DOI: 10.18411/vntr2019-145-2

УДК 534.1

НЕЛИНЕЙНОЕ ЭВОЛЮЦИОННОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ОПИСАНИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПОПЕРЕЧНЫХ ВОЛН В МНОГОСЛОЙНОЙ КОНСТРУКЦИИ

© Владимир Иванович Ерофеев[1], Наталья Игоревна Молодушная[1], Надежда Петровна Семерикова[2]

[1]Институт проблем машиностроения РАН – филиал Федерального государственного бюджетного научного учреждения «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики Российской академии наук» (ИПМ РАН), Нижний Новгород, Россия

[2]Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия

erof.vi@yandex.ru, united-friends@bk.ru, nadezhda.semerikova@yandex.ru

Аннотация. *Рассматривается слоистая конструкция, представляющая собой две струны, лежащие на упругих основаниях Винклера, связанные между собой системой вязких элементов. При этом одна из струн совершает поперечные колебания конечной амплитуды и описывается нелинейным уравнением, динамика второй струны описывается линейным уравнением. Для описания волновых процессов от исходной математической модели произведен переход к эволюционному уравнению, представляющему собой комбинацию нескольких классических уравнений нелинейной волновой динамики (обобщенное уравнение Бюргерса, модифицированное уравнение Кортевега – де Вриза, модифицированное уравнение Островского и др.).*

Ключевые слова: *многослойная конструкция, нелинейность, вязкость, поперечная волна, эволюционное уравнение.*

Работа выполнена в рамках государственного задания ИПФ РАН на проведение фундаментальных научных исследований на 2013-2020 г.г. по теме № 0035-2014-0402, № госрегистрации 01201458047 и при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 18-29-100073-мк, 19-08-00965-а).

NONLINEAR EVOLUTIONARY EQUATION FOR DESCRIPTION OF SPREADING OF TRANSVERSE WAVES IN A MULTILAYER DESIGN

© V.I. Erofeev[1], N.I. Molodushnaya[1], N.P. Semerikova[2]

[1]Mechanical Engineering Research Institute of RAS, Nizhny Novgorod, Russia

[2]National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod, Russia

erof.vi@yandex.ru, united-friends@bk.ru, nadezhda.semerikova@yandex.ru

Abstract. *A layered structure is considered. It consists of two strings lying on the elastic bases of Winkler and interconnected by a system of viscous elements. Moreover, one of the strings performs transverse oscillations of finite amplitude and is described by a nonlinear equation, the dynamics of*

the second string is described by a linear equation. To describe wave processes from the original mathematical model, a transition was made to an evolution equation, which is a combination of several classical nonlinear wave dynamics equations (the generalized Burgers equation, the modified Korteweg – de Vries equation, the modified Ostrovsky equation, etc.).
Keywords: *multilayer construction, nonlinearity, viscosity, shear wave, evolution equation.*

Acknowledgements. *The work was carried out within the Russian state task for conducting fundamental scientific research for 2013-2020 on the topic No. 0035-2014-0402, state registration number 01201458047 and the work was supported by RFBR (projects 18-29-100073, 19-08-00965).*

В работах [1-7] был предложен и теоретически обоснован подход, позволяющий исследовать динамику слоистых элементов конструкций, основанный на применении уточненных моделей стержней и пластин. Было определено, что математическая модель, описывающая продольные колебания двухслойного (составного) стержня, по своим дисперсионным свойствам эквивалентна модели Миндлина-Германа [1]; двухслойная струна, совершающая поперечные колебания, эквивалентна балке Тимошенко с натягом [1]; двухслойная мембрана – пластине Тимошенко с натягом [7].

В работе [2] проведен анализ дисперсионных и диссипативных свойств волн, распространяющихся в двухслойном стержне с вязко-упругой силой контактного взаимодействия.

В [3,4] показано, что в составном стержне могут формироваться нелинейные уединенные стационарные волны, и исследованы особенности их распространения.

В [7] в рамках математической модели двухслойной мембраны с учетом геометрической нелинейности получены и исследованы одномерные и двумерные солитоны, а также представлены (изображены) различные формы нелинейных периодических колебаний.

В публикуемой работе рассмотрена более сложная многослойная конструкция, представляющая собой две струны, лежащие на упругих основаниях Винклера, связанные между собой системой вязких элементов (рис. 1). При этом одна из струн (например, верхняя) совершает поперечные колебания конечной амплитуды и описывается нелинейным уравнением. Динамика второй струны описывается линейным уравнением.

Математическая модель рассматриваемой системы имеет вид:

$$\begin{cases} \rho_1 \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - N_1\left(1+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x}\right)^2\right)\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + Q_1 u_1 + R_1\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial t} - \dfrac{\partial u_2}{\partial t}\right) = 0, \\ \rho_2 \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - N_2 \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + Q_2 u_2 + R_1\left(\dfrac{\partial u_2}{\partial t} - \dfrac{\partial u_1}{\partial t}\right) = 0, \end{cases} \qquad (1)$$

где u_i – поперечные отклонения струн, ρ_i $(i = 1,2)$ – погонные плотности, $N_{1,2}$ – натяжения струн, $Q_{1,2}$ – жесткости упругих оснований, с которыми взаимодействуют струны, R – эквивалентный коэффициент вязкости системы демпферов.

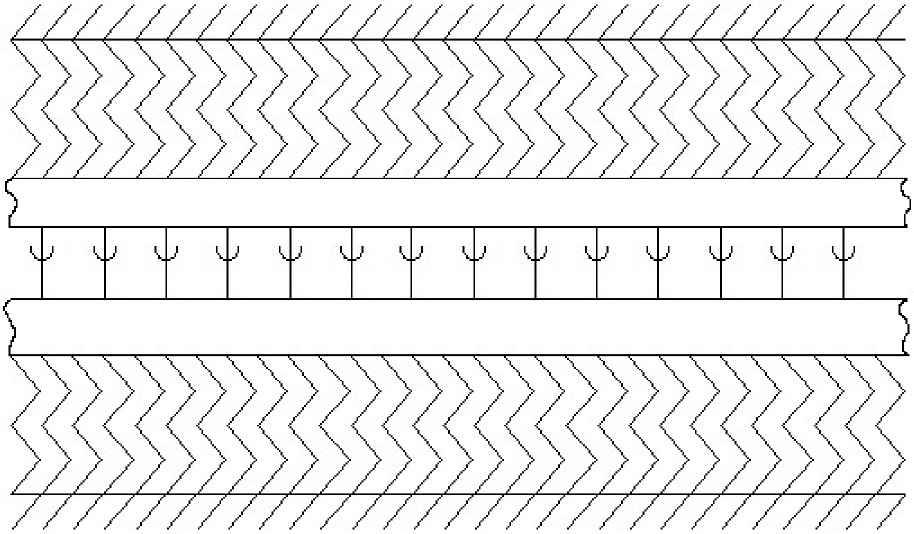

Рис. 1

Система (1) может быть сведена к одному уравнению относительно перемещения одной из струн. Для этого следует выразить из первого уравнения

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = \frac{1}{R_1}\left(\rho_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - N_1\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)^2\right)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + Q_1 u_1 + R_1 \frac{\partial u_1}{\partial t}\right) \tag{2}$$

и соотношение (2) подставить во второе уравнение системы, продифференцированное по времени.

Уравнение динамики, эквивалентное системе (1), имеет вид:

$$\begin{gathered}
\left(1 + \frac{\rho_1 Q_2}{\rho_2 Q_1}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{N_1 Q_2 + N_2 Q_1}{\rho_2 Q_1}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{R_1}{\rho_2 Q_1}\left((\rho_1 + \rho_2)\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} - (N_1 + N_2)\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t}\right) + \\
+ \frac{\rho_1}{Q_1}\frac{\partial^4 u}{\partial t^4} + \frac{N_1 N_2}{\rho_2 Q_1}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{N_1 \rho_2 + N_2 \rho_1}{\rho_2 Q_1}\frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x^2} - \\
- \frac{N_1}{2Q_1}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 6\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\right)^2\right) + \\
+ \frac{N_1 N_2}{2\rho_2 Q_1}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 6\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial x} + 2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^3\right) - \frac{N_1 Q_2}{2\rho_2 Q_1}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \\
+ \frac{Q_2}{\rho_2}u + \frac{(Q_1 + Q_2)R_1}{\rho_2 Q_1}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{N_1 R_1}{2\rho_2 Q_1}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0
\end{gathered} \tag{3}$$

Здесь $u = u_1(x, t)$.

Перейдем в уравнении (3) к безразмерным переменным

$U = u/u_0$; $y = x/X$; $\tau = t/T$, введя обозначения $X = \Lambda;\ T^2 = \Lambda^2\rho_2 Q_1\gamma/D$, $D = N_1Q_2 + N_2Q_1$, $\gamma = \left(1+\frac{\rho_1Q_2}{\rho_2Q_1}\right)$, где u_0 – перемещение, Λ – длина волны, удовлетворяющие соотношению $u_0/\Lambda = 10^{-4}$, T – период волны и пренебрегая величинами, в которых степень отношения u_0/Λ выше 4, получим:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\tau^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{(\rho_1+\rho_2)R_1\sqrt{D}}{(\rho_2Q_1)^{3/2}\Lambda\gamma^{3/2}}\frac{\partial^3 U}{\partial\tau^3} - \frac{(N_1+N_2)R_1}{\Lambda\sqrt{\rho_2Q_1\gamma D}}\frac{\partial^3 U}{\partial y^2\partial\tau} + \frac{\rho_1 D}{\rho_2Q_1^2\Lambda^2\gamma^2}\frac{\partial^4 U}{\partial\tau^4} + \frac{N_1N_2}{\Lambda^2 D}\frac{\partial^4 U}{\partial y^4} -$$
$$- \frac{N_1\rho_2 + N_2\rho_1}{\rho_2Q_1\gamma\Lambda^2}\frac{\partial^4 U}{\partial y^2\partial\tau^2} - \frac{N_1Q_2}{2D}\frac{u_0^2}{\Lambda^2}\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \frac{Q_1Q_2\Lambda^2}{D}U + \frac{(Q_1+Q_2)R_1\Lambda}{\sqrt{\rho_2Q_1\gamma D}}\frac{\partial U}{\partial\tau} \tag{4}$$
$$- \frac{N_1R_1}{\sqrt{\rho_2Q_1\gamma D}}\frac{u_0^2}{\Lambda^3}\left\{\frac{\partial^3 U}{\partial y^2\partial\tau}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial^2 U}{\partial y\partial\tau}\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\frac{\partial U}{\partial y}\right\} = 0$$

Перейдем в (4) в систему координат $\xi = y - c\tau;\ \eta = \varepsilon y$, где c=const – скорость волны, заранее не известная, ε – малый параметр, характеризующий отношение максимальной амплитуды перемещения к длине волны. Выбор переменных объясняется тем, что возмущение, распространяясь со скоростью c вдоль оси y, медленно эволюционирует из-за нелинейности и дисперсии.

Представим перемещение в виде разложения в ряд по степеням малого параметра $U = U_0 + \varepsilon U_1 + \ldots$

Нулевое приближение по малому параметру позволит определить значение скорости: $c=1$. Первое приближение приведет (4) к эволюционному уравнению:

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{\partial W}{\partial\eta} + \Gamma\frac{\partial^3 W}{\partial\xi^3} + B\frac{\partial^2 W}{\partial\xi^2} + GW^2\frac{\partial W}{\partial\xi} + ZW + M\left(W^2\frac{\partial^2 W}{\partial\xi^2} + 2W\left(\frac{\partial W}{\partial\xi}\right)^2\right)\right] - HW = 0 \tag{5}$$

где $\frac{\partial U_0}{\partial\xi} = W$,

$$\Gamma = -\frac{1}{2\varepsilon}\left[\frac{\rho_1 D}{\rho_2Q_1^2\Lambda^2\gamma^2} + \frac{N_1N_2}{\Lambda^2 D} - \frac{N_1\rho_2 + N_2\rho_1}{\rho_2Q_1\gamma\Lambda^2}\right], G = \frac{N_1Q_2}{4\varepsilon D}\frac{u_0^2}{\Lambda^2},\ Z = \frac{(Q_1+Q_2)R_1\Lambda}{2\varepsilon\sqrt{\rho_2Q_1\gamma D}}$$
$$B = -\frac{1}{2\varepsilon}\left[\frac{(N_1+N_2)R_1}{\Lambda\sqrt{\rho_2Q_1\gamma D}} - \frac{(\rho_1+\rho_2)R_1\sqrt{D}}{(\rho_2Q_1)^{3/2}\Lambda\gamma^{3/2}}\right], M = -\frac{N_1R_1}{4\varepsilon\sqrt{\rho_2Q_1\gamma D}}\frac{u_0^2}{\Lambda^3},\ H = \frac{Q_1Q_2\Lambda^2}{2\varepsilon D}$$

Уравнение (5) представляет собой комбинацию нескольких классических уравнений нелинейной волновой динамики.

При Г = 0, Z = 0, M = 0, H = 0 уравнение (5) вырождается в обобщенное уравнение Бюргерса, имеющее точное аналитическое решение в виде локализованной волны – кинка [8].

При B = 0, Z = 0, M = 0, H = 0 – в модифицированное уравнение Кортевега – де Вриза, имеющее точное аналитическое решение в виде уединенной стационарной волны – солитона [9, 10].

При B = 0, Z = 0, M = 0 – в модифицированное уравнение Островского [11-15].

Заметим, что развитие многослойных систем с сочетанием возможностей управления играет важную роль для контроля нежелательных вибраций и предотвращения резонансного явления из-за внешних нарушений в системе. Эта проблема может быть решена путем применения новой многослойной структуры, включающей «умные жидкости», такие как магнитореологическая жидкость.

Результаты экспериментального исследования эффекта демпфирования в полуактивной магнитореологической жидкости многослойной конструкции под неоднородным магнитным полем были представлены в работе Ш. Колекара и К. Венкатеш [16].

Структурные элементы магнитореологической жидкости состоят из защитных слоев, которые обеспечивают структурную целостность и могут также служить в качестве поверхностей магнитных полюсов. Эти защитные слои обычно параллельны и создают пустоту или область, которая используется для удержания магнитореологической жидкости. Эти параллельные защитные слои отделены друг от друга магнитно-изоляционными защитными слоями, чтобы магнитное поле могло пройти через содержащуюся магнитореологическую жидкость. Магнитное поле генерируется с помощью постоянного магнита или электромагнита. Изменение магнитного поля обеспечивает необходимый контроль для выбора желаемых свойств магнитореологической жидкости и, следовательно, механического поведения структуры. Несколько структурных элементов могут быть расположены в последовательной конфигурации и в вышележащей конфигурации, чтобы обеспечить управляемые пластинки, или сконфигурированы в смежном положении, чтобы обеспечить региональное или шаблонное управление жесткостью и демпфированием композитной структуры [17].

Список литературы

1. Архипова Н.И., Ерофеев В.И., Семерикова Н.П. Описание распространения упругих волн в слоистых элементах конструкций с помощью уточненных стержневых моделей // Вестник Нижегородского университета им Н.И. Лобачевского. - 2011. - №4. - С. 130-133.
2. Архипова Н.И., Ерофеев В.И., Кажаев В.В., Семерикова Н.П. Распространение продольных волн в составном вязко-упругом стержне // Приволжский научный журнал. - 2013. - №3. - С.18-23.
3. Архипова Н.И., Ерофеев В.И., Миклашевич И.А., Сандалов В.М. Уединенные волны деформации в составном нелинейно-упругом стержне // Приволжский научный журнал. - 2013. - №4. - С.19-23.
4. N.I.Arkhipova, V.I.Erofeev Solitary strain waves in the composite nonlinear elastic rod // Informatics, Networking and Intelligent Computing - Zhang (Ed.), 2015 Taylor & Francis Group, London, ISBN: 978-1-138-02678-0. p.225-226
5. Архипова Н.И., Ерофеев В.И. Уточненные стержневые модели в задачах о распространении упругих волн в слоистых элементах конструкций // Механика наноструктурированных материалов и систем. Сборник трудов 2-й Всероссийской научной конференции в 3-х томах. Том 1. Москва, 17-19 декабря 2013г. - М.: ИПРИМ РАН, 2013. - С. 6-19.
6. Архипова Н.И., Ерофеев,В.И., Сандалов В.М. Уточненные модели в задачах о распространении упругих волн в слоистых элементах конструкций //Вестник научно-технического развития. - 2014. - №12(88). - С.3-16.

7. Ерофеев В. И., Архипова Н.И. Упругие волны в двумерных слоистых конструкциях // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. - 2016. - № 1; URL: mathmod.esrae.ru/1-5.
8. Селезов И.Т., Корсунский С.В. Нестационарные и нелинейные волны в электропроводящих средах. - Киев: Наукова думка, 1991. - 200 с.
9. Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи. - М.: Мир, 1987. - 480 с.
10. Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. - М.: Мир, 1988. - 694 с.
11. Островский Л.А. Нелинейные внутренние волны во вращающемся океане // Океанология. - 1978. – Т. 18, №2. – С. 181-191.
12. Островский Л.А., Степанянц Ю.А. Нелинейные волны во вращающейся жидкости // Нелинейные волны: физика и астрофизика. – М.: Наука, 1993. – С.132-153.
13. Гандариас М.Л., Брузон М.С. Симметрийный анализ и точные решения для некоторых уравнений Островского // Теоретическая и математическая физика. - 2011. – Т. 168, № 1. – С. 49-64.
14. Stepanyants Y.A. On stationary solutions of the reduced Ostrovsky equation: Periodic waves, compactons and compound solitons // Chaos, Solitons and Fractals. - 2006. – Vol. 28. – P. 193-204.
15. Ерофеев В.И., Колесов Д.А., Леонтьева А.В. Нелинейные периодические волны в гибкой направляющей, взаимодействующей с упруго-инерционным основанием // Вестник научно-технического развития. - 2018. - № 5(129). - С.11-18.
16. Kolekar S., Venkatesh K. Experimental investigation of damping effect in semiactive magnetorheological fluid sandwich beam under nonhomogeneous magnetic field // Journal of Vibration Engineering and Technologies. - 2019. - Vol. 7, No 2. - P.107-116.
17. Weiss KD, Duclos TG, Chrzan MJ et al. Magnetorheological fluid composite structures. US Patent specification 5547049 (1996).

Дата поступления: 12 сентября 2019 г.