях стержня переменной длины в случае, когда свободный движущийся конец стержня подвергается удару груза, перемещающегося вдоль оси стержня. Для решения задачи используется представление Даламбера. Как и в случае с неподвижными границами решение представляет собой суперпозицию прямой и обратной волн и имеет различные выражения на разных временных интервалах.*
Ключевые слова: *стержень переменной длины, удар груза по стержню, волновое уравнение, колебания систем с движущимися границами, законы движения границ.*

THE PROBLEM OF LONGITUDINAL IMPACT OF A LOAD ON A ROD WITH MOVING BOUNDARIES

© Vladislav L. Litvinov
Moscow State University, Moscow, Russia
Samara State Technical University, Samara, Russia
vladlitvinov@rambler.ru

Abstract. *Using the analytical method of replacing variables in a system of functional-difference equations, an exact solution to the problem of longitudinal vibrations of a rod of variable length is found in the case when the free moving end of the rod is hit by a load moving along the axis of the rod. To solve the problem, the d'Alembert representation is used. As in the case with fixed boundaries, the solution is a superposition of the forward and backward waves and has different expressions at different time intervals.*
Keywords: *rod of variable length, load hit on the rod, wave equation, oscillations of systems with moving boundaries, laws of movement of boundaries.*

1. Введение. Одномерные системы, границы которых движутся, широко распространены в технике (канаты грузоподъемных установок [1, 4, 8, 11– 15, 21], гибкие звенья передач [1, 2, 5, 16, 19, 20], стержни твердого топлива [22], бурильные колонны [8] и т.д.). Наличие движущихся границ вызывает значительные затруднения при описании таких систем, поэтому здесь в основном используются приближенные методы решения [1–4, 8, 10, 16, 17, 20–22, 25]. Из аналитических методов наиболее эффективным является метод, предложенный в [5], который заключается в подборе новых переменных, останавливающих границы и оставляющих волновое уравнение инвариантным. В [6] решение ищется в виде суперпозиции двух волн, бегущих навстречу друг другу. Эффективен также метод, используемый в [7], заключающийся в замене геометрической переменной на чисто мнимую переменную, что позволяет свести волновое уравнение к уравнению Лапласа и применить для решения методику теории функций комплексного переменного.

Решения, полученные с помощью перечисленных методов, ограничены граничными условиями первого рода. К недостаткам методов относится также то, что в случае двух движущихся границ начальные условия, заданные при $t = 0$, не могут быть учтены.

Перечисленных недостатков лишен развиваемый в данной статье метод решения таких задач применительно к задаче о продольных колебаниях стержня переменной длины в случае, когда свободный движущийся конец стержня подвергается удару груза, перемещающегося вдоль оси стержня. В данном подходе удачно сочетается методика, используемая в [5, 6, 9, 18, 23, 24].

2. Постановка задачи. Рассмотрим продольные колебания цилиндрического стержня с движущейся границей, один конец которого закреплен, а другой свободен. В начальный момент времени $\tau = 0$ свободный движущийся конец стержня подвергается удару груза массы M, перемещающегося вдоль оси стержня со скоростью V.

Уравнение продольных колебаний однородного стержня имеет вид

$$U_{\tau\tau}(\xi,\tau) - a^2 U_{\xi\xi}(\xi,\tau) = 0. \tag{1}$$

Граничные условия

$$U\left(0,\tau\right) = 0; \tag{2}$$

$$mU_{\tau\tau}\left(\ell(\tau),\tau\right) = -a^2 U_{\xi}\left(\ell(\tau),\tau\right). \tag{3}$$

Начальные условия

$$U\left(\xi,0\right) = 0,\ \ 0 \le \xi \le \ell(0); \tag{4}$$

$$U_{\tau}\left(\xi,0\right) = \begin{cases} 0, & 0 \le \xi < \ell(0) \\ -V, & \xi = \ell(0). \end{cases} \tag{5}$$

Здесь $U(\xi,\tau)$ – продольное смещение точки объекта с координатой ξ в момент времени τ; $m = \dfrac{M}{\rho S}$; $a = \sqrt{E/\rho}$ – скорость распространения продольных волн в стержне; E – длительный модуль упругости материала стержня; ρ – линейная плотность массы; S – площадь поперечного сечения стержня; $\ell(\xi)$ – закон движения границы.

Начальное условие (5) означает, что в момент удара движущегося груза все промежуточные сечения имеют скорость, равную нулю, а скорость конца стержня равна скорости груза.

3. Решение задачи. Для решения задачи используем представление Даламбера. Не уменьшая общности, примем скорость распространения волн равной единице $(a = 1)$. Общее решение уравнения (1) имеет вид:

$$U(\xi,\tau)=\varphi(\tau-\xi)+\psi(\tau+\xi),\qquad(6)$$

где $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ – произвольные функции, которые необходимо определить из начальных и граничных условий, z – независимая переменная.

Подставляя решение (6) в граничные условия (2) – (3), нетрудно получить следующую задачу:

$$\begin{cases}\varphi(\tau)+\psi(\tau)=0;\\ m\big(\varphi''(\tau-\ell(\tau))+\psi''(\tau+\ell(\tau))\big)=\varphi'(\tau-\ell(\tau))-\psi'(\tau+\ell(\tau)).\end{cases}\qquad(7)$$

В начальных условиях (4) – (5) переменная ξ принадлежит отрезку [0,1], т.к. по предположению $\ell(0)=1$. Подставляя решение (6) в начальные условия (4) – (5), получим:

$$\begin{aligned}&\varphi(-\xi)+\psi(\xi)=0;\quad 0\le\xi\le1;\\ &\varphi'(-\xi)+\psi'(\xi)=\begin{cases}0, & 0\le\xi<1\\ -V, & \xi=1.\end{cases}\end{aligned}\qquad(8)$$

Из первого граничного условия (7) следует $\varphi(z)=-\psi(z)$. Тогда решение (6) имеет вид

$$U(\xi,\tau)=\varphi(\tau-\xi)-\varphi(\tau+\xi).\qquad(9)$$

В отличие от метода А.И. Весницкого [5, 6], где в дифференциальном уравнении вводятся новые переменные, останавливающие границы и оставляющие уравнение инвариантным, для упрощения задачи введем в систему (7) новые функции

$$\varphi(z)=r(g(z));\psi(z)=R(G(z)).\qquad(10)$$

Тогда решение (9) и система уравнений (7) примут вид

$$U(\xi,\tau)=r(g(\tau-\xi))-r(g(\tau+\xi));\qquad(11)$$

$$\begin{cases}r(g(\tau))+R(G(\tau))=0;\\ m\big(r''(g(\tau-\ell(\tau)))+R''(G(\tau+\ell(\tau)))\big)=r'(g(\tau-\ell(\tau)))-R'(G(\tau+\ell(\tau))).\end{cases}\qquad(12)$$

Введем обозначения в первом уравнении системы (12):

$$g(\tau)=z;\ G(\tau)=z$$

и во втором уравнении этой же системы

$$g(\tau-\ell(\tau))=z;\ G(\tau+\ell(\tau))=z-1.$$

Если функции $g(z)$ и $G(z)$ удовлетворяют системе функциональных уравнений

$$\begin{cases}g(\tau)=G(\tau);\\ g(\tau-\ell(\tau))=G(\tau+\ell(\tau))+1,\end{cases}\qquad(13)$$

то система (12) примет вид

$$\begin{cases}r(z)+R(z)=0;\\ m\big(r''(z)+R''(z-1)\big)=r'(z)-R'(z-1).\end{cases}\qquad(14)$$

Из первого уравнения системы (14) получим:

$$R(z) = -r(z). \tag{15}$$

Преобразуем начальные условия (8)

$$r(-z) - r(z) = 0; \quad 0 \le z \le 1;$$
$$r'(-z) - r'(z) = \begin{cases} 0, & 0 \le z < 1 \\ -V, & z = 1. \end{cases} \tag{16}$$

Из второго уравнения системы (16) следует, что

$$r'(z) = 0; \ -1 < z < 1.$$

Таким образом, в этом же интервале $r(z)$ – постоянная. Примем

$$r(z) = 0, \ -1 < z < 1. \tag{17}$$

Определим функцию $r(z)$ вне интервала $-1 < z < 1$. После подстановки (15) во второе уравнение системы (14) будем иметь:

$$r''(z) - \frac{1}{m} r'(z) = r''(z-1) + \frac{1}{m} r'(z-1). \tag{18}$$

Уравнение (18) дает возможность продолжить функцию $r(z)$ за пределы интервала $(-1;1)$.
Из уравнения (18) сначала определим $r'(z)$ вне интервала $(-1;1)$.
При $1 < z < 2$ согласно условию (17) правая часть уравнения (18) равна нулю, следовательно

$$r''(z) - \frac{1}{m} r'(z) = 0,$$

откуда

$$r'(z) = Ce^{\frac{z}{m}}, \tag{19}$$

где C – произвольная постоянная, которую необходимо найти из начальных условий.
Второе начальное условие (16) при $z = 1$ имеет вид:

$$r'(-1+0) - r'(1+0) = -V$$

или, в силу (17),

$$r'(1+0) = V. \tag{20}$$

Используя начальное условие (20) получим следующее выражение для $r'(z)$:

$$r'(z) = Ve^{\frac{z-1}{m}}, \quad 1 < z < 2. \tag{21}$$

Функция $r'(z)$ терпит разрыв в точке $z = 1$.
Поступая далее таким же образом, можно найти $r'(z)$ на интервалах $(2;3), (4;5), (6;7)...$
Функция $r(z)$ определяется интегрированием выражения $r'(z)$. Постоянная интегрирования определяется из условия непрерывности функции $U(\xi,\tau)$ в точке $\xi = 1$. Это условие, если положить τ последовательно равным $0; 1; 2;...,$ из решения (11) определяет уравнения:

$$0 = r(-1+0) - r(1+0),$$
$$r(0-0) - r(2-0) = r(0+0) - r(2+0),$$
$$r(1-0) - r(3-0) = r(1+0) - r(3+0)$$

Из (17) имеем

$$r(0-0)=r(0+0)=0;$$
$$r(1+0)=r(-1+0)=0,$$

следовательно

$$r(2-0)=r(2+0);$$
$$r(3-0)=r(3+0) \text{ и т.д.}$$

Таким образом, выражение для $r(z)$ имеет вид

$$r(z)=mV\left(e^{\frac{z-1}{m}}-1\right), \quad 1<z<2. \tag{22}$$

Из (11), (17) и (22) следует, что при $0<\tau<1$ решение имеет вид

$$U(\xi,\tau)=-r(g(\tau+\xi)),$$

т.е. по стержню распространяется только обратная волна, идущая от конца $\xi=\ell(\tau)$, подвергнувшегося удару. При $\tau=1$ она достигает закрепленного конца и при $1<\tau<2$ к ней прибавится отраженная волна $r(g(\tau-\xi))$ и решение будет иметь вид (11). Таким образом, $U(\xi,\tau)$ имеет различные выражения на интервалах $0<\tau<1$; $1<\tau<2$; $2<\tau<3$;...

4. Заключение. С помощью аналитического метода замены переменных в системе функционально–разностных уравнений на временном интервале $0<\tau<1$ построено точное решение задачи о продольных колебаниях стержня переменной длины в случае, когда свободный движущийся конец стержня подвергается удару груза, перемещающегося вдоль оси стержня. Используя данную методику можно получить решения задачи о колебаниях стержня на различных временных интервалах. Рассмотренная модель может быть использована, например, для анализа колебаний стержня твердого топлива, сгорающего с одного конца [22], а также для анализа колебаний бурового инструмента установок ударно–канатного бурения [8].

Список литературы

1. *Савин Г.Н., Горошко О.А.* Динамика нити переменной длины. – Киев: Наук.думка,1962. - 332 стр.
2. *Самарин Ю.П.* Об одной нелинейной задаче для волнового уравнения в одномерном пространстве // Прикладная математика и механика. – 1964. – Т. 26, В. 3. – С. 77–80.
3. *Анисимов В.Н., Литвинов В.Л.* Исследование резонансных свойств механических объектов с движущимися границами при помощи метода Канторовича-Галеркина // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. «Физико-математические науки». – 2009. - 1 (18). - 149-158.
4. *Горошко О.А., Савин Г.Н.* Введение в механику деформируемых одномерных тел переменной длины – Киев: Наук.думка, 1971. - 270 стр.
5. *Весницкий А.И.* Волны в системах с движущимися границами и нагрузками. – М.: Физматлит, 2001. - 320 стр.
6. *Весницкий А.И.* Обратная задача для одномерного резонатора изменяющего во времени свои размеры // Изв. вузов. Радиофизика. – 1971. - (10). – С. 1538-1542.
7. *Барсуков К.А., Григорян Г.А.* К теории волновода с подвижными границами // Изв.вузов. – Радиофизика. – 1976. - (2). – С. 280-285.

8. *Литвинов В.Л., Анисимов В.Н.* Математическое моделирование и исследование колебаний одномерных механических систем с движущимися границами: монография / В. Л. Литвинов, В. Н. Анисимов - Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2017. - 149 с.
9. *Анисимов В.Н., Литвинов В.Л., Корпен И.В.* Об одном методе получения аналитического решения волнового уравнения, описывающего колебания систем с движущимися границами // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. «Физико-математические науки». – 2012. - 3 (28). – С. 145-151.
10. *Лежнева А.А.* Изгибные колебания балки переменной длины // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1970. – №1. – С. 159-161.
11. *Колосов Л.В., Жигула Т.И.* Продольно-поперечные колебания струны каната подъемной установки // Изв. Вузов. Горный журнал. - 1981. - № 3. - С. 83-86.
12. *Zhu W.D., Chen Y.* Theoretical and experimental investigation of elevator cable dynamics and control // J. Vibr. Acoust. - 2006. - № 1. - P. 66-78.
13. *Shi Y., Wu L., Wang Y.* Нелинейный анализ собственных частот тросовой системы // J. Vibr. Eng. - 2006. - № 2. - P.173-178.
14. *Wang L., Zhao Y.* Multiple internal resonances and non-planar dynamics of shallow suspended cables to the harmonic excitations // J. Sound Vib. - 2009. - № 1-2. - P. 1-14.
15. *Zhao Y., Wang L.* On the symmetric modal interaction of the suspended cable: three-to one internal resonance // J. Sound Vib. - 2006. - № 4-5. - P.1073-1093.
16. *Литвинов В.Л., Анисимов В.Н.* Поперечные колебания каната, движущегося в продольном направлении // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. - 2017. - Т. 19, № 4. – С.161–165.
17. *Литвинов В.Л.* Исследование свободных колебаний механических объектов с движущимися границами при помощи асимптотического метода // Журн. Средневолжского математического общества. - 2014. - Т. 16, № 1. - С.83-88.
18. *Литвинов В.Л.* Решение краевых задач с движущимися границами при помощи метода замены переменных в функциональном уравнении // Журнал Средневолжского математического общества. – 2013. - Т. 15, № 3. – С. 112–119.
19. *Ерофеев В.И., Колесов Д.А., Лисенкова Е.Е.* Исследование волновых процессов в одномерной системе, лежащей на упруго–инерционном основании, с движущейся нагрузкой // Вестник научно–технического развития. – 2013. - № 6 (70). – С. 18–29.
20. *Литвинов В.Л.* Поперечные колебания вязкоупругого каната, лежащего на упругом основании, с учетом влияния сил сопротивления среды // Вестник научно– технического развития. – 2015. - № 4 (92). — С. 29–33.
21. *Литвинов В.Л.* Продольные колебания каната переменной длины с грузом на конце // Вестник научно–технического развития. – 2016. - № 1 (101). — С. 19–24.
22. *Литвинов В.Л.* Точное и приближенное решения задачи о колебаниях стержня переменной длины // Вестник научно– технического развития. – 2017. - № 9 (121). — С. 46–57.
23. *Анисимов В. Н., Литвинов В.Л.* Аналитический метод решения волнового уравнения с широким классом условий на движущихся границах // Вестник научно– технического развития. – 2016. - № 2 (102). — С. 28–35.
24. *Кошляков Н.С. Глинер Э.Б. Смирнов М.М.* Уравнения в частных производных математической физики. - М.: Высшая школа, 1970.
25. *Литвинов В.Л., Анисимов В.Н.* Применение метода Канторовича – Галеркина для решения краевых задач с условиями на движущихся границах // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2018. №2. С. 70-77.

Дата поступления: 3 апреля 2020 г.