

УДК 534.1

ДИНАМИКА БАЛКИ, ЛЕЖАЩЕЙ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ МОДЕЛИ ПАСТЕРНАКА, НЕСУЩЕЙ ДВИЖУЩУЮСЯ ПОСТОЯННУЮ НАГРУЗКУ

© Владимир Иванович Ерофеев¹, Елена Евгеньевна Лисенкова¹,
Иван Сергеевич Царев²

¹Институт проблем машиностроения РАН – филиал Федерального государственного бюджетного научного учреждения «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики Российской академии наук» (ИПМ РАН), Нижний Новгород, Россия
erof.vi@yandex.ru, eelissen@yandex.ru

²Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского» (ННГУ), Нижний Новгород, Россия
tsarev_ivan97@mail.ru

Аннотация. Рассматривается система, состоящая из направляющей, вдоль которой движется тяжелая масса. Направляющая считается лежащей на упругом основании модели Пастернака однородной балкой. Изучаются особенности генерации изгибных волн движущейся нагрузкой. На основе общего решения задачи получено выражение для давления волн (силы сопротивления движению).

Ключевые слова: балка, упругое основание, модель Пастернака, движущаяся нагрузка, изгибные волны, сила сопротивления движению.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20-08-00372-а).

DYNAMICS OF THE BEAM LAYING ON THE ELASTIC BASIS OF THE PASTERNAK MODEL CARRYING THE MOVING CONSTANT LOAD

© V.I. Erofeev¹, E.E. Lissenkova¹, I.S. Tsarev²

¹Mechanical Engineering Research Institute of RAS, Nizhny Novgorod, Russia
erof.vi@yandex.ru, eelissen@yandex.ru

²Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod, Russia
tsarev_ivan97@mail.ru

Abstract. A system consisting of a guide along which a heavy mass moves is considered. A guide is considered to be a homogeneous beam lying on the elastic base of the Pasternak model. The features of bending wave generation by a moving load are studied. Based on the general solution of the problem, an expression is obtained for the pressure of the waves (the forces of resistance to motion).

Keywords: beam, elastic foundation, Pasternak model, moving load, bending waves, resistance to movement.

Acknowledgements. The work was supported by RFBR (project 20-08-00372-a).

Динамическому поведению упругих систем с движущимися нагрузками уделено достаточно внимания в литературе, что связано с широким практическим применением [1-4]. Особый интерес представляют задачи о колебаниях балок на винклеровом основании, которые используются в качестве моделей, описывающих динамику железнодорожного полотна [5-6]. В связи с развитием высокоскоростных магистралей повышаются требования к модели и точности расчетов. Использование модели П.Л. Пастернака [7], которая характеризуется двумя коэффициентами постели (коэффициентом сжатия и коэффициентом сдвига) позволяет, с одной стороны, сохранить простоту математического аппарата присущей модели Винклера [8], а с другой, получить более достоверные результаты.

Рассмотрим систему, состоящую из направляющей, вдоль которой по неизвестному закону $x = l(t)$ движется тяжелая масса (рис. 1).

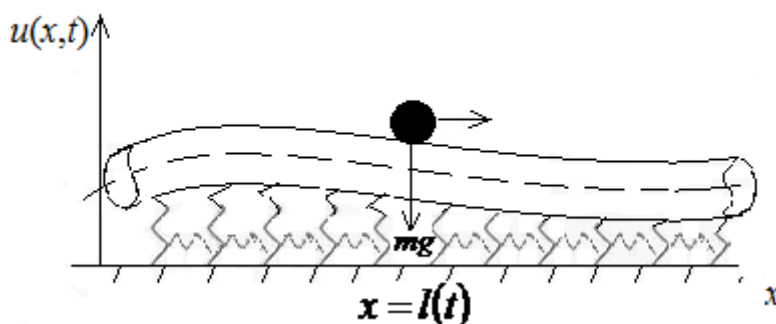


Рис. 1

Направляющую будем считать лежащей на упругом основании модели Пастернака однородной балкой, плотность функции Лагранжа которой имеет вид:

$$\lambda = \frac{1}{2} (\rho F u_t^2 - J E u_{xx}^2 - h_1 u^2 - h_2 u_x^2)$$

где $u(x, t)$ – поперечное смещение срединной линии балки; ρF – погонная плотность; J – момент инерции, E – модуль Юнга, h_1 и h_2 – коэффициент «постели» на сжатие и коэффициент «сдвига» основания балки, соответственно.

Функция Лагранжа движущейся нагрузки (тяжелой массы) будет иметь вид

$$L = m(\dot{u}_0^2 + \dot{l}^2)/2 - m g u_0,$$

где $u_0(t)$ – поперечное смещение массы m

Взаимообусловленное динамическое поведение балки и движущейся по ней нагрузки описывается системой уравнений

$$u_{tt} + \alpha^2 u_{xxxx} - c_{II}^2 u_{xx} + \omega_0^2 u = 0 \quad (1)$$

$$u(x=l(t)+0, t) = u(x=l(t)-0, t) = u(l(t), t) = u_0(t), \quad (2)$$

$$u_x(x=l(t)+0, t) = u_x(x=l(t)-0, t) \quad (3)$$

$$u_{xx}(x=l(t)+0, t) = u_{xx}(x=l(t)-0, t) \quad (4)$$

$$m\ddot{u}_0(t) = -\rho F [\alpha^2 u_{xxx} - c_{II}^2 u_x - \dot{l}u_t] + mg \quad (4)$$

$$m\ddot{l} = F_{pr} + Q, F_{pr} = -\frac{1}{2} \rho F [u_t^2 + \alpha^2 u_{xx}^2 + c_{II}^2 u_x^2 - \omega_0^2 u^2 - 2\alpha^2 u_x u_{xxx} + 2\dot{l}u_x u_t] \quad (5)$$

Здесь квадратные скобки означают разность предельных значений стоящих в них величин справа и слева от движущейся границы $x=l(t)$; $\alpha = \sqrt{JE/\rho F}$; $c_{II} = \sqrt{h_2/\rho F}$; $\omega_0 = \sqrt{h_1/\rho F}$ – наименьшая частота возбуждаемых в балке волн; F_{pr} – давление волн; Q – внешняя сила. Для полноты постановки задачи следует задать начальные условия и потребность отсутствия прогибов на бесконечности ($u(x, t) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm\infty$).

Полагая движение равномерным ($l(t) = Vt$, $V = const$), и используя разработанный подход к исследованию подобного рода задач [1,3], будем искать установившееся (стационарное) решение слева ($x < Vt$) и справа ($x > Vt$) от движущейся нагрузки в форме

$$A \exp[i(\omega t - kx)], \quad (6)$$

где A , ω , k – комплексные постоянные величины.

Тогда задача кинематики волн (определения частот ω , волновых чисел k и критических скоростей, при переходе через которые качественно меняется картина волнообразования) сведется к решению дисперсионного уравнения

$$-\omega^2 + \alpha^2 k^4 + c_{II}^2 k^2 + \omega_0^2 = 0 \quad (7)$$

совместно с кинематическим инвариантом [1,3]:

$$\omega - Vk = 0, \quad (8)$$

выражающим равенство нулю фаз излучаемых волн в точке, где находится движущейся постоянный источник возмущений.

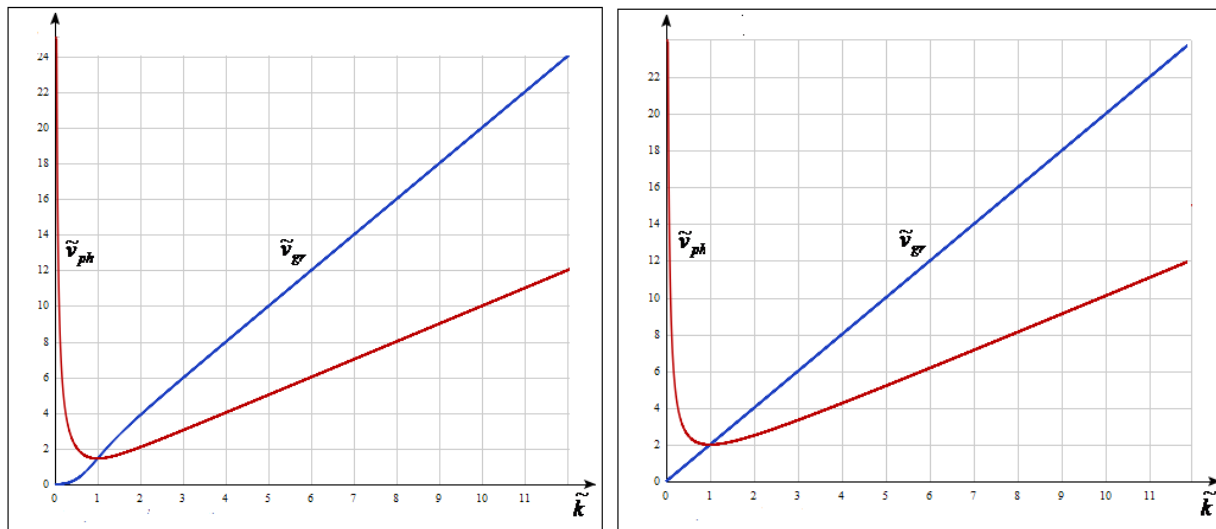
Из условия вырождения корней системы (7)-(8) уравнений, находим выражение для критической скорости $V_* = \sqrt{2\alpha\omega_0 + c_{II}^2}$, которая, по-видимому, была впервые получена в работе [9]. Эта скорость совпадает с минимальной фазовой скоростью распространения волн для данной модели (рис. 2) и превышает аналогичную для балки модели Бернулли-Эйлера на винклеровом основании [1, 3].

На рис. 2 представлены в безразмерном виде ($\tilde{v}_{ph} = v_{ph}/\sqrt{\alpha\omega_0}$, $\tilde{v}_{gr} = v_{gr}/\sqrt{\alpha\omega_0}$,

$\tilde{k} = k\sqrt{\alpha/\omega_0}$, $\beta = \frac{c_{II}^2}{\alpha\omega_0}$) зависимости фазовой ($v_{ph} = \omega/k$) и групповой скоростей ($v_{gr} = d\omega/dk$) от волнового числа k для различных параметров β ($\beta=0.1; 2; 10$). При

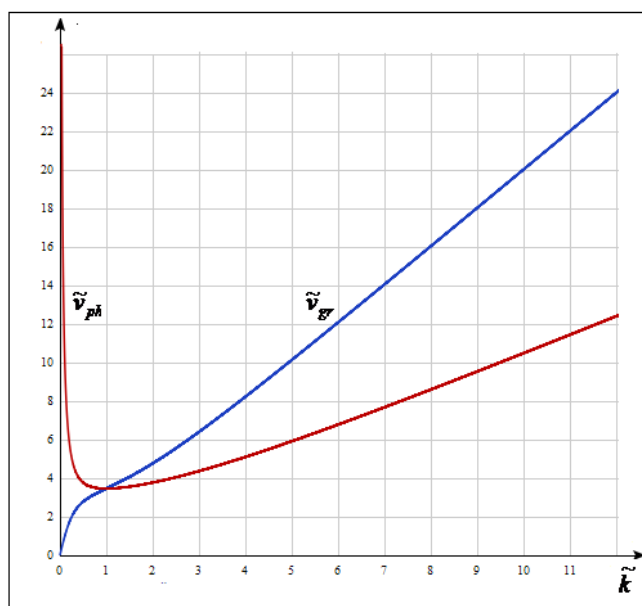
длине волны $2\pi\sqrt{\frac{\alpha}{\omega_0}}$ фазовая скорость по величине совпадает с групповой и достигает

своего минимального значения равного $\sqrt{2\alpha\omega_0 + c_{II}^2}$.



(а)

(б)



(в)

Рис. 2

Видно (рис. 2), что в диапазоне от 0 до 1 для безразмерных волновых чисел (от 0 до $\sqrt{\frac{\omega_0}{\alpha}}$ - в размерных переменных), значения фазовых скоростей волн превосходят значения их групповых скоростей, следовательно дисперсия является нормальной. Аномальная

дисперсия наблюдается при превышении этого диапазона ($\tilde{k} > 1$). Если $c_{II} = \sqrt{2\alpha\omega_0}$, то зависимость групповой скорости от волнового числа линейна (рис. 2б) как для балки модели Бернулли-Эйлера без учета упругого основания [10].

Учитывая, что на бесконечности прогибы балки ограничены, а бегущие волны отводят энергию от объекта, т.е.

$$\begin{cases} \text{Im } k > 0 \\ V_{gr} < V \end{cases} \text{ при } x < Vt, \quad \begin{cases} \text{Im } k < 0 \\ V_{gr} > V \end{cases} \text{ при } x > Vt$$

($V_{gr} = d\omega/dk$ - групповая скорость волн) из (7), (8) находим

слева от нагрузки ($x < Vt$)

$$k_{1,2} = \left(\pm \sqrt{2\alpha\omega_0 - c_{II}^2 + V^2} + i\sqrt{2\alpha\omega_0 + c_{II}^2 - V^2} \right) (2\alpha)^{-1},$$

а справа при $x > Vt$

$$k_{3,4} = \left(\pm \sqrt{2\alpha\omega_0 - c_{II}^2 + V^2} - i\sqrt{2\alpha\omega_0 + c_{II}^2 - V^2} \right) (2\alpha)^{-1}$$

$$\omega_{1-4} = k_{1-4}V$$

Следовательно, у неподвижной нагрузки или движущейся со скоростью, меньше критической, поле поперечных смещений локализовано около источника и представляет собой суперпозицию спадающих по экспоненте осцилляций.

Источник нулевой частоты, движущийся со скоростью $V > V_*$, собственного поля не создает, но зато излучает четыре волны, две из которых бегут впереди движущейся нагрузки, а две другие – ей вослед, отводя от нее энергию. Волновые числа и частоты волн определяются формулами

$$k_{1,2} = \pm \left(V^2 - c_{II}^2 - \sqrt{(V^2 - c_{II}^2)^2 - 4\alpha^2 \omega_0^2} \right)^{1/2} (2\alpha^2)^{-1/2}$$

$$k_{3,4} = \pm \left(V^2 - c_{II}^2 + \sqrt{(V^2 - c_{II}^2)^2 - 4\alpha^2 \omega_0^2} \right)^{1/2} (2\alpha^2)^{-1/2}$$

$$\omega_{1-4} = k_{1-4}V$$

Таким образом, решение задачи (1)-(6), описывающее колебания балки под действием равномерно движущейся нагрузки, представимо в форме

$$u(x, t) = \begin{cases} A_1 e^{i(\omega_1 t - k_1 x)} + A_2 e^{i(\omega_2 t - k_2 x)} & \text{при } x \leq Vt \\ A_3 e^{i(\omega_3 t - k_3 x)} + A_4 e^{i(\omega_4 t - k_4 x)} & \text{при } x \geq Vt \end{cases} \quad (9)$$

где амплитуды A_i ($i = \overline{1,4}$) имеют вид

$$A_1 = \frac{img}{JE(k_1 - k_2)(k_1 - k_3)(k_1 - k_4)}, \quad A_2 = \frac{img}{JE(k_2 - k_1)(k_2 - k_3)(k_2 - k_4)}$$

$$A_3 = \frac{img}{JE(k_1 - k_3)(k_2 - k_3)(k_4 - k_3)}, \quad A_4 = \frac{img}{JE(k_1 - k_4)(k_2 - k_4)(k_3 - k_4)}$$

Амплитуды волн неограниченно возрастают при критической скорости движения нагрузки $V = V_*$. На рис. 3 представлена зависимость профиля

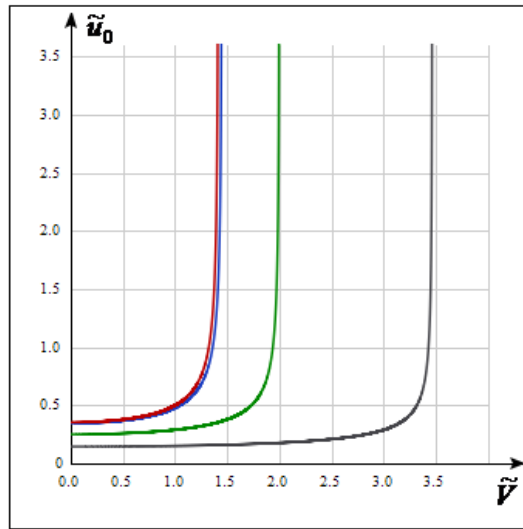


Рис. 3

прогиба балки под нагрузкой от скорости ее движения меньше критической при различных параметрах β ($\beta = 0; 0.1; 2; 10$).

На основе общего решения задачи получим следующее выражение для давления волн (силы сопротивления движению[11])

$$F_{pr} = \begin{cases} 0, & V < V_*, \\ -\frac{(mg)^2}{2\rho F \sqrt{(V^2 - c_{II}^2)^2 - 4\alpha^2 \omega_0^2}}, & V > V_* \end{cases}$$

Поскольку собственное поле не оказывает давление на нагрузку, то для $V < V_*$ имеем $F_{pr} \equiv 0$ (рис. 4). Случай $V = V_*$ является «резонансным» значением скорости, сопровождающейся неограниченным ростом F_{pr} . На рис. 4 первая кривая построена для балки на винклеровом основании, вторая – на основании модели Пастернака. Начиная со скорости $V = V_*$ (как было сказано выше), в системе происходит излучение волн по две

слева и справа от нагрузки, бегущих в $+x$ направлении, подобно эффекту Вавилова-Черенкова [12], оказывая давление на нагрузку. Видно, что при $V > V_*$ сила давления волн F_{pr} всегда направлена против движения (тормозящая).

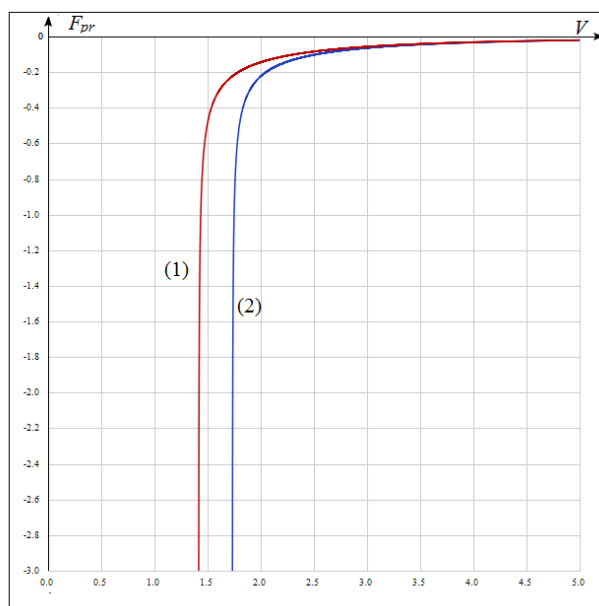


Рис. 4

Заметим, что рассмотренная задача дополняет цикл исследований проблем волновой динамики и устойчивости движения высокоскоростных объектов по рельсовым направляющим ракетного трека [13-23]. Полученные результаты могут служить методическим и расчетным сопровождением при постановке экспериментов по высокоскоростному разгону полезной нагрузки на ракетном треке.

Изгибные колебания балки, лежащей на нелинейно-упругом основании Винклера, рассматривались в работе [24]. Нелинейно-упругое основание Пастернака ждет своего исследователя.

Список литературы

1. Весницкий А. И. Волны в системах с движущимися границами и нагрузками. – М.: Физматлит, 2001. – 320 с.
2. Козин В.М., Жесткая В.Д., Погорелова А.В., Чижумов С.Д., Джабраилов М.Р., Морозов В.С., Кустов А.Н. Прикладные задачи динамики ледяного покрова. - М.: Изд. Акад. Естествозн., 2008. (URL: <https://www.monographies.ru/ru/book/view?id=14>)
3. Весницкий А. И. Избранные труды по механике. – Н.Новгород: ИД «Наш дом», 2010 – 248 с.
4. Vostrukhov A. V. Three-dimensional dynamic models of a rail-way track for high-speed trains. – Delft University Press. The Netherlands. 2002.
5. Veritchev S.N. Instability of a vehicle moving on an elastic structure. – Delft University Press. The Netherlands. 2002. - 190 p.

6. Метрикин А.В., Веричев С.Н., Вострухов А. В. Фундаментальные задачи высокоскоростного наземного транспорта. – Изд.: Lambert Academic Publishing, 2015. – 200 с.
7. Пастернак П.Л. Основы нового метода расчета фундаментов на упругом основании при помощи двух коэффициентов постели. – М.: ГСИ, 1954. - 56 с.
8. Winkler E. Die Lehre von der Elastizität und Festigkeit. – Prague, 1867.
9. Дуплякин И.А. Движение экипажа с постоянной скоростью по балке бесконечной длины, лежащей на основании с двумя упругими характеристиками // Прикладная математика и механика. - 1991. - Т.55, № 3. - С.461-471.
10. Ерофеев В.И., Лисенкова Е.Е. Общие соотношения для волн в одномерных упругих системах // Прикладная математика и механика. - 2013. - Т.77, № 2. - С. 315-321.
11. Быченков В.А., Крысов С.В., Холуев В.В. Волновое сопротивление движению нагрузок вдоль деформируемых систем // Машиноведение. – 1988. - № 3. - С.60-66.
12. Болотовский Б.М., Гинзбург В.Л. Эффект Вавилова—Черенкова и эффект Допплера при движении источников со скоростью больше скорости света в вакууме // Успехи физических наук. 1972. Т. 106, № 4. С. 577–592.
13. Бутова С.В., Герасимов С.И., Ерофеев В.И., Камчатный В.Г. Устойчивость движения высокоскоростных объектов по направляющим ракетного трека // Проблемы машиностроения и надежности машин. - 2015. - № 1. - С.3-8.
14. Герасимов С.И., Ерофеев В.И., Камчатный В.Г., Каныгин И.И. Оценка резонансоопасных гармоник при колебаниях упругой направляющей с движущимся по ней двухопорным объектом // Проблемы прочности и пластичности. - 2015. - Т.77, № 4. - С.412-424.
15. Герасимов С.И., Ерофеев В.И. Расчет изгибно-крутильных колебаний рельсовой направляющей ракетного трека // Проблемы машиностроения и надежности машин. - 2016. - № 3. - С.25-27.
16. Ерофеев В.И., Колесов Д.А., Лисенкова Е.Е. Особенности генерации волн источником, движущимся по одномерной гибкой направляющей, лежащей на упруго-инерционном основании // Акустический журнал. - 2016. - Т.62, № 6. - С. 639-647.
17. Ерофеев В.И., Лисенкова Е.Е. Возбуждение волн нагрузкой, движущейся по поврежденной гибкой одномерной направляющей, лежащей на упругом основании // Проблемы машиностроения и надежности машин. - 2016. - № 6. - С.14-18.
18. Герасимов С.И., Ерофеев В.И., Камчатный В.Г., Одзерихо И.А. Термомеханические и деформационные процессы при высокоскоростном скольжении нагрузок по рельсовым направляющим ракетного трека // Вестник научно-технического развития. - 2017. - № 10 (122). - С.3-7.
19. Ерофеев В.И., Колесов Д.А., Лисенкова Е.Е. Движение двухопорного экипажа по направляющей ракетного трека // Вестник научно-технического развития. - 2017. - № 11 (123). - С.18-23.
20. Бутова С.В., Герасимов С.И., Ерофеев В.И., Кикеев В.А., Одзерихо И.А., Синицкий И.О. Устойчивость поперечных колебаний двухопорного объекта, движущегося по упругой направляющей // Вестник научно-технического развития. - 2017. - № 12(124). - С.3-23.
21. Erofeev V., Lissenkova E., Malkhanov A. Wave resistance to the movement of objects along the rocket track guides // MATEC Web of Conferences. - 2018. - Vol.224, 02016. - P.1-6.
22. Герасимов С.И., Ерофеев В.И., Камчатный В.Г., Одзерихо И.А. Условие на скользящем контакте в анализе устойчивости движения ступени на ракетном треке // Проблемы машиностроения и надежности машин. - 2018. - № 3. - С.21-27.

23. Герасимов С.И., Ерофеев В.И., Одзерихо И.А., Смирнов Д.Ю. Оценка влияния волновых процессов в упругой направляющей на динамику ракетного трека // Вестник научно-технического развития. - 2019. - № 6 (142). - С. 3-12.
24. Ерофеев В.И., Кажаяев В.В., Лисенкова Е.Е., Семерикова Н.П. Несинусоидальные изгибные волны в балке Тимошенко, лежащей на нелинейно упругом основании // Проблемы машиностроения и надежности машин. - 2008. - № 3. - С.30-36.

Дата поступления: 20 марта 2020 г.