DOI: 10.18411/vntr2019-144-5

О МОДЕЛИРОВАНИИ ВИБРАЦИОННЫХ ПОЛЕЙ В МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ СО МНОЖЕСТВЕННЫМИ СОУДАРЕНИЯМИ ЭЛЕМЕНТОВ

© **Виталий Львович Крупенин**
ИМАШ РАН, Москва, Россия
krupeninster@gmail.com

Аннотация. *Описан подкласс механических систем, анализ которых даёт возможность получить представления о распространении и генерировании широкополосных вибрационных полей в машиностроительных конструкциях с большим числом ударных пар. Рассмотрены необходимые модели сильно нелинейных сред со сложной структурой, которые можно отнести к группе «несущая конструкция плюс амортизированное оборудование, содержащее ударные пары». Модели дают также возможность рассмотреть немгновенные соударения. Приводятся определяющие уравнения движения и структуры моделей.*

Ключевые слова: *структурные элементы среды, волновод, ударная пара, виброударная система, уравнение Ламе, оснащённый стержень.*

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ № 19-19-00065.

ON MODELING VIBRATION FIELDS IN MECHANICAL SYSTEMS WITH MULTIPLE COLLISIONS OF ELEMENTS

© Vitaly L. Krupenin
IMASH RAN, Moscow, Russia
krupeninster@gmail.com

Annotation. *A subclass of mechanical systems is described, the analysis of which makes it possible to get an idea of the propagation and generation of broadband vibration fields in engineering structures with a large number of impact pairs. The necessary models of highly nonlinear media with a complex structure, which can be attributed to the group "supporting structure plus depreciated equipment containing shock pairs", are considered. Models also provide an opportunity to consider non-instantaneous collisions. The governing equations of motion and the structure of the models are given.*

Keywords: *structural elements of the medium, waveguide, shock pair, vibro-impact system, Lame equation, equipped rod.*

Acknowledgements. *This work was supported by the grant of the Russian Science Foundation No. 19-19-00065.*

1.Введение. В машинных конструкциях вибрация передается от точки к точке посредством волноводов (виброводов) [1–2] - сред, в которых упругие волны из-за наличия ограничивающих поверхностей распространяются в направлениях, зависящих только от конструктивных особенностей вибропроводящего объекта и от характера взаимодействия элементов конструкций между собой.

Разработанные в последнее время представления о метаматериалах, а также методы акустической динамики машин и, включающие в себя, в частности, методы анализа особенностей распространения вибрации и борьбы с нею, основаны по большей части на предположении о линейности волноводов или их слабой нелинейности. Однако, появление в волноводе хотя бы одного разрыва [3, 4], приводящего к соударениям элементов его конструкции, вызывает существенное изменение динамических качеств системы в целом и вибропроводящая среда одновременно оказывается и виброгенерирущей.

То же происходит и в случае, когда соударяются элементы, непосредственно связанны с волноводом. Если подобные («паразитные») ударные пары редки и от точек ударов до точек наблюдения волновод линеен, то генерируемая широкополосная вибрация после прохождения через реально присутствующие механические фильтры может рассматриваться как некий высокочастотный шум малой интенсивности. При наличии же большего числа ударных пар, каким-либо образом присоединенных к волноводу и непосредственно связанных с процессом передачи вибрации, упругая передающая среда из линейной превращается в сильно нелинейную. В этом случае использование традиционных методов расчета - проблематично.

В работе [1] рассмотрены, в частности, линейные (или близкие к таковым) специфические модели сплошных сред сложной структуры. Одной из особенностей этих моделей, оказывается наличие двух своеобразных "частей среды" - "несущей" и "присоединенной". Соответственно уравнения динамики таких сред состоят из двух групп уравнений. Первая - описывает несущую часть, вторая - присоединенную. Как и во всякой модели мультиполярной механики здесь существенной ревизии подвергается понятие точки, состояние которой может определятся произвольным числом кинематических параметров.

Указанный подход, наряду с другими, получил, принципиальное развитие в диссертации [5] и далее.

В работах [6 - 9] рассмотрены сильно нелинейные модели подобных сред, в которых для учета множественных соударений в компонентах присоединенного оборудования использовались распределенные ударные элементы. Такие модели позволяют дать описание процесса формирования, а также и распространения вибрационных полей в сложных составных конструкциях. Кроме того, указанные модели дают возможность получить ряд расчетных формул и значимых определяющих соотношений.

Необходимость обращения к ним диктуется, прежде всего, тем обстоятельством, что в машинных конструкциях именно множественные систематические соударения элементов подсистем часто "ответственны" за вид формируемых глобальных виброполей и за виброактивность конструкций в целом.

2. Структура уравнений движения. Возвращаясь к упомянутым двум группам уравнений движения, во-первых, следуя книге [1], постулируем существование упругой (упруго-вязкой) несущей среды. То есть модель необходимо содержит уравнения движения несущих частей (примеры: классическое уравнение Ламе, уравнение продольных или поперечных колебаний пластин, оболочек, мембран, балок, стержней, и т. д.), к которым добавляются граничные условия.

Модели несущих частей могут быть разных типов, хотя и описывать одни и те же объекты. Например, при рассмотрении стержней и балок можно рассматривать модели технической теории или какие-либо «уточненные» модели, такие, например, как модели типа балки Тимошенко. Это замечание, естественно, касается и двумерных систем.

Во-вторых, в предположении, что соударения как бы "размазаны" по некоторой пространственной области, к уравнениям несущих частей добавляются уравнения движения присоединенного оборудования.

Механизм связности, обеих частей определяет глобальную структуру генерируемого вибрационного поля.

Итак, постулируется существование некоторой упругой-диссипативной несущей среды, описываемой вектором перемещений $u(x,t)$ $(u,\ x\in\mathbf{R}^3,\ x\in\Xi\subseteq\mathbf{R}^3;\ t\in\mathbf{R})$, подчиняющейся классическому уравнению Ламе с диссипативным членом (ср.[1, 9])

$$\rho u_{tt}=(\lambda+\mu)\ \mathrm{grad}\ \mathrm{div}u+\mu\boldsymbol{\Delta}u+\mathbf{D}[u]+F, \qquad (1)$$

где ρ- плотность среды, λ, μ – параметры Ламе, характеризующие ее упругие свойства, Ξ - область изменения векторной координаты x; $\boldsymbol{\Delta}$ – лапласиан; $\mathbf{D}[\ldots]$ – оператор, отвечающий диссипативным потерям.

Пусть внешние (объемные и поверхностные) силы $F=F_1+F_0$, где F_1 - заданный вектор, а F_0 – воздействие присоединенных систем, содержащих ударные пары.

Отметим, что, вообще говоря, модель несущей среды может сама по себе иметь сложную структуру, так что уравнение (1) может быть заменено более общим. К уравнению (1) должны быть поставлены граничные условия.

Пусть присоединённое оборудование – упруго амортизировано:

$$F_0(x,\ t) = -c_1(x)[u(x,\ t)-y_1^{(I)}(x,\ t)] - c_2(x)\ [u(x,\ t)-y_1^{(II)}(x,\ t)] \qquad (2)$$

где предполагается, что в каждой точке среды подвешена взаимодействующая (ударная) пара, состоящая из двух контактирующих линейных стационарных склерономных подсистем $\mathbf{A}^{(I)}(x)$ и $\mathbf{A}^{(II)}(x)$, каждая из которых описывается конечным набором функций $y_j^{(I,II)}(x,t)$; $j=1, 2,..,N$.

Предположение об одинаковом числе степеней свободы обеих подсистем, очевидно, сделано для удобства: лишние степени свободы могут быть фиктивными.

Точки подвеса были обозначены в (2) $y_1^{(I,II)}(x,t)$; точки контакта будем обозначать $y_n^{(I,II)}(x,t)$, $n\le N$. Предположим, что подсистемы $\mathbf{A}^{(I,II)}(x)$ определяются семействами распределенных операторов динамической податливости: $L_{qk}^{(I,II)}(x;p)=O(p^{-2})$, $p\to\infty$; индексы q и k изменяются от 1 до N; $p=\partial/\partial t$, $x,z\in\Xi$.

Будем предполагать, что взаимодействие в каждом элементе – прямое, центральное и одномерное: пусть $y^0=y_n^{(II)}-y_n^{(I)}$ - относительное сближение точек контакта; координата y^0 изменяется вдоль некоторой оси. Сила взаимодействия

$$\Phi_1(y^0,y_t^0)=\lambda\Phi(y^0)+\Phi_2(y^0,y_t^0);\ \lambda>>1$$

– большой параметр [10]. Здесь первый член в правой части определяет упругую составляющую силы взаимодействия, а второй – диссипативную. Функция Φ_1 и определяет гипотезу, вообще говоря, немгновенного (неньютоновского) удара; она может и непосредственно зависеть от x, так как характер взаимодействия может меняться от точки к точке.

Предположим, что функция Ф является пороговой функцией [6, 10]:

$$\Phi(y^0) \in \{\Phi\}_\Delta \equiv \{\Phi(y^0);\ \Phi(y^0) = \psi(y^0 - \Delta)\eta(y^0 - \Delta);\ \Delta \ge 0;\ \psi(y^0) \equiv 0;\ y^0 \ge 0\},$$

где $\psi(u)$ - непрерывно дифференцируема на всей числовой оси, монотонно возрастает и является выпуклой при $u \ge 0$; $\eta(u)$ – единичная функция. В случае отказа от концепции ньютоновского взаимодействия, диссипативная составляющая Φ_2 также описывается некоторой пороговой функцией. Методы анализа таких систем изложены в [6 - 11].

Для точек подвеса и взаимодействия имеем операторные уравнения:

$$y_1^{(\mathrm{I,II})} = L_{11}^{(\mathrm{I,II})}(p)c_{1,2}(x)u \pm L_{n1}^{(\mathrm{I,II})}(p)\Phi_1(y^0, y_t^0) + f_1^{(I,II)}, \qquad (3)$$

$$y_1^{(\mathrm{I,II})} = L_{nn}^{(\mathrm{I,II})}(p)c_{1,2}(x)u \pm L_{nn}^{(\mathrm{I,II})}(p)\Phi_1(y^0, y_t^0) + f_n^{(I,II)}, \qquad (4)$$

причем здесь для системы $A^{(\mathrm{I})}$ в (3) и (4) выбираем знак "плюс", для $A^{(\mathrm{II})}$ - "минус".

В эти же уравнения могут быть внесены какие-либо члены, описывающие дополнительные внешние воздействия.

3. Примеры структур моделей. Предложенная выше модель достаточна обща и сложна для анализа, поэтому нуждается в конкретизации и упрощениях. Приведем примеры более реалистичных моделей такого рода [9].

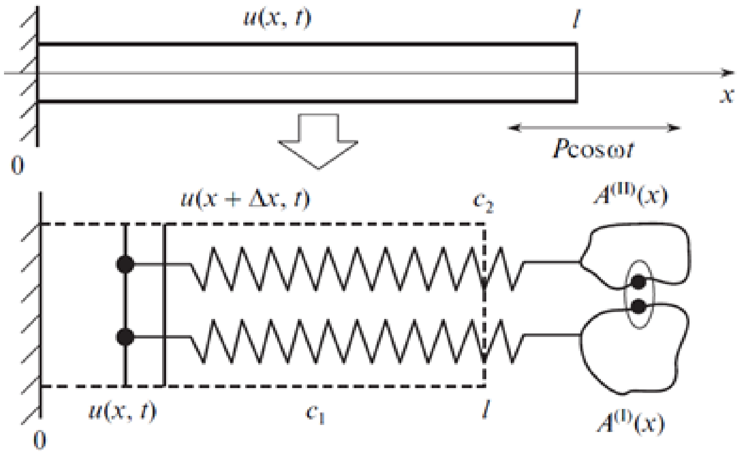

Рис. 1. Модель одномерной вибропроводящей среды типа «оснащённый стержень

На рис.1 дана модель одномерного волновода типа «оснащенный стержень». Здесь в каждой точке x продольно колеблющегося стержня помещена ударная пара общего вида, состоящая из двух соударяющихся подсистем $\mathbf{A}^{(\mathrm{I})}(x)$ и $\mathbf{A}^{(\mathrm{II})}(x)$.

На рис. 2, а показана модель двумерного оснащенного волновода. В качестве несущей части выбрана двумерная струнная решетка (в длинноволновом приближении - мембрана). Амортизированное оборудование – система ударных осцилляторов, взаимодействующих с жесткими буферами.

На рис. 2, б показана цепочка связанных механизмов виброударного действия. Модель сильно нелинейного волновода с внутренними разрывами дана на рис. 2, в.

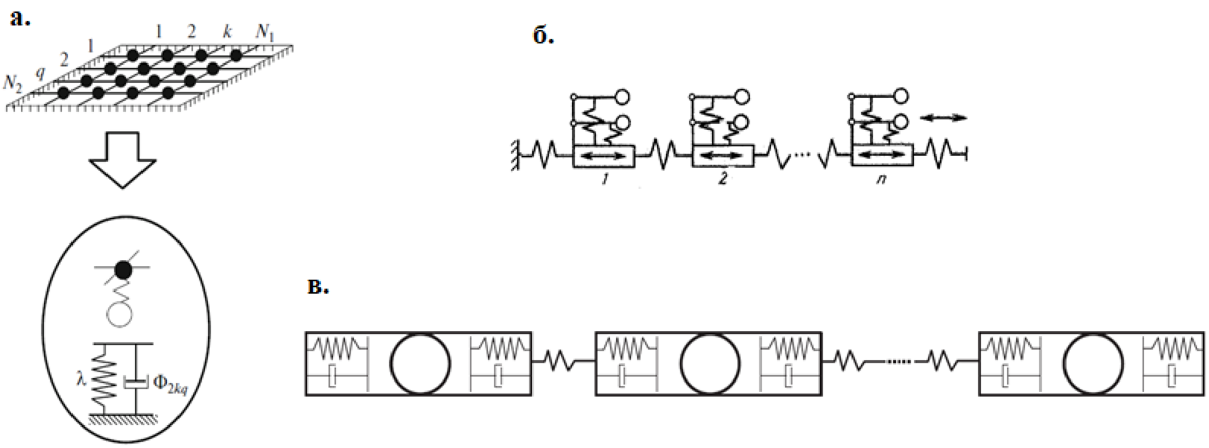

Рис. 2. Динамические модели объектов со сложной структурой.

4. О результатах анализа. В настоящее время наиболее хорошо изучены модели вибропроводящих/ виброгенерирующих одномерных сред со сложной структурой. Имеется, впрочем, и ряд конкретных результатов и для случаев многомерных сред (двумерных и трёхмерных). Указанные результаты сводятся, в основном к следующему.

При прохождении синусоидальной периодической вибрации через сильно нелинейные вибропроводящие/виброгенерирущие среды, она преобразуются в широкополосный виброударный процесс, обладающий представительным спектром значимых гармоник с частотами, отвечающими основному тону, а также частотам субгармонических, ультрагармонических и комбинационных резонансных режимов.

Наряду с такими процессами, возникают условия, приводящие к стохастизации вибрации, а также, при определённых условиях, к появлению почти периодического виброударного процесса [4].

В виброводе образуются зоны пространственной локализации интенсивных резонансных режимов, обладающих характерными свойствами: затягивание по частоте, затягивание по амплитуде, «внезапный» срыв, явление жёсткого запуска и др. [3, 5]).

Расположение этих зон определяется, во-первых, собственными свойствами виброводов и структурой спектров собственных частот линейных частей систем. Основной тон колебаний является доминирующим. Данные зоны оказываются зонами «прозрачности» для основного тона колебаний.

В точках, находящихся вне указанных зон, действующая вибрация источника воспринимается как высокочастотные осцилляции, относительно малой интенсивности. Указанные точки образуют зоны «запрета» для вибрации с основной частотой.

В зонах первого типа упруго связанные системы, как правило, моделирующие какое-либо амортизированное оборудование и содержащие соударяющиеся элементы, действуют на глобальное виброполе, как «усилители» основного тона, в зонах второго типа – как динамические (в данном случае - ударные) гасители колебаний. Описываемые зоны получили название динамических.

Зоны локализации интенсивных соударений второго типа возникают вследствие влияния диссипативных факторов в тех или иных элементах конструкции вибровода. Эти зоны называют диссипативными.

Они появляются вследствие срыва резонансных виброударных процессов в результате действия демпфирующих факторов. Результирующая структура глобального виброполя определяется как общая часть динамических и диссипативных зон.

5. Модели с простой структурой. Свойства виброполей, формирующихся в результате прохождения вибрации через изолированные ударные пары изучаются, например, в одномерном случае при помощи моделей, показанных на рис. 2 и аналогичных.
На рис.2, *а* показана модель продольно колеблющегося стержня с включением в виде так называемого ударного осциллятора.
На рис.2, *б* взята струнная вибропроводящая системы с двумя изолированными осцилляторами. Синусоидальная волна, распространяющаяся в таком вибропроводящей среде, преобразуется в полигармоническую. Уравнение, определяющее указанную волну $w(x,t)$ имеет структуру:

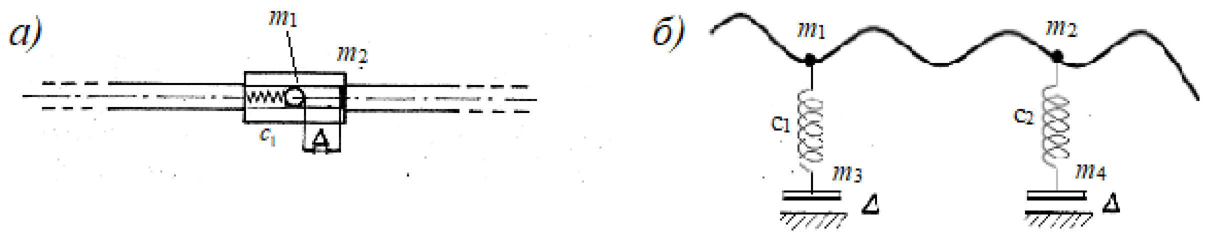

Рис.3. Модели с изолированными ударными парами.

$$w(x,t) = L(i\omega, y, x)[g(y,t) - \sum \Phi_q \delta(y - x_q)], \tag{5}$$

где $L(i\omega, y, x)$ - динамическая податливость распределённой системы; g - внешние нагрузки; силы удара, сосредоточенные в точках $\{x_q\}$; суммирование ведётся по всем включённым изолированным ударным парам.
Для системы рис.2, *а* сила удара зависит от относительной координаты и сюда должно быть добавлено уравнение движения ударного осциллятора.
Уравнение (5) выписывается для каждой конкретной системы и анализируется методами частотного или частотно-временного анализа [10, 14] и численно [12]. Для системы рис.3, *а* найдены условия существования различных типов движения. Показано, что при определённых значениях конструктивных параметров, в проходящей волне может быть подавлен основной тон колебаний.
Интересное явление было обнаружено при анализе системы типа показанной на рис.3, *б* волна при выполнении некоторых ограничений на значения масс, упругостей, зазоров и расположение включений волна может свободно распространятся только в одном направлении – явление «волнового диода».

6.Заключение. Методы исследования показанных моделей – весьма разнообразны. При учёте в модели большого числа факторов и (или) высокой размерности системы, исследования, естественно, возможны лишь с использованием численных процедур [12 и др.]. Системы относительно невысокой размерности могут с успехом анализироваться при помощи методов частотно-временного анализа виброударных процессов [10], а также гибридных численно-аналитических методик.

Анализ рассмотренных систем должен дать информацию о спектральном составе вибрационных полей, общих картинах стоячих или распространяющихся волн, а также многочисленных динамических явлениях, свойственных данному классу сильно нелинейных систем.

Список литературы

1. В. А. Пальмов. Колебания упруго-пластических тел.- М.: Наука, 1976. - 328 с.
2. И. И. Артоболевский, Ю. И. Бобровницкий, М. Д Генкин Введение в акустическую динамику машин. - М.: Наука, 1979. - 296 с.
3. В. К. Асташев, В. Л. Крупенин Волны в распределенных и дискретных виброударных системах, и сильно нелинейных средах // Проблемы машиностроения и надежности машин. - 1998. - № 5. - С. 13-30.
4. В. Л. Крупенин Распространение виброударных процессов в конструкциях// Проблемы машиностроения и надежности машин. - 2018. - № 2. - С. 11-19.
5. Беляев А.К. Высокочастотная динамика сложных инженерных конструкций: дис....доктора физ.-мат. наук. - СПб.: 2001. - 232 с
6. В. Л. Крупенин. К теории сильно нелинейных виброводов // Машиноведение. - 1987. - N 1. - С.25-32.
7. В. Л. Крупенин Модель сильно нелинейной вибропроводящей среды с распределенным ударным элементом// ДАН. - 1995. - Т. 343, №6. - С. 759-763.
8. В. Л. Крупенин К описанию процессов прохождения нелинейных волн через машинные конструкции, моделируемые посредством сильно нелинейных сплошных сред сложной структуры (части 1, 2)// Вестник научно-технического развития. – 2011. - №№6, 7. - С.26-33; с.3-16
9. В. Л. Крупенин. Об описании сильно нелинейных вибропроводящих и виброгенерирующих сред // Проблемы машиностроения и надежности машин. - 2016. - № 4. - С. 9-19.
10. Бабицкий В.И., Крупенин В.Л. Колебания в сильно нелинейных системах. - М.: Наука, 1985. – 384 с.
11. В. Л. Крупенин Анализ сингуляризированных уравнений движения решетчатых виброударных 2D-систем при отказе от гипотезы Ньютона// Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2016. - № 2. - С. 13-22.
12. Б. Ф. Шорр, Г. В. Мельникова Расчёт конструкций методом прямого математического моделирования. - М.: Машиностроение, 1988. - 160 с.
13. Бурд В. Ш., Крупенин В. Л. Усреднение в квазиконсервативных системах. - М.: Белый Ветер, 2016. - 172 с.
14. Асташев В.К., Крупенин В.Л. Нелинейная динамика ультразвуковых технологических процессов. - М.: МГУП им. Ивана Федорова, 2016. - 372 с.

Дата поступления: 19 июля 2019 г.