

УДК 534.1, 621.1

ДИНАМИЧЕСКИ-САМОПОДОБНАЯ ТРИХОТОМИЧЕСКАЯ РЕШЕТКА КАК ЧАСТОТНЫЙ ФИЛЬТР

Людмила Яковлевна Банах

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт машиноведения
им. А.А. Благонравова Российской академии наук, Москва, Россия

banl@inbox.ru

Аннотация. Рассматриваются трихотомические решетки, когда каждый элемент в каждом последующем ряду разделяется на три самоподобных повторяющихся в некотором масштабе динамические параметры предыдущих. Получены аналитические условия статического и динамического самоподобия решетки. Доказано, что динамически-самоподобная решетка является полосовым частотным фильтром, и ее полоса пропускания зависит от коэффициента подобия. Показано также, что в решетке имеются кратные собственные частоты, равные парциальной частоте образующего элемента.

Ключевые слова: динамический фрактал, решетка, коэффициент подобия, парциальная частота, полоса пропускания.

THE DYNAMIC-SELSIMILAR TRICHOTOMOUS LATTICE AS A FREQUENCY FILTER

L.Ya. Banakh

Blagonravov Mechanical Engineering Research Institute of RAS, Moscow, Russia

banl@inbox.ru

Abstract. We consider the thrichotomous lattices, when each element in the each subsequent series is divided into three self-similar repeating the structure of the previous one at the some scale. The analytical conditions for the static and dynamic self-similarity of the lattice are obtained. It is proved that the dynamic-selfsimilar lattice is a bandpass filter, and its bandwidth depends on the similarity coefficient. It is also shown that the lattice has multiple natural frequencies equal to the partial frequency of the generating element.

Keywords: dynamic fractal, lattice, similarity coefficient, partial frequency, bandwidth.

Постановка задачи. В природе и технике широкий класс систем составляют структуры, в которых каждая ячейка в определенном масштабе повторяет структуру предыдущей; это один из видов фракталов. К таким структурам (фракталам) относятся «самоподобные структуры, состоящие из частей, которые в каком-то смысле подобны целому» [1]. Самоподобие можно рассматривать как системную связь локального и глобального порядка. Однако, в механических системах основное значение приобретают их статические и динамические свойства, и изучению динамически-самоподобных структур (динамических

фракталов) посвящена настоящая работа. В качестве наиболее распространенных в механике динамических фракталов можно указать, например, стержень со ступенчато изменяющимся сечением, вал с дисками, параметры которого меняются по участкам, коническая оболочка с оребрением, коленчатые валы (винтовая симметрия), конические пружины и т.п. Широко распространены в технических и природных системах также ветвящиеся структуры: это дыхательные пути, кровеносная система человека, кроны деревьев, в технике – системы трубопроводов, фрактальные антенны. Ветвящиеся структуры трубопроводов были исследованы Ф.Л. Черноусько [2]. Он рассмотрел систему трубопровода в виде дихотомического дерева, а также систему стержней. Такие структуры обладают определенными свойствами оптимальности: полное гидравлическое сопротивление трубопровода минимально при заданном объеме, кроме того, он обеспечивает доставку транспортируемой жидкости в сколь угодно малую окрестность точки ветвления.

Ранее нами были детально исследованы статические и динамические свойства однонаправленных динамически-самоподобных цепных структур, таких, как стержни и балки ступенчатого сечения [3-5], а также ветвящиеся структуры - дихотомические решетки. Показано, что основным динамическим свойством таких структур является то, что они представляют собой полосовой частотный фильтр. При статическом нагружении найдены условия равного напряженного состояния каждого элемента структуры. В данной статье изучены статические и динамические свойства разветвленных динамических фракталов типа трихотомических решеток, в которых каждый элемент в каждом последующем ряду разделяется на три, повторяющих в некотором масштабе динамические параметры предыдущих.

Трихотомическая фрактальная решетка. На рис.1 представлена динамическая модель трихотомической решетки, а также приведены примеры природных трихотомических структур. Такие структуры могут быть образованы из элементов различной физической природы: механических, электрических, гидравлических (рис. 1в). Анализ динамики таких структур при использовании системы динамических аналогий [6] совершенно идентичен.

Статические свойства трихотомической решетки.

Определение. Статически-самоподобными назовем структуры, в которых упругие параметры меняются с одинаковым масштабом γ для каждого ряда

$$k_s = \gamma k_{s-1} = \gamma^s k_0 = e^{\alpha s} k_0 \quad (s = 1 \dots N) \quad (1)$$

Это условие, как будет видно из дальнейшего изложения, в ряде случаев совпадает с условием геометрического самоподобия (фрактальности). Но в общем случае оно слабее условия геометрического самоподобия, так как при выполнении (1) некоторые параметры могут оставаться постоянными [4].

Рассмотрим вертикальные статические перемещения трихотомической решетки (рис.1). Пусть на верхнюю массу действует статическая нагрузка P . В каждом s -ом ряду трихотомической решетки находится 3^{s-1} упругих элементов, жесткость которых равна

$k_s = k_0 / \gamma^s$, суммарная жесткость в s -ом ряду равна $\frac{k_0}{3} (3/\gamma)^s$. Статическое смещение

упругого элемента при статической нагрузке: $\Delta_{scm} = \frac{3P}{k_0} \left(\frac{\gamma}{3}\right)^s$.

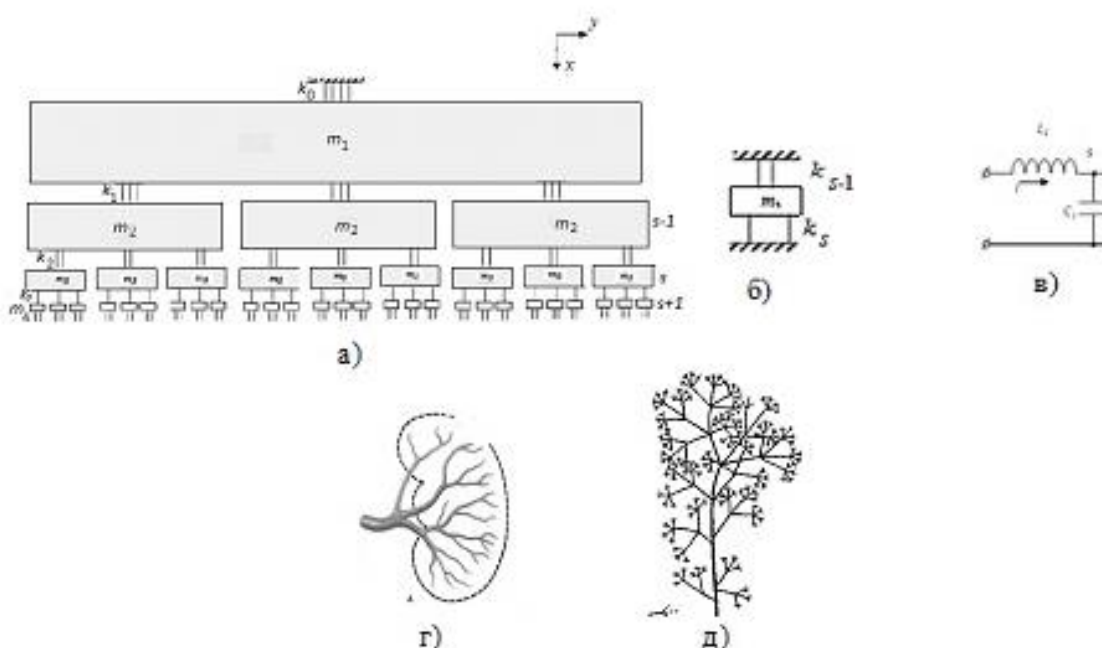


Рис. 1. Трихотомическая фрактальная решетка: а- динамическая модель, б-образующая подсистема, в- образующая подсистема для электрической структуры, г- ветвление артерий, д- трихотомическое дерево.

Если $\gamma = 3$, то Δ_{scm} во всех рядах будет одинаковым, и передача сигнала от верхнего тела происходит без искажения на все уровни. При этом перемещение каждого s -го ряда равно $s\Delta_{scm} = 3Ps/k_0$. При $\gamma < 3$, Δ_{scm} в каждом ряду будет уменьшаться по степенному закону, и, наоборот, при $\gamma > 3$ - будет увеличиваться. Таким образом, $\gamma = 3$ является бифуркационным значением при статической деформации трихотомической решетки. Для n -хотомической решетки таким значением, очевидно, будет $\gamma = n$.

Если упругие элементы в решетке рис. 1 представляют собой стержни круглого сечения, то продольная жесткость такого стержня в s -ом ряду равна

$$k_s = EF_s / l_s = E(\pi r_s^2 / l_s) .$$

Условие $\gamma = 3$ можно получить, используя различные варианты изменения параметров

$$(a) l_s = l_0 = const, r_s = r_0 / (\sqrt{3})^s ; (б) r_s = r_0 = const, l_s = l_0 (3)^s ;$$

$$(в) r_s = r_0 / (3)^s, l_s = l_0 / (3)^s$$

В последнем варианте радиус r и длина l меняются от элемента к элементу в одинаковом отношении γ ; следовательно, упругие элементы фрактальны, то есть обладают геометрическим самоподобием. При заданном γ вариант геометрически самоподобного стержня обладает наименьшим объемом.

Найдем теперь напряжение в упругих стержневых элементах:

$$\sigma_s = E\varepsilon = E \frac{\Delta_{sct}}{l_s} = E \frac{3P(\gamma/3)^s}{k_0 l_s}$$

Отсюда видно, что напряжение остается постоянным для каждого стержня при $\gamma = \sqrt{3}$, $l_s = l_0 / (\sqrt{3})^s$. При $\gamma = 3$ напряжение постоянно только в случае варианта (а) при $l_s = l_0 = const$. Это легко понять, так как изменение длины каждого упругого элемента при $\gamma = 3$, как показано выше, остается постоянным. В случае в) для геометрически самоподобного стержня напряжение уменьшается в каждом ряду пропорционально коэффициенту подобия: $\sigma_s = \gamma^s \sigma_0$

Динамически-самоподобные структуры. При определении динамического самоподобия решетки помимо масштабирования упругих элементов (1), необходимого для статики, следует еще потребовать масштабирования инерционных параметров.

Определение. Динамически-самоподобными назовем такие структуры, в которых упругие и инерционные параметры меняются с одинаковым масштабом γ для каждого ряда

$$k_s = k_1 / \gamma^s, m_s = m_1 / \gamma^s, \quad (2)$$

Необходимым следствием условий (2) является равенство парциальных частот образующих подсистем.

$$\nu_s = const \quad (s = 1 \dots N) \quad (3)$$

Колебания трихотомической решетки. Исследуем вертикальные механические колебания полубесконечной дихотомической решетки, образованной стержневыми элементами (рис.1). Силу тяжести не учитываем. Рассмотрим вначале трихотомическую решетку, состоящую из двух уровней (рис. 2а).

Уравнение колебаний такой структуры:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -m_1 \lambda^2 + 3k_1 + k_0 & -k_1 & -k_1 & -k_1 \\ -k_1 & -m_2 \lambda^2 + 3k_2 + k_1 & & \\ -k_1 & & -m_2 \lambda^2 + 3k_2 + k_1 & \\ -k_1 & & & -m_2 \lambda^2 + 3k_2 + k_1 \end{bmatrix} = 0 \quad (4)$$

Условие (2): $m_s = m_{s-1} / \gamma$, $k_s = k_{s-1} / \gamma$ обеспечивает самоподобие решетки, то есть

$$\nu = \frac{3k_1 + k_0}{m_1} = \frac{3k_2 + k_1}{m_2}$$

равенство парциальных частот для всех элементов:

Преобразование координат

$$\mathbf{X} = \mathbf{T}\tilde{\mathbf{X}}, \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & -2 & 1 \\ & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

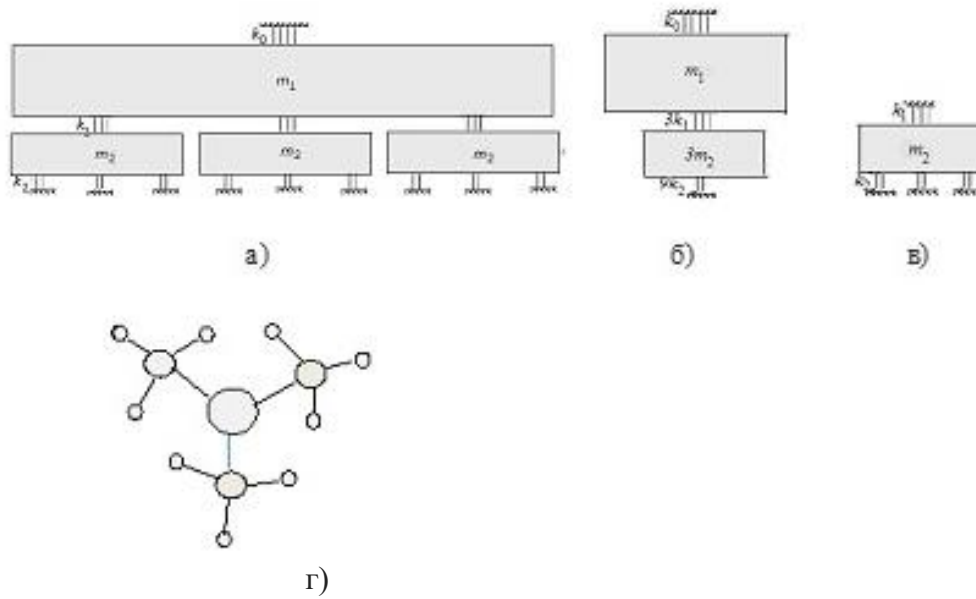


Рис. 2. Декомпозиция решетки на подсистемы описывающие формы колебаний: а - двухуровневая трихотомическая решетка, б- подсистема, описывающая синфазные колебания, в- подсистема, описывающая колебания масс второго уровня m_2 , г- фрактальное дерево Кэли (решетка Бене) для определения преобразования координат \mathbf{T} .

приводит матрицу \mathbf{D} (4) к блочно-диагональному виду

$$\mathbf{T}^T \mathbf{D} \mathbf{T} = \tilde{\mathbf{D}} = \begin{pmatrix} -m_1 \lambda^2 + 3k_1 + k_0 & -3k_1 & 0 & 0 \\ -3k_1 & 3 - m_2 \lambda^2 + 3k_2 + k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 - m_2 \lambda^2 + 3k_2 + k_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 - m_2 \lambda^2 + 3k_2 + k_1 \end{pmatrix} = 0$$

Матрица $\tilde{\mathbf{D}}$ имеет описывает 3 независимые подсистемы: двухмассовую подсистему (рис.2 б) и две одномассовые подсистемы (рис.2в), которые имеют кратные корни, равные парциальной частоте образующей элементарной подсистемы $\nu_s^2 = m_s / (k_s + 3k_{s+1})$. Таким образом, исходная система рис.2а разделяется на 3 подсистемы рис. 2 б, в.

Следует отметить интересную закономерность в определении преобразования \mathbf{T} , используемого для декомпозиции решетки: правый нижний блок в преобразовании \mathbf{T} полностью совпадает с оператором симметрии треугольника \mathbf{P}_3 [7,8]

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \\ \mathbf{V}_3 \end{bmatrix} = \mathbf{P}_3 \mathbf{X}, \quad \mathbf{P}_3 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Операторы V_i можно рассматривать как формы колебаний. Физический смысл этих операторов следующий:

V_1 описывает колебания всех узлов треугольника 1, 2, 3 в фазе; V_2, V_3 - колебания связаны с деформацией треугольника: узлы 1 и 3 в фазе, а 2 – в противофазе или равно нулю. Операторы V_2, V_3 соответствуют кратным корням, и любая их линейная комбинация также будет собственной формой колебаний.

Трихотомическая структура рис. 2а может быть представлена в виде рис.2г, имеющей симметрию треугольника. Это дерево Кэли (решетка Бене).

Формы колебаний решетки в исходных координатах определяет преобразование $T(5)$. Из (5) следует, что подсистема рис. 2б описывает синфазные колебания всех элементов системы. Одномассовые системы рис.2в описывают колебания элементов второго уровня m_2 при неподвижной массе m_1 : одна из этих подсистем в соответствии с (5) имеет противофазные колебания крайних масс при неподвижной средней массе, а другая – синфазные колебания крайних масс и противофазные колебания средней массы, амплитуды которой в два раза превосходят амплитуды крайних масс.

Одномассовые подсистемы получены в результате дополнительных закреплений массы m_1 по сравнению с двухмассовой, поэтому их частоты располагаются внутри частот подсистемы рис. 2 б.

Очевидно обобщение, что для любой n-хотомической иерархической решетки для последовательной декомпозиции и снижения размерности можно применять преобразование P_n , представляющее собой оператор симметрии n-угольника [7,8].

Для трихотомической решетки с увеличением числа рядов (например, $n = 4$), продолжая процесс декомпозиции решетки на следующие уровни, аналогично получим окончательно синфазную подсистему (рис.3а) и серию одномассовых и двухмассовых (рис.3б), которые получены из синфазной, путем дополнительного закрепления масс, поэтому их корни располагаются внутри корней синфазной подсистемы.

Синфазная подсистема получается, как результат суммирования всех масс и упругих элементов, а каждом ряду. Тогда для нее

$$M_s = m_s 3^s = m_1 (3/\gamma)^s, \quad K_s = k_s 3^s = k_1 (3/\gamma)^s.$$

Следовательно, синфазная подсистема – это самоподобная цепная система с коэффициентом подобия $\gamma' = 3/\gamma$.

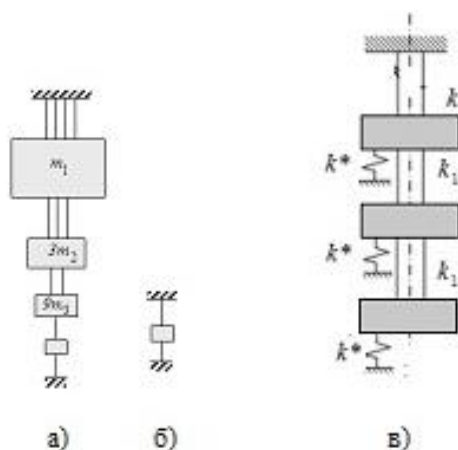


Рис.3. Подсистемы трихотомической решетки: а- синфазная подсистема, б- одномассовая подсистема, в- периодическая структура, эквивалентная синфазной по частотам

Как было показано в [3], колебания в самоподобной цепной системе с коэффициентом подобия μ описываются уравнением

$$-k_s x_{s-1} + (-m_s \omega^2 + k_s(1+\mu))x_s - k_{s+1}x_{s+1} = 0, \quad k_s = \mu k_{s-1} = \mu^s k_0 \quad (s=1..N) \quad (6)$$

С помощью замены переменных

$$y_s = \mu^{s/2} x_s \quad (7),$$

его можно свести к уравнению с постоянными коэффициентами

$$y_{s-1}k' + (2k' + k^*)y_s + y_{s+1}k' = 0, \quad k' = k_0\mu^{-1/2}, \quad k^* = k_0(1-\mu^{1/2})^2 \mu^{-1}. \quad (8)$$

Уравнение (8) описывает уже периодическую структуру (рис.3в), состоящую из одинаковых упругих элементов, жесткость которых равны k' , но при этом в узлах имеются дополнительные упругие элементы с жесткостью k^* . Но такая периодическая система, как известно [9], является полосовым частотным фильтром с полосой пропускания с полосой пропускания гармонического сигнала $\Delta\omega^2 = \omega^{*2} - \omega_0^2$ (рис.4), где:

$$\omega_0^2 = k^*/m_1 = k_0 \left(1 - \sqrt{\mu}\right)^2 / m_1 \mu, \quad \omega^{*2} = k_0 \left(1 + \sqrt{\mu}\right)^2 / m_1 \mu$$

Полоса пропускания $\Delta\omega^2 = 4k_0/m_1 \mu^{1/2}$ обратно пропорциональна параметру подобия μ . Поскольку линейное преобразование координат (5) не меняет корней характеристического уравнения, то и условия устойчивости фрактальной структуры, а, следовательно, и полоса пропускания частот фрактальной трихотомической структуры и периодической структуры рис.3в будет идентичной. В нашем случае

$$\mu = \gamma' = 3/\gamma, \quad \Delta\omega^2 = \frac{4k_0}{m_1} \sqrt{\frac{\gamma}{3}}$$

При $\gamma = 3, \mu = 1$ нижняя граница полосы пропускания исчезает: $\omega_0^2 = 0$.

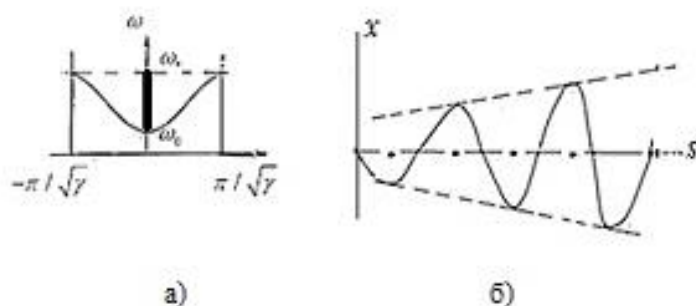


Рис.4. Полоса пропускания $(\omega^{*2} - \omega_0^2)$ трихотомической решетки (а), амплитуды синфазных колебаний s -го ряда $(s= 1..n)$ (б)

Что касается амплитуд колебаний синфазной подсистемы, то в исходных координатах x с учетом преобразование координат (7), амплитуды синфазных колебаний решетки увеличиваются с увеличением номера ряда s (рис. 4б).

Таким образом, статические и динамические свойства трихотомической и дихотомической решеток во многом аналогичны, что позволяет обобщить их и прогнозировать поведение n -хотомических решеток.

Выводы

- Коэффициент подобия трихотомической стержневой решетки $\gamma = 3$ - это бифуркационное значение. При $\gamma = 3$ статическое смещение упругих элементов во всех рядах будет одинаковой, расстояние между рядами решетки остается неизменным. При $\gamma < 3$ ($\gamma > 3$) происходит уменьшение (увеличение) статического смещения.
- Трихотомическая решетка представляет собой частотный полосовой фильтр. При $\gamma \neq 3$ полоса пропускания не зависит от количества рядов в решетке, при $\gamma = 3$ нижняя граница полосы пропускания исчезает.
- В решетке имеются кратные собственные частоты, равные парциальной частоте образующего элемента решетки; кратность частот зависит от числа рядов решетки.

Список литературы

1. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. - М.: «Институт компьютерных исследований», 2002. - 676 с.
2. Черноушко Ф.Л. Оптимальная структура ветвящихся трубопроводов // Прикладная математика и механика. - 1977. - т.41, вып. 2. - С. 376-383.
3. Банах Л.Я., Бармина О.В. Колебания самоподобных структур в механике // Проблемы машиностроения и надёжность машин. - 2013. - №2. - С.3-9.
4. Банах Л.Я. Статические свойства механических и биомеханических фрактальных структур // Вестник научно-технического развития. - 2017. - № 9 (121). - С. 9-17.
5. Банах Л.Я. Колебания разветвленных самоподобных структур. Дихотомическая решетка. / Проблемы машиностроения и автоматизации. - 2014. - №1. - С.111-114.
6. Ольсон Г. Динамические аналогии. Пер. с англ. -М.: ИЛ, 1947. - 224 с.
7. Banakh L.Ya., Kempner M.L. Vibrations of mechanical systems with regular structure. - Springer: Series: Foundation of Engineering Mechanics, 2010. - 263 p.
8. Банах Л.Я. Методы декомпозиции при исследовании колебаний механических систем. - М.: Регулярная и хаотическая динамика, 2016. - 292с.
9. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. - М: Наука, 1984. - 432с.

Дата поступления: 3 июля 2019 г.