DOI: 10.18411/vntr2019-147-2

УДК 534.1

О РАСПРОСТРАНЕНИИ КВАЗИГАРМОНИЧЕСКИХ МОДУЛИРОВАННЫХ ВОЛН В НЕЛИНЕЙНОМ АКУСТИЧЕСКОМ МЕТАМАТЕРИАЛЕ, ЗАДАВАЕМОМ КАК ЦЕПОЧКА «МАССА-В-МАССЕ»

© Владимир Иванович Ерофеев[1], Даниил Александрович Колесов[1,2], Виталий Львович Крупенин[2]
[1]*Институт проблем машиностроения Российской академии наук, Нижний Новгород, Россия*
erof.vi@yandex.ru
[2]*Институт машиноведения им. А.А. Благонравова Российской академии наук, Москва, Россия*
krupeninster@gmail.com

Аннотация. *Рассматривается математическая модель акустического (механического) метаматериала, представляющая собой цепочку осцилляторов, состоящую из нелинейно-упругих элементов и масс, каждая из которых содержит внутренний нелинейный осциллятор. Показано, что в длинноволновом приближении полученная система уравнений может быть сведена к нелинейному эволюционному уравнению Бенджамина-Бона-Махони, в рамках которого исследовано взаимодействие трех модулированных квазигармонических волн (волновых пакетов) при выполнении условий фазового синхронизма. Исследовано также формирование связанных трехчастотных солитонов огибающих, т.е. волновых пакетов, сохраняющих свои амплитудно-фазовые профили при распространении в метаматериале благодаря компенсирующему действию нелинейных эффектов.*
Ключевые слова: *математическое моделирование, нелинейные волны, метаматериал, цепочка «масса-в-массе», одномерная система.*

Работа выполнялась при поддержке Российского научного фонда (Грант № 19-19-00065).

ON THE DISTRIBUTION OF QUASIHARMONIC MODULATED WAVES IN NONLINEAR ACOUSTIC METAMATERIAL, AS A MASS-IN-MASS

© V.I. Erofeev[1], D.A. Kolesov[1,2], V.L. Krupenin[2]
[1]*Mechanical Engineering Research Institute, Russian Academy of Sciences, Nizhny Novgorod, Russia*
erof.vi@yandex.ru
[2]*A.A. Blagonravov Mechanical Engineering Research Institute, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*
krupeninster@gmail.com

Abstract. *A mathematical model of the acoustic (mechanical) metamaterial is considered, which is a chain of oscillators consisting of nonlinear elastic elements and masses, each of which contains an internal nonlinear oscillator. It is shown that, in the long-wave approximation, the resulting system of equations can be reduced to the non-linear Benjamin-Bon-Mahoney evolution equation, in the framework of which the interaction of three modulated quasi-harmonic waves (wave packets) is studied under phase-matching conditions. The formation of coupled three-frequency envelope solitons, i.e. wave packets that retain their amplitude-phase profiles during propagation in the metamaterial due to the compensating effect of nonlinear effects.*
Keywords: *mathematical modeling, nonlinear waves, metamaterial, chain "mass-in-mass", one-dimensional system.*

Acknowledgements: *The work was supported by the Russian Science Foundation (Grant No 19-19-00065).*

В настоящее время исследователями разных стран активно изучаются динамические, в частности, волновые, свойства метаматериалов [1 – 15].
В работе [14] рассматривалась одномерная цепочка, содержащая одинаковые массы m_1, связанные упругими элементами (пружинами), обладающими одинаковой жесткостью k_1, при этом каждая масса внутри себя содержала еще одну массу m_2 и еще один упругий элемент – пружину с жесткостью k_2 (Рис.1). Такая модель, названная цепочкой «масса-в-массе», не дает упомянутых абсурдных результатов.
Эта модель была обобщена в работах [16, 17] на случай учета квадратичной нелинейности внешнего и внутреннего упругих элементов.

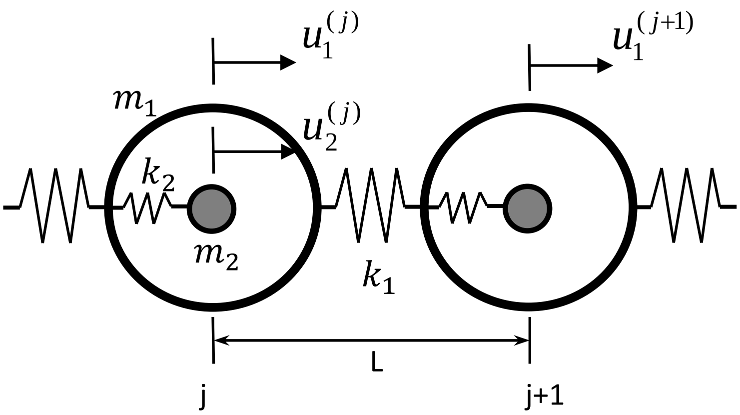

Рис. 1.

Для обобщенной модели нелинейная система уравнений в перемещениях будет выглядеть следующим образом [16, 17]:

$$\begin{cases} \frac{m_1}{L}\ddot{u}_1 - k_1 L\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - 3h_1 L^3 \frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \frac{k_2}{L}(u_2 - u_1) - \frac{3h_2}{2L}(u_2 - u_1)^2 = 0 \\ \frac{m_1}{L}\ddot{u}_2 + \frac{k_2}{L}(u_2 - u_1) + \frac{3h_2}{2L}(u_2 - u_1)^2 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Здесь коэффициент h_1 характеризует нелинейность внешнего, а h_2 – нелинейность внутреннего упругих элементов.
Перейдем в (1) в движущуюся систему координат $\xi = x - ct, \tau = \varepsilon t$, где c – скорость волны, заранее не известная, ε – малый параметр, характеризующий отношение максимальной амплитуды перемещения к длине волны. Выбор переменных объясняется тем, что возмущение, распространяясь со скоростью c вдоль оси x, медленно эволюционирует во времени из-за нелинейности и дисперсии.
Представим перемещения в виде разложений в ряды по степеням малого параметра

$$\begin{gathered} u_1(\xi,\tau) = u_1^{(0)}(\xi,\tau) + \varepsilon u_1^{(1)}(\xi,\tau) + \cdots, \\ u_2(\xi,\tau) = u_2^{(0)}(\xi,\tau) + \varepsilon u_2^{(1)}(\xi,\tau) + \cdots \end{gathered} \quad (2)$$

Подставляя разложения (2) в (1), придем к системе уравнений разного порядка малости по степеням ε. Нулевое приближение по малому параметру позволяет вычислить значение скорости $c = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}L$ и определяет связь между перемещениями

$$u_1^{(0)} = u_2^{(0)} - \frac{m_2 k_1 L^2}{m_1 k_2}\frac{\partial^2 u_2^{(0)}}{\partial \xi^2}. \quad (3)$$

Первое приближение приводит к эволюционному уравнению

$$\begin{aligned} -2\sqrt{m_1 k_1}\varepsilon\frac{\partial U}{\partial \tau} - \frac{m_2 k_1 L}{m_1}\frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{2 m_2 k_1 L\sqrt{k_1}}{k_2\sqrt{m_1}}\frac{\partial^3 U}{\partial \xi^2 \partial \tau} - 3h_1 L^3 U\frac{\partial U}{\partial \xi} \\ + \frac{3h_1 L^5 m_2 k_1}{m_1 k_2}\frac{\partial U}{\partial \xi}\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{3h_1 L^5 m_2 k_1}{m_1 k_2}U\frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} \\ - 3h_1 L^3\left(\frac{m_2 k_1 L^2}{m_1 k_2}\right)^2\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}\frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} - \frac{3h_2}{2L}\left(\frac{m_2 k_1 L^2}{m_1 k_2}\right)^2\left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\right)^2, \end{aligned} \quad (4)$$

где $U = \frac{\partial^2 u_2^{(0)}}{\partial \xi^2}$.

Пусть $\xi/\xi_0 = X, \tau/\tau_0 = T$, а пространственный и временной масштабы выбраны так, чтобы выполнялось равенство $\frac{\xi_0}{\tau_0} = \frac{3h_1 L^3}{2\sqrt{m_1 k_1}\varepsilon}$.

В новых переменных уравнение (4) перепишется в виде

$$\frac{\partial U}{\partial T}+d_1\frac{\partial U}{\partial X}-d_2\frac{\partial^3 U}{\partial X^2\partial T}+U\frac{\partial U}{\partial X}+g_1\frac{\partial U}{\partial X}\left(U\frac{\partial^2 U}{\partial X^2}\right)+g_2\frac{\partial^2 U}{\partial X^2}\frac{\partial^3 U}{\partial X^3}+g_3\left(\frac{\partial U}{\partial X}\right)^2=0, \qquad (5)$$

где $d_1=\frac{m_2k_1}{3m_1h_1L^2}, d_2=\frac{m_2k_1}{\varepsilon 10^2 m_1k_2L}, g_1=-\frac{10^{-2}m_2k_1}{m_1k_2}, g_2=\frac{10^{-4}(m_2k_1)^2}{(m_1k_2)^2}, g_3=\frac{h_2(m_2k_1)^2}{20h_1L^3(m_1k_2)^2}$.

Для длинноволновых процессов $(\xi_0 \sim 10L)$, $g_1, g_2, g_3 \ll 1$ и (10) переходит в известное в нелинейной волновой динамике уравнение Бенджамина-Бона-Махони[18]:

$$\frac{\partial U}{\partial T}+d_1\frac{\partial U}{\partial X}-d_2\frac{\partial^3 U}{\partial X^2\partial T}+U\frac{\partial U}{\partial X}=0. \qquad (6)$$

Пусть в цепочке, описываемой уравнением (6), распространяются три волновых пакета (модулированные квазигармонические волны):

$$U(X,T)=\sum_{n=1}^{N}A_n(\varepsilon X,\varepsilon T)e^{i(\omega_n T-k_nX+\varphi_n^{(0)})}+\text{к.с.}+\varepsilon Q_n, \qquad (7)$$

где A_n – комплексные амплитуды, медленно изменяющиеся во времени и в пространстве; $\varphi_n^{(0)}$ – начальные сдвиги фаз; Q_n – малые добавки.

Несущие частоты пакетов связаны соотношением

$$\omega_3=\omega_1+\omega_2\ , \qquad (8)$$

а волновые числа – соотношением

$$k_3=k_1+k_2 \qquad (9)$$

Подставляя (7) в уравнение динамики (6) и проводя процедуру усреднения по быстрым переменным [19], приходим к системе

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial A_1}{\partial X}+\frac{1}{v_{gr1}}\frac{\partial A_1}{\partial T}=-i\Gamma_1A_3A_2^*,\\
&\frac{\partial A_2}{\partial X}+\frac{1}{v_{gr2}}\frac{\partial A_2}{\partial T}=-i\Gamma_2A_3A_1^*, \qquad (10)\\
&\frac{\partial A_3}{\partial X}+\frac{1}{v_{gr3}}\frac{\partial A_3}{\partial T}=-i\Gamma_3A_1A_2,
\end{aligned}$$

где v_{grj} – групповые скорости. При отсутствии нелинейного взаимодействия ($\Gamma_j=0$) правые части системы (10) исчезнут и каждый волновой пакет распространяется со своей групповой скоростью.

В [20] показано, что в квадратично-нелинейной среде могут сформироваться трехчастотные, параметрически связанные солитоны огибающих. Такие солитоны распространяются с некоторой общей групповой скоростью v_{grc}.

Профили солитонов определяются из системы уравнений

$$v_{c1}\frac{\partial B_{1c}}{\partial \theta_c} = -\Gamma_1 B_{3c} B_{2c},$$
$$v_{c2}\frac{\partial B_{2c}}{\partial \theta_c} = -\Gamma_2 B_{3c} B_{1c}, \qquad (11)$$
$$v_{c3}\frac{\partial B_{3c}}{\partial \theta_c} = \Gamma_3 B_{1c} B_{2c},$$

которая получается из системы (10) при нахождении ее квазистационарных решений. Здесь

$$A_n = (-i)^{n-1} B_{nc}(\theta_c), \quad \theta_c = T - X\big/v_{grc}.$$

Одним из решений системы уравнений (11) является набор из трех квазистационарных профилей амплитуд квазигармонических волн:

$$B_{3c} = \mathrm{E}_{03} th(\theta_c\big/T_c), \quad B_{1c} = \mathrm{E}_{01}\operatorname{sec}h(\theta_c\big/T_c), \; B_{2c} = \mathrm{E}_{02}\operatorname{sec}h(\theta_c\big/T_c). \qquad (12)$$

Амплитуды огибающих, их длительность и групповая скорость связаны соотношениями

$$v_{nc}\mathrm{E}_{0n}^2 = \Gamma_n T_c \mathrm{E}_{01}\mathrm{E}_{02}\mathrm{E}_{03}$$
$$(n = 1,2,3). \qquad (13)$$

Заметим, что дальнейшие обобщения рассматриваемой модели могут быть получены путем учета соударений внешней и внутренней масс цепочки. Подобные задачи рассматривались в работах [21, 22].

Список литературы

1. Буров В.А., Волошинов В.Г., Дмитриев К.В., Поликарпова Н.В. Акустические волны в метаматериалах, кристкаллах и структурах с аномальным преломлением // УФН. - 2011. - Т.181, № 11. - С.1205-1211.
2. Special issue on acoustic metamaterials // J. Acoust. Soc. Am. - 2012. - Vol. 132, No 4. - Pt. 2. - P. 2783-2945.
3. Acoustic metamaterials and phononic crystals / Ed. Deymier P.A. - Berlin: Springer-Verlag, 2013. - 378 p.
4. Acoustic metamaterials: negative refraction, imaging, lensing and cloaking / Eds. Craster R.V., Guenneau S. - Dordrecht: Springer, 2013. - 323 p.
5. Бобровницкий Ю.И. Эффективные параметры и энергия акустических матаматериалов и сред // Акуст. журн. - 2014. - Т. 60, № 2. - С.137-144.
6. Бобровницкий Ю.И. Модели и общие волновые свойства двумерных акустических метаматериалов и сред // Акуст. журн. - 2015. - Т. 61, № 3. - С.283-294.
7. Бобровницкий Ю.И., Томилина Т.М., Лактионов М.М. Дискретная модель акустических метаматериалов с потерями // Акуст. журн. - 2016. - Т. 62, № 1. - С.3-9.
8. Федотовский В.С. Поперечные волны в дисперсном метаматериале со сферическими включениями // Акуст. журн. - 2015. - Т. 61, № 3. - С.311-316.
9. Li J., Chan C.T. Double-negative acoustic metamaterial // Phys. Rev. - 2004. - E 70. - 055602.

10. Fang N., Xi D., Xu J., Ambati M., Srituravanich W., Sun C., Zhang X. Ultrasonic metamaterials with negative modulus // Nat. Mater. - 2006. - Vol. 5. - P. 452–456.
11. Ding Y., Liu Z., Qiu C., Shi J. Metamaterial with simultaneously negative bulk modulus and mass density // Phys. Rev. Lett. - 2007. - Vol. 99. - 093904.
12. Cheng Y., Xu J.Y., Liu X.J. One-dimensional structured ultrasonic metamaterials with simultaneously negative dynamic density and modulus // Phys. Rev. - 2008. - B 77. - 045134.
13. Chan C.T., Li J., Fung K.H. On extending the concept of double negativity to acoustic waves // JZUS. - 2006. - A 7. - P. 24–28.
14. Huang H.H., Sun C.T., Huang G.L. On the negative effective mass density in acoustic metamaterials // Int. J. Eng. Sci. - 2009. - Vol. 47. - P.610-617.
15. Ерофеев В.И., Павлов И.С. Структурное моделирование метаматериалов. - Нижний Новгород: ИПФ РАН, 2019. - 196 с.
16. Ерофеев В.И., Колесов Д.А. Локализованные нелинейные волны деформации в классе метаматериалов, задаваемых как цепочка «масса-в-массе» // Вестник научно-технического развития. - 2018. - № 1 (125). - С.3-12.
17. Erofeev V.I., Kolesov D.A., Malkhanov A.O. Nonlinear localized waves of deformation in the class of metamaterials as set as the mass-in-mass chain // Advanced Structured Materials. - 2019. - Vol. 108. - P.105-116.
18. Селезов И.Т., Корсунский С.В. Нестационарные и нелинейные волны в электропроводящих средах. - Киев: Наукова думка, 1991. - 200 с.
19. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. - М.: Наука, 1984. - 432 с.
20. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. - М.: Наука, Физматлит, 1990. - 432 с.
21. Крупенин В.Л. К описанию процессов прохождения нелинейных волн через машинные конструкции, моделируемые посредством сильно нелинейных сплошных сред сложной структуры (части 1 и 2) // Вестник научно-технического развития. - 2011. - № 6. - С.26-33, № 7. - С.3-16.
22. Крупенин В.Л. Об описании сильно нелинейных виброводящих и виброгенерирующих сред // Проблемы машиностроения и надежности машин. - 2016. - № 4. - С.9-19.

Дата поступления: 17 ноября 2019 г.