

УДК 621.7

## НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА ВИБРАЦИОННОЙ МАШИНЫ С ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИМ ВОЗБУДИТЕЛЕМ КОЛЕБАНИЙ

Владимир Константинович Асташев, Кирилл Александрович Пичугин, Елена  
Борисовна Семенова

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Институт машиноведения им. А.А. Благонравова Российской академии наук  
(ИМАШ РАН), Москва, Россия

[v\\_astashev@mail.ru](mailto:v_astashev@mail.ru), [pichugin-ka@yandex.ru](mailto:pichugin-ka@yandex.ru), [el\\_semenova@mail.ru](mailto:el_semenova@mail.ru)

**Аннотация.** Приводятся результаты анализа динамических свойств технологической машины с электродинамическим возбудителем колебаний при ее работе на нелинейную технологическую нагрузку. Построены амплитудно-частотные характеристики машины как на холостом ходу, так и под нагрузкой при питании от источников тока. Показана возможность и найдены условия появления областей неоднозначности амплитудно-частотных характеристик и их ветвей, отвечающих неустойчивым режимам.

**Ключевые слова:** вибрационная машина, нелинейная технологическая нагрузка, резонанс, амплитудно-частотная характеристика, скорость процесса.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 18-08-00168).

## NONLINEAR DYNAMICS OF THE VIBRATION MACHINE WITH ELECTRODYNAMIC ACTUATOR OF VIBRATIONS

V.K. Astashev, K.A. Pichugin, E.B. Semenova

A.A. Blagonravov Mechanical Engineering Research Institute of RAS, Moscow, Russia  
[v\\_astashev@mail.ru](mailto:v_astashev@mail.ru), [pichugin-ka@yandex.ru](mailto:pichugin-ka@yandex.ru), [el\\_semenova@mail.ru](mailto:el_semenova@mail.ru)

**Abstract.** The results of the analysis of the dynamic properties of a technological machine with an electrodynamic vibration exciter during its operation on a nonlinear technological load are presented. The amplitude-frequency characteristics of the machine are obtained both at idle and under load when powered by current sources. The possibility is shown and the conditions for the appearance of ambiguity regions of amplitude-frequency characteristics and their branches corresponding to unstable modes are found.

**Keywords:** vibration machine, non-linear technological load, resonance, amplitude-frequency characteristic, process speed.

**Acknowledgements.** Research was supported by RFBR (project no. 18-08-00168).

Электродинамические возбудители колебаний [1, 2] широко используются в испытательных стендах [3], но находят применение и в разнообразных вибрационных и виброударных

машинах и устройствах в качестве привода рабочих органов [4, 5]. Следует отметить, что в указанных работах не уделяется должное внимание к описанию общих свойств машины, особенно при ее взаимодействии с нелинейной технологической нагрузкой, возникающей при взаимодействии рабочего органа с обрабатываемым изделием или средой.

В статье выполнен анализ динамических характеристик машины при ее работе как на холостом ходу, так и в рабочем режиме при питании электродинамического возбудителя от источника тока.

На рис. 1 показана схема вибрационной машины с электродинамическим возбудителем колебаний. Возбудитель колебаний содержит упруго связанный с корпусом 1 постоянный магнит 2, создающий равномерное магнитное поле в кольцевых зазорах катушек 3 и 4. Катушки получают питание от источника переменного тока 5. При прохождении переменного тока через обмотки катушек создается переменная сила  $f(t)$  возбуждения колебаний магнита [1 - 2]

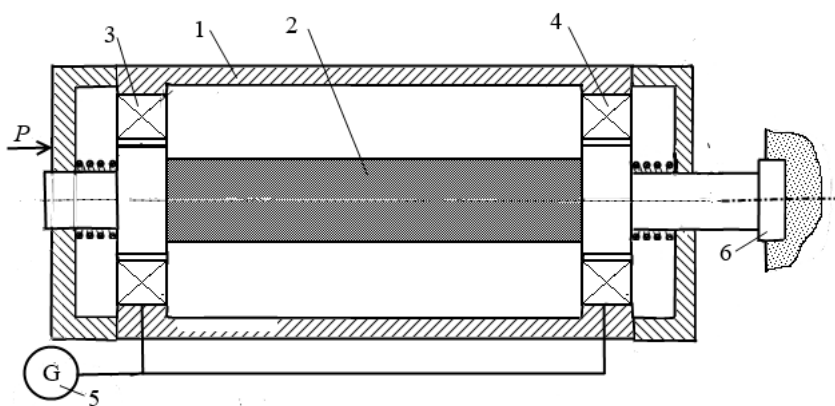
$$f(t) = Bli(t) \quad (1)$$

где  $B$  – магнитная индукция магнитного поля в зазоре;  $l$  – длина проводника обмоток катушек;  $i$  – сила тока.

В то же время движение магнита со скоростью  $\dot{x}(t)$  создает в обмотке катушки противоэлектродвижущую силу

$$e(t) = Bl\dot{x}(t) \quad (2)$$

С магнитом жестко связан рабочий орган 6 вибрационной машины. Инструмент 6 взаимодействует с обрабатываемой деталью или средой, к которой вся система поджимается постоянной силой  $P$ .



**Рис. 1.** Схема вибрационной машины.

Взаимодействие рабочего органа 6 с обрабатываемой средой создает технологическую нагрузку на колебательную систему. Для описания технологической нагрузки используется нелинейная динамическая характеристика  $f_l = f_l(x, \dot{x})$  рабочего процесса [4, 5], которая определяет зависимость силы взаимодействия от перемещения  $x$  и скорости  $\dot{x}$  рабочего органа.

**Режимы холостого хода.** Рассмотрим сначала динамические свойства системы при работе на холостом ходу, т.е. при отсутствии технологической нагрузки  $f_l = 0$ . Состояние электромеханической системы при установившихся гармонических колебаниях с учетом (1) и (2) описывается уравнениями

$$\begin{aligned}(c - m\omega^2 + j\omega b)\tilde{a} &= Bl\tilde{I}, \\ (R + j\omega L)\tilde{I} &= \tilde{U} - j\omega Bl\tilde{a},\end{aligned}\tag{3}$$

где  $m, c, b$  – масса подвижных частей, жесткость упругих элементов, – коэффициент вязкого сопротивления;  $\tilde{U}, \tilde{I}$  – комплексные амплитуды напряжения питания катушек и тока в их проводнике;  $\tilde{a}$  – комплексная амплитуда колебаний инструмента;  $\omega$  – частота колебаний;  $j = \sqrt{-1}$ .

Если сила тока задана, т.е. питание катушек производится от источника тока, и изменяется по гармоническому закону  $i(t) = Ie^{j\omega t}$ , где – амплитуда силы тока  $I = \text{const}$ , из (3) находим комплексные амплитуды колебаний инструмента и напряжения питания катушек

$$\tilde{a} = \frac{Bl}{W(j\omega)}I, \tilde{U} = \left[ Z(j\omega) + \frac{j\omega(Bl)^2}{W(j\omega)} \right] I,\tag{4}$$

где  $W(j\omega) = (c - m\omega^2 + j\omega b)$  – динамическая жёсткость механической части системы;  $Z(j\omega)(R + j\omega L)$  – импеданс электрической цепи.

Из соотношений (4) после подстановки принятых обозначений получим выражения для комплексных амплитуд колебаний инструмента и напряжения питания катушек

$$\tilde{a} = \frac{BlI}{c - m\omega^2 + j\omega b}, \tilde{U} = I \left[ R + j\omega L + \frac{(Bl)^2}{c - m\omega^2 + j\omega b} \right]\tag{5}$$

Используя формулу Эйлера  $\tilde{a} = ae^{j\phi} = a(\cos \phi + j \sin \phi)$ , где  $\phi$  – начальная фаза колебаний, из первого равенства (5) находим соотношения для амплитуды

$$a = \frac{BlI}{\sqrt{(c - m\omega^2)^2 + (b\omega)^2}}\tag{6}$$

и начальной фазы колебаний рабочего органа

$$\cos \phi = \frac{a(c - m\omega^2)}{BlI}, \sin \phi = \frac{ba\omega}{BlI}\tag{7}$$

Выражения (6) и (7) эквивалентны соотношениям, получаемым при анализе вынужденных колебаний осциллятора при действии гармонической силы с амплитудой  $F_0 = BlI$ .

Второе соотношение в (5) определяет напряжение питания. Второе слагаемое в нем отражает влияние параметров механической части системы на импеданс электрической цепи. Заметим, что при питании от источника тока резонанс достигается при  $\text{Re } W(j\omega) = 0$ , т.е. на собственной частоте  $\omega_0 = \sqrt{c/m}$  механической части системы. При этом достигают максимальных значений амплитуды как колебаний инструмента, так и напряжения на выходе источника тока питания. Резонансные значения амплитуды колебаний инструмента и

напряжения питания имеют вид

$$a_r = \frac{BlI}{b\omega_0}, \tilde{U}_r = I \left[ R + j\omega_0 L + \frac{(Bl)^2}{b} \right]$$

Отсюда видно, что в резонансном режиме колебания катушки создают добавочное активное электрическое сопротивление, которое тем сильнее, чем меньше коэффициент  $b$  вязкого сопротивления движению механической системы. Это объясняется возрастанием амплитуды колебаний при уменьшении  $b$ , следовательно, и противоэлектродвижущей силы, и напряжения на выходе источника тока. Заметим, что напряжение питания  $U \rightarrow \infty$  при  $\omega \rightarrow \infty$ , что объясняется возрастанием индуктивного сопротивления катушки: (5).

На рис. 2 показан пример амплитудно-частотной характеристики колебаний рабочего инструмента при питании системы от источника тока.

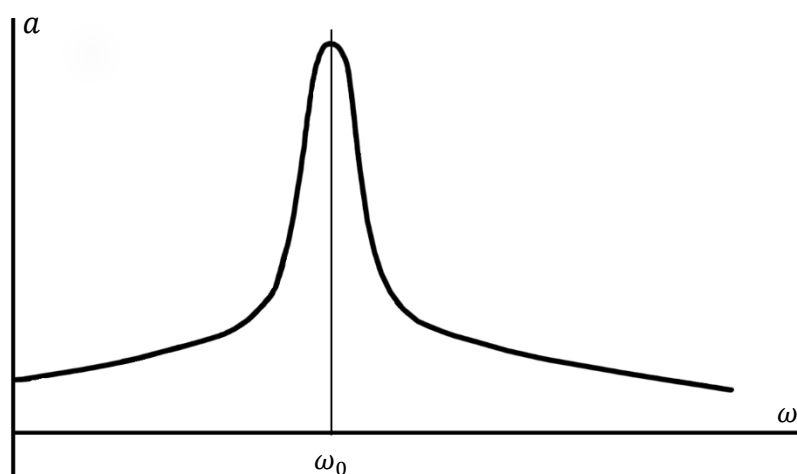


Рис. 2. Амплитудно-частотная характеристика

**Нелинейная технологическая нагрузка.** Перейдем к описанию работы машины с электродинамическим возбудителем колебаний при выполнении технологического процесса. Взаимодействие рабочего органа с обрабатываемым изделием или средой создает дополнительную технологическую нагрузку на рабочий орган машины. Как правило, нагрузка может быть представлена в виде действующей на рабочий орган силы  $f_l = f_l(x, \dot{x})$  нелинейно зависящей от координаты  $x$  и скорости  $\dot{x}$  рабочего органа. Уравнение движения при питании от источника тока по аналогии с (3) принимает вид

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = BlIe^{j\omega t} - f_l(x, \dot{x}) \quad (8)$$

Отыскивая приближенное гармоническое решение нелинейного уравнения (8), проведем гармоническую линеаризацию [4] функции  $f_l = f_l(x, \dot{x})$

$$f_l(x, \dot{x}) \approx P_l(a) + c_l(a)x + b_l(a)\dot{x}, \quad (9)$$

где  $P_l(a)$  - постоянная составляющая технологической нагрузки;  $c_l(a), b_l(a)$  - коэффициенты гармонической линеаризации, вычисляемые по формулам [4]

$$P_l(a) = \frac{1}{T} \int_0^T f_l(x, \dot{x}) dt,$$

$$c_l(a) = \frac{2}{Ta} \int_0^T f_l(x, \dot{x}) \cos(\omega t) dt, \quad b_l(a) = -\frac{2}{Ta\omega} \int_0^T f_l(x, \dot{x}) \sin(\omega t) dt,$$

где  $T = 2\pi/\omega$  - период колебаний.

Поскольку вся система поджимается к обрабатываемой среде постоянной силой  $P$  (см.рис.1), очевидно, что постоянная составляющая нелинейной нагрузки  $P_l = P$ , а уравнение колебаний (8) с учетом (9) принимает вид

$$m\ddot{x} + (b + b_l)\dot{x} + (c + c_l)x = B l e^{j\omega t} \quad (10)$$

Таким образом, получено линейное уравнение, коэффициенты которого зависят от неизвестной амплитуды. Решая уравнение (10), получаем выражение для комплексной амплитуды

$$\tilde{a} = -\frac{B l}{(c + c_l) - m\omega^2 + j\omega(b + b_l)} \quad (11)$$

Заметим, что по форме выражение (11) совпадает с выражением (5), полученным при описании работы на холостом ходу. Поэтому проведенные выше выкладки формально оказываются справедливыми при замене величин  $c$  и  $b$  на величины  $(c + c_l)$  и  $(b + b_l)$  соответственно. Существенное различие равенств (5) и (11) заключается в том, что последнее является уравнением относительно неизвестной амплитуды  $a$ , от которой зависят коэффициенты  $c_l$  и  $b_l$ .

В качестве примера рассмотрим работу системы, предназначенной, например, для внедрения в хрупкую среду. Примем, что рабочий процесс описывается характеристикой жесткопластического материала [6]

$$f(x) = \frac{1}{2} D \eta (x - \Delta) (1 + \text{sign} \dot{x}) \quad (12)$$

где  $D$  – сила, при которой происходит необратимая деформация или разрушение материала;  $\eta(x)$  - функция Хевисайда;  $\Delta$  - координаты инструмента в момент начала взаимодействия инструмента с обрабатываемой средой. Коэффициенты (10) гармонической линейаризации функции (12) имеют вид [8]

$$P_l(a) = \frac{D}{2\pi} \arccos \frac{\Delta}{a}, \quad c_l(a) = \frac{D}{\pi a} \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta}{a}\right)^2}, \quad b_l(a) = \frac{D}{\pi a \omega} \left(1 - \frac{\Delta}{a}\right) \quad (13)$$

Учитывая равенство  $P_l(a) = P$ , из первого соотношения в (13) находим  $\Delta/a = \cos(2\pi P/D)$  и после подстановки в (13) получаем

$$c_l(a) = \frac{D}{\pi a} \sin \frac{2\pi P}{D}, \quad b_l(a) = \frac{2D}{\pi a \omega} \sin^2 \frac{\pi P}{D} \quad (14)$$

Разность  $a - \Delta$  определяет величину погружения инструмента в обрабатываемую среду за один цикл колебаний. Очевидно, что средняя скорость процесса  $v = (a - \Delta)\omega/2\pi$  и с помощью первого соотношения в (13) находим

$$v = \frac{a\omega}{\pi} \sin^2 \frac{\pi P}{D} \quad (15)$$

В реальных процессах и машинах  $P \ll D$ . Поэтому, выражения (14) и (15) с высокой точностью можно представить в виде

$$c_l(a) = \frac{2P}{a}, \quad b_l(a) = \frac{2\pi P^2}{a\omega D}, \quad v = \pi a \omega \left(\frac{P}{D}\right)^2 \quad (16)$$

**Нелинейная динамика машины.** Перейдем к построению динамических характеристик машины в рабочем режиме. Выше было показано, что все решения, полученные для режимов холостого хода, остаются справедливыми после замены величин  $c$  и  $b$  на величины  $(c + c_l)$  и  $(b + b_l)$ .

При питании возбудителя от источника тока по аналогии с (6) с учетом (16) находим

$$a = \frac{BI}{\sqrt{\left(c + \frac{2P}{a} - m\omega^2\right)^2 + \omega^2 \left(b + \frac{2\pi P^2}{a\omega D}\right)^2}} \quad (17)$$

Соотношение (17) позволяет сразу найти связь резонансных частот и амплитуд с параметрами системы. Равенство нулю первого слагаемого в знаменателе (17) определяет резонансные значения частоты  $\omega_{rl}$  и амплитуды  $a_{rl}$

$$a_{rl} = -\frac{2P}{c[1 - (\omega_{rl}/\omega_0)^2]}, \quad a_{rl} = \left(BI - \frac{2\pi P^2}{D}\right) (b\omega_{rl})^{-1} \quad (18)$$

Первое из равенств (18) является уравнением скелетной кривой амплитудно-частотной характеристики, второе - линии предельных амплитуд [3]. Решение уравнений (18) позволяет найти величины резонансных частот и амплитуд. Из (18) видно, что резонансы возникают в области частот  $\omega_{rl} > \omega_0$  при условии

$$BI > \frac{2\pi P^2}{D} \quad (19)$$

Из соотношений (18) следует, что резонансная частота в рабочем режиме  $\omega_{rl} > \omega_0$ , а резонансная амплитуда  $a_{rl} \rightarrow \infty$  при  $b \rightarrow 0$ .

Уравнение (17) относительно неизвестной амплитуды колебаний рабочего органа приводится к следующему квадратному уравнению

$$[(c - m\omega^2)^2 + (\omega b)^2]a^2 + 4Pa \left(c - m\omega^2 + \omega b \frac{\pi P}{D}\right) + 4P^2 \left[1 + \left(\frac{\pi P}{D}\right)^2\right] - (BI)^2 = 0$$

Учитывая, что диссипация в системе существенно влияет на параметры колебаний только в окрестности резонанса, для получения ясной физической картины запишем решение уравнения, полагая  $b=0$

$$a = \frac{-2P \left[ 1 \pm \sqrt{\left(\frac{B\Gamma}{2P}\right)^2 - \left(\frac{\pi P}{D}\right)^2} \right]}{(c - m\omega^2)} \quad (20)$$

Из выражения (20) следует, что неравенство (19) является необходимым условием существования виброударного рабочего процесса. Покажем, что вид амплитудно-частотной характеристики существенно зависят от и соотношения сил возбуждения  $B\Gamma$ , и подачи  $P$ . Учитывая условие  $a > 0$ , из (19), находим, что рабочий процесс реализуется во всем частотном диапазоне при условии

$$B\Gamma \geq 2P \sqrt{\left[\left(\frac{\pi P}{D}\right)^2 + 1\right]} \quad (21)$$

На рис. 3 показаны амплитудно-частотные характеристики при различных значениях силы  $P$ . Рассмотренному случаю отвечает кривая  $P_1$ . Резонансные частота и амплитуда определяются координатами точек пересечения скелетных кривых 1 и линии 2 предельных амплитуд. Ситуация радикально меняется, если увеличение силы  $P$  приводит к нарушению неравенства (21). В этом случае виброударные режимы возможны только в области  $\omega > \omega_0$ , и амплитудно-частотная характеристика имеет две ветви, разделенные скелетной кривой. На рис. 3 этому случаю отвечает кривая  $P_2$ . По мере увеличения силы подачи резонансная частота все более смещается в сторону более высоких частот. Используя соотношения (18), можно показать, что по мере приближения параметров системы к границе неравенства (19) резонансная частота  $\omega_{rl} \rightarrow \infty$ .

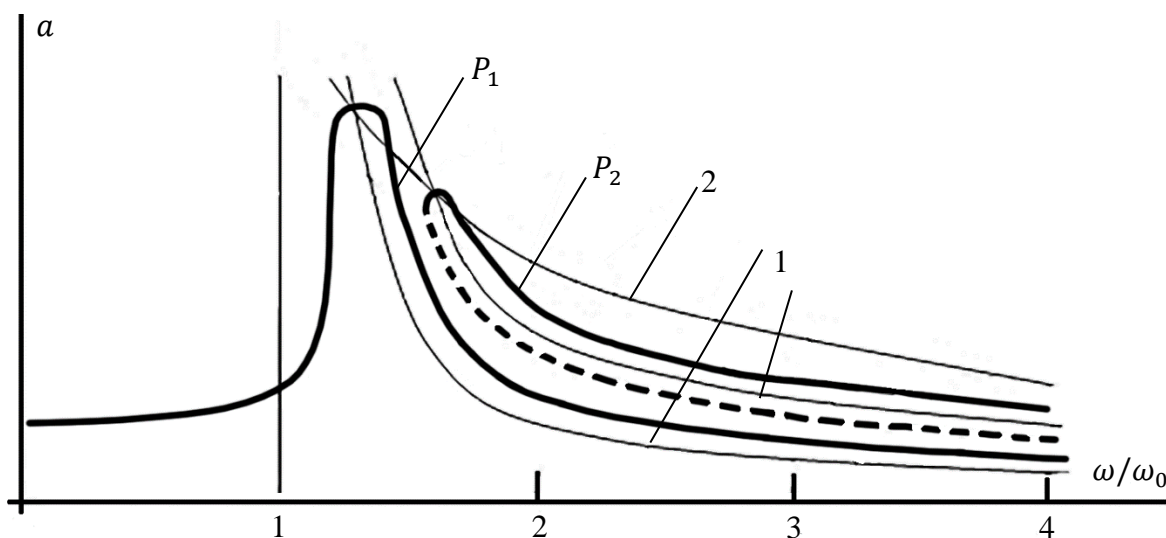


Рис. 3. Амплитудно-частотные характеристики при различных значениях  $P$ .

Показанная штриховой линией нижняя ветвь резонансной кривой  $P_2$  отвечает неустойчивым режимам. Вывод системы на режимы с большой амплитудой может быть осуществлен либо

внешним импульсом, либо затягиванием колебаний из области высоких частот, либо плавным увеличением силы  $P$  при заданной частоте  $\omega > \omega_{rl}$ . При этом следует иметь в виду опасность срыва колебаний при прохождении границы устойчивости.

В заключение отметим, что приведенные результаты позволяют провести полный расчет машины с электродинамическим возбудителем колебаний.

### Список литературы

1. Римский-Корсаков А.В. Электроакустика. – М.: Связь, 1973.- 272 с.
2. Харкевич А.А. Теория электроакустических преобразователей. – В кн.: Избранные труды. Т.1. - М.: Наука, 1973. - С. 33 – 217.
3. Покровский В.В. Электродинамические вибровозбудители. В.кн. Вибрации в технике. Справочник, т.4. - М.: Машиностроение, 1981. - С. 269-277.
4. Краснопольская Т.С. Автономное возбуждение механических колебаний электродинамическим вибратором // Прикладная механика. - 1977. - Т.13, №2. - С.108.
5. Astashev V.K., Babitsky V.I.; Kolovsky M.Z Dynamics and Control of Machines. - Berlin: Springer, 2000. - 235 p.
6. Пальмов В.А. Колебания упругопластических тел. - М.: Наука, 1976. - 328 с.
7. Бабицкий В.И. Теория виброударных систем. - М.: Наука, 1967. - 352 с.
8. Асташев В.К., Крупенин В.Л. Нелинейная динамика ультразвуковых технологических процессов: - М.: МГУП им. Ивана Федорова, 2016. - 372 с.

*Дата поступления: 16 ноября 2019 г.*