

УДК 534.1

## САМОМОДУЛЯЦИЯ КВАЗИГАРМОНИЧЕСКИХ ИЗГИБНЫХ ВОЛН В СТЕРЖНЯХ

© Владимир Владимирович Кажаяв<sup>1,2</sup>, Надежда Петровна Семерикова<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Институт проблем машиностроения РАН – филиал Федерального государственного бюджетного научного учреждения «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики Российской академии наук» (ИПМ РАН), Нижний Новгород, Россия

<sup>2</sup>Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия

[ipmvvk@mail.ru](mailto:ipmvvk@mail.ru), [nadezhda.semerikova@yandex.ru](mailto:nadezhda.semerikova@yandex.ru)

**Аннотация.** В работе проанализированы условия возникновения модуляционной неустойчивости квазигармонических изгибных волн, распространяющихся в нелинейно-упругих стержнях моделей Бернулли-Эйлера и Тимошенко.

**Ключевые слова:** стержень, изгибная волна, самомодуляция.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИПФ РАН на проведение фундаментальных научных исследований на 2013-2020 г.г. по теме № 0035-2014-0402, № госрегистрации 01201458047 и при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 17-08-01096-а).

## SELF-MODULATION OF QUASI-HARMONIC BENDING WAVES IN RODS

© V.V. Kazhaev<sup>1,2</sup>, N.P. Semerikova<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Mechanical Engineering Research Institute of RAS, Nizhny Novgorod, Russia

<sup>2</sup>National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod, Russia

[ipmvvk@mail.ru](mailto:ipmvvk@mail.ru), [nadezhda.semerikova@yandex.ru](mailto:nadezhda.semerikova@yandex.ru)

**Abstract.** The features of propagation of quasi-harmonic waves in nonlinear elastic Euler-Bernoulli and Timoshenko rods are studied. It is shown that bending waves in Euler-Bernoulli rod are stable by means of self-modulation, while in Timoshenko rod there exist domains of modulation instability.

**Keywords:** rod, bending wave, self-modulation.

**Acknowledgements.** The work was carried out within the Russian state task for conducting fundamental scientific research for 2013-2020 on the topic No. 0035-2014-0402, state registration number 01201458047 and the work was supported by RFBR (project 17-08-01096-a).

В [1] получена система уравнений, описывающая изгибные колебания стержня с учетом геометрической и физической нелинейностей:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - \aleph C_r^2 \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) &= \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial x} \langle 1 \rangle \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - C_0^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\aleph C_r^2}{r_y^2} \left( \varphi - \frac{\partial W}{\partial x} \right) &= \frac{1}{\rho_0} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \langle 2 \rangle - \langle 3 \rangle \right\} \end{aligned} \right. \quad (1)$$

Здесь  $W(x,t)$  – вертикальное перемещение срединной линии стержня,  $\varphi(x,t)$  – угол поворота сечения относительно вертикальной оси ( $Oz$ ),  $C_0 = \sqrt{E/\rho_0}$ ,  $C_r = \sqrt{\mu/\rho_0}$  – скорости продольной и сдвиговой волн,  $E$  – модуль Юнга,  $\mu$  – константа Ламэ,  $\rho_0$  – плотность материала,  $\aleph$  – коэффициент Тимошенко, учитывающий дополнительные сдвиговые деформации, вызывающие искривления поперечных сечений,  $r_y = \sqrt{J_y/F}$  – осевой радиус инерции,  $I_y = \iint_F z^2 dF$  – осевой момент инерции,  $F$  – площадь поперечного сечения. В линейном приближении эта система совпадает с хорошо известной моделью балки Тимошенко [2-4]. Геометрическая и физическая нелинейности стержня учитываются слагаемыми, стоящими в правых частях уравнений (1):

$$\langle 1 \rangle = 2\alpha_2 r_y^2 \frac{\partial W}{\partial x} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + 4\alpha_3 \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^3 + 2\alpha_4 \varphi^2 \frac{\partial W}{\partial x} + \alpha_5 r_y^2 \varphi \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + 3\alpha_6 \varphi \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + \alpha_6 \varphi^3$$

$$\langle 2 \rangle = 4\alpha_1 \frac{J_1}{J_y} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^3 + 2\alpha_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \left( \varphi^2 + \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right) + 2\alpha_5 \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial x}$$

$$\langle 3 \rangle = 2\alpha_2 \varphi \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\alpha_4}{r_y^2} \varphi \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\alpha_3}{r_y^2} \varphi^3 + \alpha_5 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\alpha_6}{r_y^2} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^3 + 3 \frac{\alpha_6}{r_y^2} \varphi^2 \frac{\partial W}{\partial x},$$

где  $I_1 = \iint_F z^4 dF$  – геометрический момент инерции четвертого порядка, а коэффициенты нелинейности  $\alpha_i$  ( $i=1,6$ ) выражаются через адиабатические константы упругости Ламэвтора ( $\lambda, \mu$ ), третьего ( $\nu_{1,2,3}$ ) и четвертого ( $\gamma_{1,2,3,4}$ ) порядков:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{\lambda}{8} + \frac{\mu}{4} + \frac{1}{4} \nu_1 + \frac{3}{2} \nu_2 + 2\nu_3 + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4; \\ \alpha_2 &= \frac{\lambda}{4} + \frac{\mu}{2} + \nu_1 + \frac{3}{4} \nu_2 + \frac{5}{2} \nu_3 + \gamma_2 + \frac{3}{4} \gamma_3 + \gamma_4; \quad \alpha_3 = \frac{\lambda}{8} + \frac{\mu}{4} + \frac{1}{4} \nu_2 + \frac{1}{2} \nu_3 + \frac{1}{4} \gamma_4; \\ \alpha_4 &= \frac{\lambda}{4} + \frac{1}{3} \nu_2 + \nu_3 + \frac{3}{2} \gamma_4; \quad \alpha_5 = -2\nu_2 + 4\nu_3 - \gamma_2 - \frac{3}{2} \gamma_3 - 2\gamma_4; \quad \alpha_6 = -\frac{1}{2} \nu_2 - \nu_3 - \gamma_4. \end{aligned}$$

В линейной модели Тимошенко  $\varphi = \frac{\partial W}{\partial x} - \beta$ , где через  $\beta(x, t)$  обозначен угол сдвига, а  $\frac{\partial W}{\partial x}$  – угол поворота касательной к оси стержня. Заметим, что в технической теории Бернулли-Эйлера углом сдвига при изгибе пренебрегается ( $\beta=0$ ) и

$$\varphi = \frac{\partial W}{\partial x} \quad (2)$$

Сведем (1) к одному уравнению. Для этого из первого уравнения системы выразим  $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{1}{\aleph C_r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \frac{1}{\rho_0 \aleph C_r^2} \frac{\partial}{\partial x} \langle 1 \rangle$  и подставим во второе уравнение, предварительно продифференцировав его по переменной  $x$ . Кроме того, будем предполагать, что углы сдвига поперечных сечений  $\beta(x, t)$  малы. Поскольку нелинейные эффекты являются величинами более высокого порядка малости, чем линейные, это позволяет учитывать сдвиги только в линейной части уравнений, а в нелинейных слагаемых считать, что приближенно выполняется соотношение (2). Переходя к новым безразмерным переменным  $x' = \frac{x}{\Lambda r_y}$ ,  $t' = \frac{C_0 t}{\Lambda r_y}$ ,  $W' = \frac{W}{W_0}$ , где  $W_0$  – максимальная амплитуда изгибной волны,  $L = \Lambda r_y$  – длина волны,  $\Lambda > 1$  – безразмерная длина волны, получаем уравнение относительно поперечного перемещения в виде:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + D \left[ \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} - \left( 1 + \frac{C_0^2}{\aleph C_r^2} \right) \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{C_0^2}{\aleph C_r^2} \frac{\partial^4 W}{\partial t^4} \right] = \frac{\tilde{\alpha} W_0^2}{EL} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^3 \quad (3)$$

Здесь и в дальнейшем для удобства штрихи над безразмерными переменными опущены. Оценка нелинейных слагаемых показала, что доминирующими являются члены, содержащие нелинейность  $\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^3$ . Поэтому в уравнении (3) сохранены слагаемые, входящие с коэффициентом  $\frac{1}{\Lambda^2}$ , а остальными (с коэффициентами, пропорциональными  $\frac{1}{\Lambda^4}, \frac{1}{\Lambda^6}$ ) – пренебрегли. Здесь  $D = r_y^2 / L^2$  – параметр дисперсии,  $\tilde{\alpha}$  – коэффициент, определяющий геометрическую и физическую нелинейности:

$$\tilde{\alpha} = 6\alpha_3 + 4\alpha_4 + 8\alpha_6 = \frac{7}{4}\lambda + \frac{3}{2}\mu - \frac{7}{6}\nu_2 - \nu_3 - \frac{1}{8}\gamma_4 \quad (4)$$

Ранее в [1] система уравнений (1) сводилась к уравнению, подобному (3), в предположении малых углов поворота поперечного сечения ( $\varphi$ ), т.е. в предположении больших углов сдвига  $\left( \beta \approx \frac{\partial W}{\partial x} \right)$ . Это приводило к тому, что приходилось неявно пренебрегать геометрической нелинейностью, сохранив нелинейность физическую. Однако, для тонкостенных элементов конструкций, совершающих изгибные колебания конечной амплитуды, доминирующей является именно геометрическая нелинейность.

Рассмотрим далее влияние геометрической нелинейности на процесс самомодуляции квазигармонической изгибной волны. Физической нелинейностью на первом этапе пренебрегаем, т.е. в (4) считаем  $v_{2,3} = \gamma_4 = 0$ .

В линейном приближении ( $\tilde{\alpha} = 0$ ) решение уравнения (3) представляется в виде набора гармоник  $e^{i(\omega t - kx)}$ , частоты ( $\omega$ ) и волновые числа ( $k$ ) которых связаны дисперсионным соотношением:

$$k^4 - \frac{\omega^2}{D} - \left(1 + \frac{C_0^2}{\aleph C_\tau^2}\right) k^2 \omega^2 + \frac{C_0^2}{\aleph C_\tau^2} \omega^4 = 0. \quad (5)$$

На плоскости  $(\omega, k)$  имеется две дисперсионные ветви. Первая ветвь исходит из нуля, а вторая – из точки  $k = 0, \omega = \sqrt{\frac{\aleph}{D}} \frac{C_\tau}{C_0}$ . Нижняя дисперсионная ветвь имеет точку перегиба, координаты которой  $(k^*, \omega^*)$  находятся из дисперсионного соотношения (5) и следующего уравнения:

$$\left(1 + D \left(1 + \frac{C_0^2}{\aleph C_\tau^2}\right) k^2 - 6D \frac{C_0^2}{\aleph C_\tau^2} \omega^2\right) V_{gr}^2 + 4D \left(1 + \frac{C_0^2}{\aleph C_\tau^2}\right) \omega k V_{gr} - 6D k^2 + D \left(1 + \frac{C_0^2}{\aleph C_\tau^2}\right) \omega^2 = 0.$$

Здесь  $V_{gr}$  - групповая скорость линейных волн, выражение для которой имеет вид

$$V_{gr} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{D \left[ 2k^3 - \left(1 + \frac{C_0^2}{\aleph C_\tau^2}\right) \omega^2 k \right]}{\omega + D \left(1 + \frac{C_0^2}{\aleph C_\tau^2}\right) \omega k^2 - 2D \frac{C_0^2}{\aleph C_\tau^2} \omega^3} \quad (6)$$

Сильная в низкочастотной области дисперсия изгибных волн при наличии слабой кубической нелинейности приводит к тому, что решение уравнения (3) при  $\tilde{\alpha} \neq 0$  будет близко к решению соответствующего линейного уравнения. Фазовая скорость третьей гармоники ( $3\omega$ ), согласно (5), будет существенно отличаться от фазовой скорости волны основной частоты ( $\omega$ ). Это позволяет отыскивать решения уравнения (3) в виде одной квазигармоники:

$$W(x, t) = A(\varepsilon x, \varepsilon t) e^{i(\omega t - kx)} + k.c. \quad (7)$$

где  $A(x, t)$  – комплексная амплитуда,  $\omega$  и  $k$  удовлетворяют дисперсионным соотношениям и условию малости амплитудно-частотной модуляции

$$\frac{\partial A}{\partial x} / kA \sim \frac{\partial A}{\partial t} / \omega A \sim \varepsilon \ll 1, \quad \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} / kA \sim \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} / \omega A \sim \varepsilon^2$$

Предполагаем также, что нелинейное слагаемое, стоящее в правой части уравнения (3) имеет порядок малости  $\varepsilon^2$ , т.е. отношение амплитуды изгибной волны к ее длине является малой величиной  $\left(\frac{W_0}{L} \sim \varepsilon\right)$ . Используя метод усреднения по «быстрым» переменным [5], перейдем от исходного уравнения к укороченному уравнению. В системе координат, движущейся с групповой скоростью  $\xi = x - V_{gr}t$ ,  $\tau = t$ , оно является нелинейным уравнением Шредингера относительно комплексной амплитуды:

$$i \frac{\partial A}{\partial \tau} - \beta \frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} + \alpha |A|^2 A = 0, \quad (8)$$

где  $\beta = \frac{1}{2} \frac{dV_{gr}}{dk} = \frac{1}{2} \frac{d^2\omega}{dk^2}$  – дисперсионный параметр,  $\alpha$  – нелинейный параметр, который

определяется выражением  $\alpha = \pm \frac{3\tilde{\alpha}k^4}{2E\omega} \left[ \left( 1 + D \left( \frac{C_0^2}{\aleph C_r^2} - 1 \right) k^2 \right)^2 + 4Dk^2 \right]^{-1/2}$ , где знак «плюс»

соответствует нижней дисперсионной ветви, а «минус» – верхней. Для сравнения, для стержня модели Бернулли Эйлера (в это случае в уравнении (3) второе и третье слагаемые в квадратных скобках отсутствуют)  $\alpha = \frac{3\tilde{\alpha}k^4}{2E}$ .

Уравнение Шредингера является фундаментальным уравнением нелинейной физики. Оно используется для описания слабонелинейных диспергирующих волн различной физической природы [5-7], и позволяет, в частности, исследовать устойчивость квазигармонической волны (7) по отношению к малым начальным возмущениям.

Согласно критерию Лайтхилла [7], если нелинейный и дисперсионный параметры уравнения Шредингера имеют противоположные знаки, т.е.  $\alpha \cdot \beta = \frac{d^2\omega}{dk^2} \cdot \alpha < 0$ , то в системе будет наблюдаться самомодуляция (модуляционная неустойчивость), трансформирующая квазигармоническую волну (7) в набор волновых пакетов. Для модели Бернулли-Эйлера критерий Лайтхилла не выполняется, так как  $\alpha > 0$  и  $\frac{d^2\omega}{dk^2} > 0$

Модель Тимошенко дает иной результат: квазигармонические изгибные волны могут быть как устойчивыми, так и неустойчивыми в зависимости от частоты и принадлежности к той или иной дисперсионной ветви. Волны, описываемые верхней дисперсионной ветвью, всегда будут неустойчивыми. Для нижней ветви знак параметра дисперсии уравнения Шредингера может изменяться, что связано с наличием у нее точки перегиба. Поэтому в интервале  $0 < k < k^*$ , где  $k^*$  – точка перегиба дисперсионной кривой, волны устойчивы к самомодуляции (именно здесь модели Бернулли-Эйлера и Тимошенко совпадают по своим дисперсионным свойствам), и неустойчивы в интервале  $k > k^*$ .

На рис.1 изображена диаграмма, показывающая при каких частотах  $\omega$  и волновых числах  $k$  возможна модуляционная неустойчивость изгибных волн в стержне. Область устойчивости отмечена квадратами, область неустойчивости – крестами. Расчеты производились при коэффициенте Тимошенко  $\aleph = 0.98$ , коэффициенте Пуассона  $\nu = 0.3$  и  $D = 0.04$ .

Величина области модуляционной неустойчивости изгибных волн зависит и от упругих свойств материала стержня. С увеличением коэффициента Пуассона область устойчивости уменьшается, как это показано на рис.2 при  $D = 1$ .

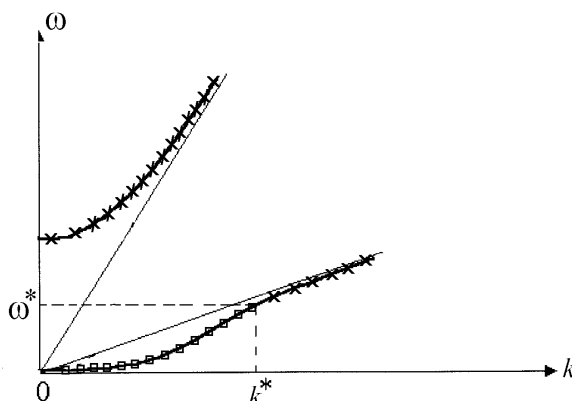


Рис.1.

При различных длинах волн области устойчивости полностью подобны, а коэффициент подобия зависит только от  $D$ , так при  $D = 0,01; 0,04; 0,1$  коэффициенты подобия имеют соответственно значения 10; 5 и 3,7.

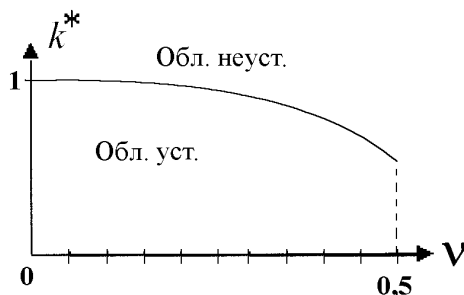


Рис.2.

При учете физической нелинейности в уравнении (3) коэффициент нелинейности (4) будет зависеть от модулей упругости Ламе второго  $(\lambda, \mu)$ , третьего  $(\nu_2, \nu_3)$  и четвертого  $(\gamma_4)$

порядков:  $\tilde{\alpha} = \frac{7}{4}\lambda + \frac{3}{2}\mu - \frac{7}{6}\nu_2 - \nu_3 - \gamma_4$ . В этом случае для металлических стержней

параметр нелинейности  $\tilde{\alpha}$  становится отрицательным, что приводит к выполнению критерия Лайтхилла для стержня модели Бернулли-Эйлера. Таким образом, квазигармонические изгибные волны и в технической теории стержней будут неустойчивы к самомодуляции. В стержне модели Тимошенко области устойчивости и неустойчивости меняются местами, а именно: волны, описываемые верхней дисперсионной ветвью, всегда устойчивы; волны, описываемые нижней дисперсионной ветвью, неустойчивы при  $0 < k < k^*$  и устойчивы  $k > k^*$ .

Если предположить существование композитного материала с  $\tilde{\alpha} > 0$ , то области модуляционной устойчивости и неустойчивости в физически нелинейных стержнях из

композитов будут такими же, что и в металлических стержнях при учете только геометрической нелинейности.

### Список литературы

- [1] Ерофеев В.И., Кажаяев В.В., Семерикова Н.П. Волны в стержнях. Дисперсия. Диссипация. Нелинейность. - М.: Наука, Физматлит, 2002. - 208 с.
- [2] Григолюк Э.И., Селезов И.Т. Неклассические теории стержней, пластин и оболочек. - М.: ВИНТИ, 1973. - 272 с.
- [3] Артоболовский И.И., Бобровницкий Ю.И., Генкин М.Д. Введение в акустическую динамику машин. - М.: Наука, 1979. - 296 с.
- [4] Вибрации в технике: Справочник в 6-ти томах. / Ред. совет: Фролов К.В. (пред.). – М.: Машиностроение. Т.1: Колебания линейных систем. 2-е изд., испр. и доп. / Под ред. Болотина В.В., 1999. - 504 с.
- [5] Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. - М.: Наука, 1984. - 432с.
- [6] Кадомцев В.В. Коллективные явления в плазме. - М.: Наука, 1988. - 304с.
- [7] Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. - М.: Мир, 1977. - 622с.

*Дата поступления: 12 июня 2019 г.*