

УДК 534.1

НЕЛИНЕЙНЫЕ СТАЦИОНАРНЫЕ ВОЛНЫ В ТОНКОСТЕННОМ СТЕРЖНЕ, ИСПЫТЫВАЮЩЕМ ВЛИЯНИЕ ДЕПЛАНАЦИИ ЕГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ ПРИ КРУЧЕНИИ

© Владимир Иванович Ерофеев¹, Татьяна Сергеевна Есаулова¹,
Владимир Владимирович Кажаяев¹, Борис Борисович Лампси (мл.)²

¹Институт проблем машиностроения РАН – филиал Федерального государственного бюджетного научного учреждения «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики Российской академии наук» (ИПМ РАН), Нижний Новгород, Россия

²Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет
erof.vi@yandex.ru

Аннотация. Рассматривается математическая модель, позволяющая описать распространение крутильной волны в тонкостенном стержне. Модель включает в себя геометрическую и физическую упругие нелинейности, а так же депланацию, т.е. выход поперечного сечения, в процессе деформации стержня, из первоначального плоского состояния. На основе анализа модели определено, что депланация, приводящая к появлению дисперсии фазовой скорости крутильной волны, приводит еще и к появлению квадратичной нелинейности, характерной для интенсивных продольных колебаний и не встречавшейся прежде в математических моделях, описывающих крутильные колебания. Показано, что в стержне с квадратичной нелинейностью может сформироваться стационарная крутильная волна. Такая волна является периодической и движется быстрее, чем любые линейные возмущения. Волна имеет пилообразную форму, длина волны увеличивается с ростом ее амплитуды. Кроме того, показано, что совместное действие кубической нелинейности (вызванной высокой интенсивностью вибрации) и дисперсии (обусловленной депланацией) в стержне может привести к формированию несинусоидальных стационарных волн, распространяющихся с постоянной скоростью без изменения формы.

Ключевые слова: тонкостенный стержень, депланация, нелинейность, кручение, стационарная волна.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИПФ РАН на проведение фундаментальных научных исследований на 2013-2020 г.г. по теме № 0035-2014-0402, № госрегистрации 01201458047 и при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-29-10073).

NONLINEAR STATIONARY WAVES IN A THIN-WALLED ROD, TESTING THE IMPACT OF DEPLANNING IT TRANSVERSE SECTION WHEN TURNING

© V.I. Erofeev¹, T.S. Esaulova¹, V.V. Kazhaev¹, B.B. Lampsi (Jr.)²

¹Mechanical Engineering Research Institute of RAS, Nizhny Novgorod, Russia

²Nizhny Novgorod State University of Architecture and Civil Engineering, Nizhny Novgorod, Russia
erof.vi@yandex.ru

Abstract. A mathematical model is considered that allows one to describe the propagation of a torsional wave in a thin-walled rod. The model includes geometrical and physical elastic nonlinearity, as well as deplanation, i.e. the output of the cross section, in the process of deformation of the rod, from the initial flat state. Based on the analysis of the model, it is determined that the deplanation leading to the appearance of the dispersion of the phase velocity of the torsional wave also leads to the appearance of quadratic nonlinearity characteristic of intense longitudinal oscillations and not previously encountered in mathematical models describing the torsional vibrations. It is shown that a stationary torsional wave can form in a rod with a quadratic nonlinearity. Such a wave is periodic and moves faster than any linear perturbation. The wave has a sawtooth shape, the wavelength increases with increasing its amplitude. In addition, it is shown that the combined action of cubic nonlinearity (caused by high vibration intensity) and dispersion (due to deplanation) in the rod can lead to the formation of non-sinusoidal stationary waves propagating at a constant speed without changing the shape.

Keywords: thin-walled core, deplanation, nonlinearity, torsion, stationary wave.

Acknowledgements. The work was carried out within the Russian state task for conducting fundamental scientific research for 2013-2020 on the topic No. 0035-2014-0402, state registration number 01201458047 and the work was supported by RFBR (project 18-29-10073).

1. Дифференциальное уравнение крутильных колебаний стержня с учетом нелинейности и депланации поперечного сечения стержня. Известно, что для стержней кругового и кольцевого поперечных сечений эффект депланации (т.е. выход поперечного сечения из первоначального плоского состояния) остается малым даже при значительных углах закручивания и в расчетах им обычно пренебрегают [1, 2]. Для тонкостенных стержней иных поперечных сечений депланация может быть значительной даже при малых углах закручивания. Если депланация неоднородна вдоль стержня, то кручение принято называть стесненным. По теориям Тимошенко и Власова депланация пропорциональна относительному углу закручивания, что приводит к дисперсии, т.е. зависимости фазовой скорости крутильной волны от ее частоты.

В. И. Сливкером [3] предложена уточненная теория, в которой связь между углом закручивания $\theta(x, t)$ и мерой депланации $\beta(x, t)$ не постулируется как в теориях Тимошенко и Власова, а определяется в процессе решения задачи.

В работах В.И. Ерофеева и Б.Б. Лампси (мл.) [4, 5] модель Сливкера обобщена на случай учета геометрической и физической упругих нелинейностей.

Выражение для кинетической энергии деформации имеет вид:

$$W_k = \frac{1}{2} \left[\rho I_r \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 + \rho I_\omega \left(\frac{\partial \beta}{\partial t} \right)^2 \right] \quad (1)$$

где ρ – плотность материала стержня; I_r – полярный момент инерции; I_ω – секториальный момент инерции.

Для учета упругой нелинейности в выражении для плотности потенциальной энергии следует удержать не только квадратичные слагаемые, но и слагаемые в четвертой степени:

$$W_p = \frac{1}{2} G I_x \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} E I_\omega \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} G I_g \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} - \beta \right)^2 + \alpha_1 \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^4 + \alpha_2 \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} \right)^4 + \alpha_3 \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} - \beta \right)^4 \quad (2)$$

где $G = \frac{E}{2(1+\gamma)}$ – модуль сдвига; E – модуль Юнга; I_x – крутящий момент инерции; γ – коэффициент Пуассона; $I_g = \frac{I_x}{(\psi-1)}$ –

депланационный момент инерции; ψ – геометрический параметр (см. [3]);

α_i – коэффициенты, характеризующие геометрическую и физическую нелинейности стержня. Если стержень является геометрически нелинейным, то $\alpha_i > 0$, если – физически нелинейным, то $\alpha_i < 0$.

Составляя лагранжиан $L = W_k - W_p$ и применяя вариационный принцип Гамильтона-Остроградского [6], получим систему уравнений динамики стержня:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \theta_t} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L}{\partial \theta_x} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \beta_t} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L}{\partial \beta_x} \right) - \frac{\partial L}{\partial \beta} = 0 \end{cases} \quad (3)$$

где введены обозначения:

$$\theta_t = \frac{\partial \theta}{\partial t}; \theta_x = \frac{\partial \theta}{\partial x}; \beta_t = \frac{\partial \beta}{\partial t}; \beta_x = \frac{\partial \beta}{\partial x}.$$

После проведения необходимых дифференцирований и преобразований (3) запишется в виде:

$$\begin{cases} \rho I_r \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - G(I_x + I_g) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + G I_g \frac{\partial \beta}{\partial x} + N_1 = 0 \\ \rho I_\omega \frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} - E I_\omega \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} - G I_g \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} - \beta \right) + N_2 = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Здесь через $N_{1,2}$ обозначены нелинейные слагаемые:

$$\begin{aligned} N_1 = & -12(\alpha_1 + \alpha_3) \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + 24\alpha_3 \beta \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + 12\alpha_3 \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial \beta}{\partial x} - \\ & - 24\alpha_3 \beta \frac{\partial \beta}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial x} - 12\alpha_3 \beta^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + 12\alpha_3 \beta^2 \frac{\partial \beta}{\partial x} \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} N_2 = & -12\alpha_3 \frac{\partial \beta}{\partial x} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} - 4\alpha_3 \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^3 + 12\alpha_3 \beta \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 - 12\alpha_3 \frac{\partial \theta}{\partial x} \beta^2 + \\ & + 4\alpha_3 \beta^3 \end{aligned} \quad (6)$$

Система (4) – (6) достаточно сложна для анализа. Для ее упрощения будем предполагать, что депланация $\beta(x, t)$ является малой. Поскольку нелинейные эффекты проявляются на величинах более высокого порядка малости, чем линейные, это позволяет учитывать депланацию только в линейной части уравнений, а в нелинейных слагаемых приближенно считать, что $\beta \approx \frac{\partial \theta}{\partial x}$. Тогда нелинейные слагаемые будут иметь вид:

$$N_1 = -12\alpha_1 \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (7)$$

$$N_1 = -12\alpha_3 \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (8)$$

При данных предположениях система уравнений (1.45) сводится к одному уравнению относительно $\theta(x, t)$. Для этого из первого уравнения системы выразим

$$\frac{\partial \beta}{\partial x} = \frac{(I_x + I_g) \partial^2 \theta}{I_g \partial x^2} - \frac{I_r \rho}{GI_g} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + \frac{12\alpha_1}{GI_g} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$$

и подставим его во второе уравнение, предварительно продифференцированное по переменной x .

Таким образом, нелинейное дифференциальное уравнение крутильных колебаний стержня с учетом деформации его поперечного сечения, будет иметь вид:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - c_s^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{EI_\omega(I_x + I_g) \partial^4 \theta}{\rho I_g I_r} - \frac{I_\omega}{I_g I_r G} [(I_x + I_g)G + EI_r] \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2 \partial t^2} + \\ & + \frac{I_\omega \partial^4 \theta}{c_\tau^2 I_g \partial t^4} - \frac{12I_\omega \alpha_1}{GI_g I_r} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right] + \frac{12I_\omega \alpha_1 EI_\omega}{\rho I_r GI_g} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right] - \\ & - \frac{12\alpha_1}{\rho I_r} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{12\alpha_3}{\rho I_r} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}\right) = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Заметим, что уравнение (9) содержит в себе, наряду с кубической нелинейностью, характерной для интенсивных крутильных колебаний стержней, еще и квадратичную нелинейность (последнее слагаемое), характерную для интенсивных продольных колебаний и не встречающуюся прежде в математических моделях, описывающих крутильные колебания.

2. Волновые процессы в тонкостенном стержне при учете квадратичной нелинейности.

Будем далее рассматривать волновые процессы, учитывая квадратичную нелинейность ($\alpha_3 \neq 0$) и пренебрегая кубической нелинейностью ($\alpha_1 = 0$).

Уравнение (9) в этом случае можно записать в виде:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - c_s^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{I_\omega}{c_\tau^2 I_g} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{(I_x + I_g) c_\tau^2}{I_g} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \theta + \\ & + \frac{6\alpha_3}{\rho I_r} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)^2 = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь $c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ – скорость распространения продольных волн в стержне;

$c_\tau = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$ – скорость распространения сдвиговых волн.

Линейные крутильные волны в стержне обладают дисперсией фазовой скорости [6]. Таким образом, на распространение крутильных волн, описываемых уравнением (10), будут влиять два фактора: дисперсия и нелинейность. Нелинейность приводит к зарождению в спектре волны новых гармоник, что способствует появлению в движущемся профиле волны резких перепадов. Дисперсия же наоборот, сглаживает перепады из-за различия в фазовых скоростях гармонических составляющих волны. Совместное действие этих факторов может привести к формированию стационарных волн, которые распространяются с постоянной скоростью без изменения формы.

Обзор основных результатов теоретических и экспериментальных исследований нелинейных стационарных волн в стержнях, пластинах и оболочках содержится в работе [7].

Решение уравнения (10) будем искать в виде: $\theta(x, t) = \theta(\xi)$, где $\xi = x - Vt$,

V – скорость стационарной волны (заранее не известна).

Для относительного угла закручивания поперечного сечения стержня

$$\Theta = \frac{d\theta}{d\xi}$$

уравнение в частных производных (10) сведется к обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$\frac{d^2\Theta}{d\xi^2} + m_1\Theta + m_2\frac{d}{d\xi}(\Theta)^2 = 0 \quad (11)$$

$$\text{где } m_1 = \frac{V^2 - \frac{c_\tau^2 I_x}{I_r}}{\frac{I_\omega}{c_\tau^2 I_g} \left(V^2 - \frac{(I_x + I_g)c_\tau^2}{I_g} \right) (V^2 - c_0^2)},$$

$$m_2 = \frac{6\alpha_3 c_\tau^2 I_g}{\rho I_r I_\omega \left(V^2 - \frac{(I_x + I_g)c_\tau^2}{I_g} \right) (V^2 - c_0^2)}.$$

Анализ уравнения (11) на фазовой плоскости $(\Theta, \frac{d\Theta}{d\xi})$ показывает, что замкнутые фазовые траектории, а только им соответствуют финитные решения уравнения, возможны, если $m_1 > 0$. Следовательно, нелинейные крутильные стационарные волны могут существовать лишь при $m_1 > 0$. Это возможно если нелинейная волна является «быстрой», т.е. ее скорость превышает скорости всех линейных возмущений:

$$V > c_0 > c_\tau \sqrt{\frac{(I_x + I_g)}{I_g}} > c_s \quad (12)$$

или если нелинейная волна является «медленной» и ее скорость лежит в интервале:

$$c_s < V < c_\tau \sqrt{\frac{(I_x + I_g)}{I_g}} \quad (13)$$

В начале координат на фазовой плоскости имеется особая точка типа «центр». Прямая $\frac{d\Theta}{d\xi} = \varepsilon^*$ определяет устойчивые движения (замкнутые фазовые траектории):

$$\varepsilon^* = \frac{m_1}{2m_2} = \frac{\rho I_r c_s^2}{12\alpha_3} \left(\frac{V^2}{c_s^2} - 1 \right) \quad (14)$$

Этот параметр растет с увеличением относительного значения скорости нелинейной стационарной волны, т.е. $|\varepsilon^*| \sim \left(\frac{V}{c_s}\right)^2$, и уменьшается с увеличением α_3 : $|\varepsilon^*| \sim 1/|\alpha_3|$. Знак m_2 определяется знаком α_3 .

На рис. 1 показан фазовый портрет уравнения (11) при $\alpha_3 < 0$ (а) и профиль стационарной волны, при амплитудах, близких к ε^* (б).

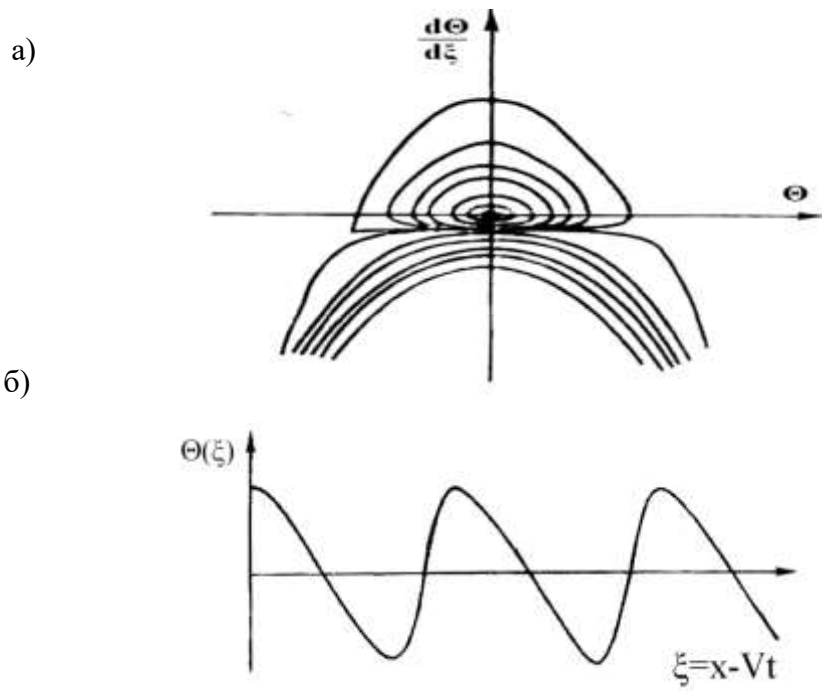


Рис.1.

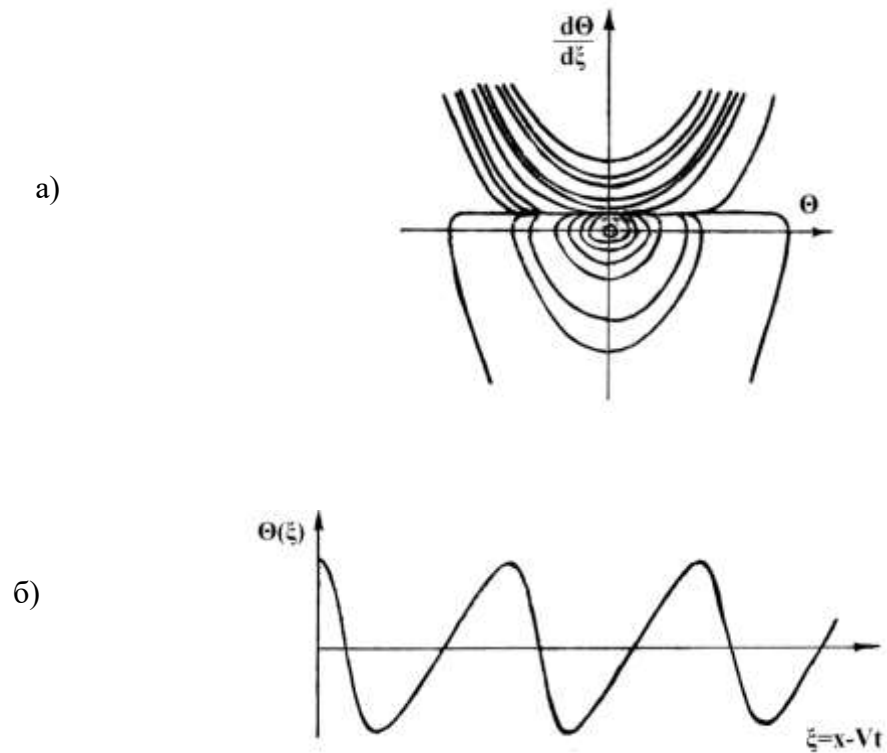


Рис.2.

Аналитические построения, выполненные для случая $\alpha_3 > 0$, показаны на рис.2. (а,б). Фазовый портрет позволяет оценить зависимость волнового числа нелинейной волны (k) от ее амплитуды (a):

$$\frac{k}{k_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{a/a_0}{\pi \varepsilon^*}\right)^2}} \quad (15)$$

где k_0, a_0 – волновое число и амплитуда гармонической (линейной) волны.

С ростом амплитуды волны относительное значение волнового числа уменьшается (длина волны растет) (рис.3).

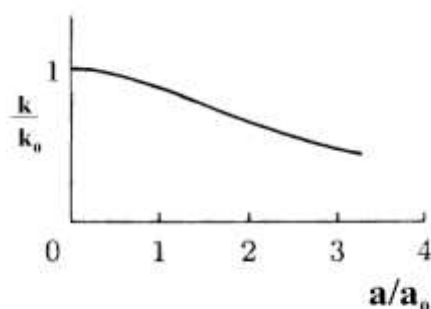


Рис. 3.

Профили нелинейной волны при фиксированной амплитуде ($a/a_0 = const$) и различных значениях ε^* приведены на рис. 4.

3. Волновые процессы в тонкостенном стержне при учете кубической нелинейности.

Будем далее рассматривать волновые процессы, учитывая кубическую нелинейность ($\alpha_3=0$) и пренебрегая квадратичной нелинейностью ($\alpha_1 \neq 0$).

Уравнение (9) в этом случае можно записать в виде:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - c_s^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{I_\omega}{c_\tau^2 I_g} \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{I_x + I_g}{I_g} c_\tau^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \theta - \frac{4\alpha_1}{\rho I_r} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^3 = 0 \quad (16)$$

Здесь θ – угол поворота поперечного сечения, ρ – плотность материала, I_ω – секториальный момент инерции, I_r – полярный момент инерции, I_x – крутящий момент инерции, $I_g = I_x / (\Psi - 1)$, Ψ – геометрический параметр (см. [3]), $c_s = \sqrt{G I_x / \rho I_r}$ – скорость распространения крутильных волн в стержне, $c_\tau = \sqrt{G / \rho}$ – скорость распространения сдвиговых волн, $c_0 = \sqrt{E / \rho}$ – скорость распространения продольных волн в стержне, E – модуль Юнга, $G = E / (2(1 + \nu))$ – модуль сдвига, ν – коэффициент Пуассона.

Третье слагаемое в уравнении (17) появилось из-за наличия депланации, приводящей к возникновению дисперсии фазовой скорости крутильной волны; четвертое слагаемое появилось в уравнении из-за наличия нелинейности.

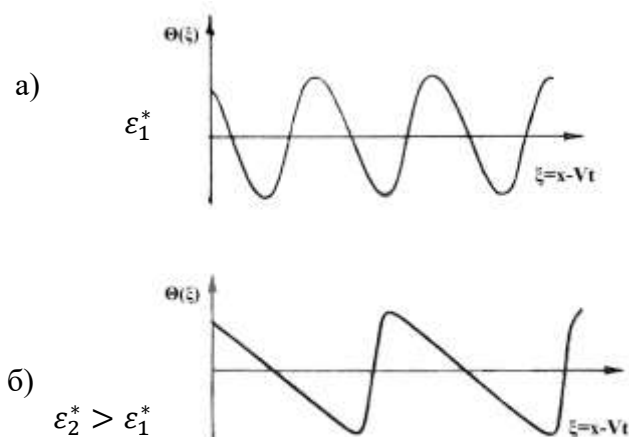


Рис.4.

Коэффициент α_1 – характеризует геометрическую и физическую нелинейности стержня. Если стержень является геометрически нелинейным, то $\alpha_1 > 0$, если физически нелинейным, то $\alpha_1 < 0$.

Таким образом, на распространение крутильных волн, описываемых уравнением (16) будут влиять два фактора: дисперсия и нелинейность. Нелинейность приводит к зарождению в спектре волны новых гармоник, что способствует появлению в движущемся профиле волны резких перепадов. Дисперсия же, наоборот, сглаживает перепады из-за различия в фазовых скоростях гармонических составляющих волны. Совместное действие этих факторов может привести к формированию стационарных волн, которые распространяются с постоянной скоростью без изменения формы.

Решение уравнения (16) будем искать в виде: $\theta(x, t) = \theta(\xi)$,

где $\xi = x - Vt$,

V – скорость стационарной волны (заранее не известна).

Для относительного угла закручивания поперечного сечения стержня $\Theta = d\theta/d\xi$ уравнение в частных производных (16) сведется к обыкновенному дифференциальному уравнению (уравнение Дуффинга):

$$\frac{d^2\Theta}{d\xi^2} + m_1\Theta + m_2\Theta^3 \tag{17}$$

где

$$m_1 = \frac{(V^2 - c_s^2)c_t^2 I_g}{I_\omega \left[V^2 - \left(\frac{I_x + I_g}{I_g} \right) c_t^2 \right] (V^2 - c_0^2)} \tag{18}$$

$$m_2 = \frac{-4\alpha_1 c_t^2 I^2}{\rho I_r I_\omega \left[V^2 - \left(\frac{I_x + I_g}{I_g} \right) c_t^2 \right] (V^2 - c_0^2)}$$

Для входящих в (18) скоростей линейных возмущений справедливо следующее неравенство:

$$c_0 > c_\tau \sqrt{\frac{I_x + I_g}{I_g}} > c_\tau > c_s$$

Если стержень обладает геометрической нелинейностью ($\alpha_1 > 0$), то стационарных крутильных волн не существует в диапазоне скоростей $V < c_s$. Во всех других диапазонах нелинейные стационарные волны могут формироваться. Однако в зависимости от величины скорости V имеются качественно различные волновые картины, поскольку при этом уравнение Дуффинга (17) имеет различные решения.

Уравнение (17) имеет первый интеграл:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\Theta}{d\xi} \right)^2 = E - \frac{m_1}{2} \Theta^2 - \frac{m_2}{4} \Theta^4 \quad (19)$$

который можно интерпретировать как закон сохранения энергии для ангармонического осциллятора. Здесь E – константа интегрирования, имеющая смысл начальной энергии системы, а функция $f(\Theta) = (m_1/2)\Theta^2 - (m_2/4)\Theta^4$ имеет смысл потенциальной энергии.

Уравнение (19) допускает разделение переменных:

$$\sqrt{2} d\xi = \frac{d\Theta}{\sqrt{E - f(\Theta)}} \quad (20)$$

и имеет ограниченные решения в области между любыми действительными корнями полинома $E - f(\Theta)$, где $E - f(\Theta) > 0$.

Пусть $m_1 > 0$, $m_2 < 0$. Это возможно если скорость стационарной волны находится в диапазоне $c_s < V < c_\tau \sqrt{(I_x + I_g)/I_g}$ или $V > c_0$. В этом случае функция потенциальной энергии $f(\Theta) = (m_1/2)\Theta^2 - (m_2/4)\Theta^4$ имеет локальный максимум $f_{max} = -m_1^2/4m_2$ в точках $\Theta = \pm \sqrt{-m_1/m_2}$ и локальный минимум $f_{min} = 0$ при $\Theta = 0$ (рис.5а). Поэтому на фазовой плоскости $(\Theta; d\Theta/d\xi)$ точка $(0; 0)$ является устойчивым положением равновесия типа «центр», а точки $(\pm \sqrt{m_1/m_2}; 0)$ – неустойчивыми положениями равновесия типа «узел». Фазовый портрет системы приведен на (рис.5б).

Ограниченные решения уравнения (2.20) в этом случае существуют только при $0 \leq E \leq f_{max}$. При этом полином $E - f(\Theta)$ имеет четыре действительных корня $\Theta_{1,2} = \pm \alpha$, $\Theta_{3,4} = \pm \beta$, где

$$\alpha^2 = \frac{m_1 - \sqrt{m_1^2 + 4m_2E}}{-m_2}, \quad \beta^2 = \frac{m_1 + \sqrt{m_1^2 + 4m_2E}}{-m_2}, \quad (\alpha^2 > \beta^2) \quad (21)$$

и принимает положительные значения при $-\alpha < \Theta < \alpha$. При $E = f_{max} = -m_1^2/4m_2$ корни попарно совпадают $\Theta_1 = \Theta_3$, $\Theta_2 = \Theta_4$, что соответствует на фазовой плоскости движению по сепаратрисе.

Уравнение (20) принимает вид:

$$\alpha\beta \sqrt{-\frac{m_2}{2}} d\xi = \frac{d\Theta}{\sqrt{(1 - (\Theta^2/\alpha^2))(1 - (\Theta^2/\beta^2))}} \quad (22)$$

и с помощью замены

$$\frac{\Theta}{\alpha} = z \quad (23)$$

приводится к эллиптическому интегралу первого рода

$$\sqrt{\frac{m_2}{2}} (\xi - \xi_0) = \frac{1}{\beta} \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-s^2z^2)}}, \quad (24)$$

где $s^2 = \alpha^2/\beta^2$.

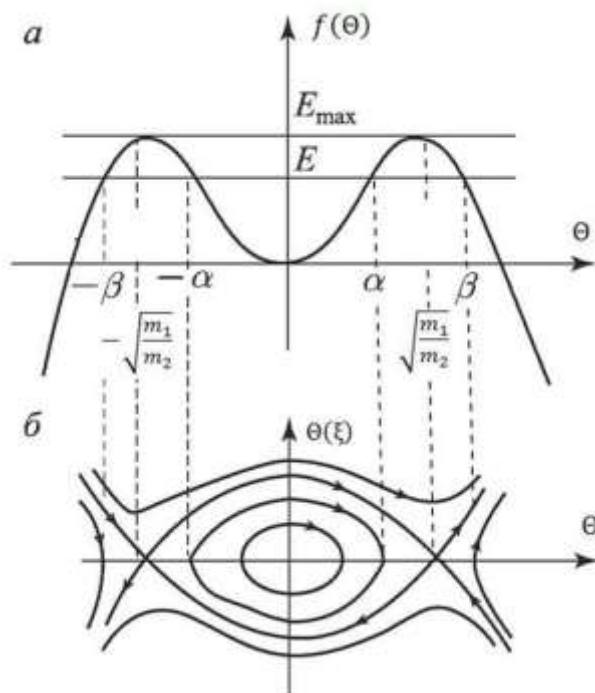


Рис.5.

Обращая эллиптический интеграл, стоящий в правой части (24) при $z = 0, \xi_0 = 0$, получаем решение, описывающее нелинейные периодические колебания в виде:

$$\Theta(\xi) = \alpha \operatorname{sn} \left(-\sqrt{\frac{1}{2} m_2 \beta^2 \xi}, s \right) \quad (25)$$

В выражении (25) введем обозначения:

$$A = \alpha = \sqrt{\frac{(m_1 - \sqrt{m_1^2 + 4m_2 E})}{-m_2}}$$

$$k = \sqrt{-\frac{1}{2} m_2 \beta^2} = \sqrt{\frac{1}{2} (m_1 + \sqrt{m_1^2 + 4m_2 E})} \quad (26)$$

$$s^2 = \frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{m_1 - \sqrt{m_1^2 + 4m_2 E}}{m_1 + \sqrt{m_1^2 + 4m_2 E}}$$

где A – амплитуда стационарной волны, k – нелинейный аналог волнового числа, s – модуль эллиптической функции, а длина волны Λ равна $\Lambda = 4\mathbf{K}(s)/k$. Из соотношений (26) следует, что при изменении E от 0 до $E_{max} = -m_1^2/4m_2$ частота колебаний

уменьшается от $k = \sqrt{m_1}$ до $k = \sqrt{m_1/2}$, а амплитуда колебаний изменяется в пределах $0 \leq A \leq A_c^1 = \sqrt{m_1/m_2}$, где A_c^1 - амплитуда колебания, соответствующая на фазовой плоскости движению по сепаратрисе. Модуль эллиптической функции (коэффициент линейных искажений) при этом изменяется в интервале $0 \leq s^2 \leq 1$.

Аналогично, исключая E из выражений (26), получим связи между параметрами A, k, s в решении (25):

$$s^2 = -\frac{m_1 A^2}{2m_1 + m_2 A^2}, \quad k = \sqrt{\frac{2m_1 + m_2 A^2}{2}}, \quad \Lambda = \frac{4K(s)}{\sqrt{m_1 + m_2 A^2/2}} \quad (27)$$

Другая форма этих выражений:

$$A = \pm \sqrt{-\frac{2m_1}{m_2} \frac{s^2}{1+s^2}}, \quad k = \sqrt{\frac{m_1}{1+s^2}} \quad (28)$$

С учетом введенных обозначений решение (25), описывающее нелинейные периодические колебания по замкнутым фазовым траекториям вблизи сепаратрисы, можно представить в виде эллиптического синуса:

$$\Theta(\xi) = A \operatorname{sn}(k\xi, s) \quad (29)$$

Параметры крутильной стационарной волны связаны соотношением (29). При подстановке в (29) выражений (18) получим:

$$A = \pm \sqrt{\frac{(V^2 - c_s^2)\rho l_r}{2\alpha_1} \frac{s^2}{(1+s^2)}} \quad (30)$$

Следовательно, амплитуда волны растет прямо пропорционально с ростом ее скорости, а угол наклона кривых (30) возрастает при увеличении s от 0 до 1. При s близких к единице, форма колебаний приведена на рис.6а.

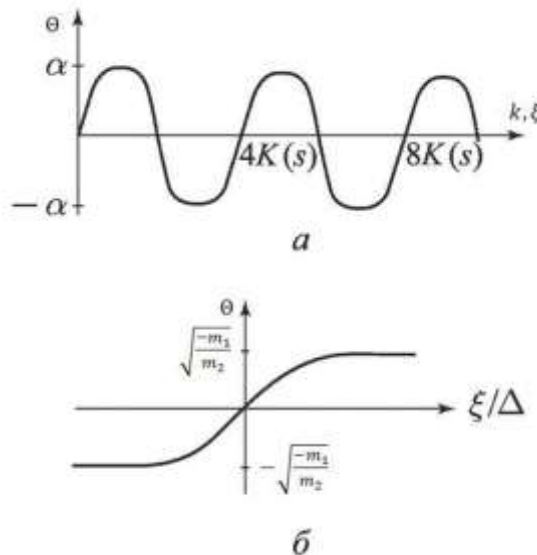


Рис. 6.

Уединенная волна, является предельным случаем периодических волн (29). При $E = E_{max} = -m_1^2/4m_2, s^2 = 1$ выражение (25) описывает сепаратрисное решение:

$$\Theta(\xi) = A \operatorname{th}\left(\frac{\xi}{\Delta}\right), \quad (31)$$

где

$$A = \pm \sqrt{-\frac{m_1}{m_2}} = \pm \sqrt{\frac{(V^2 - c_s^2)\rho I_r}{4\alpha_1}} \quad (32)$$

$$\Delta = \frac{1}{k} = \sqrt{\frac{2}{m_2}} = \sqrt{\frac{2I_\omega [V^2 - ((I_x + I_g)/I_g) c_\tau^2] (V^2 - c_0^2)}{(V^2 - c_s^2) c_\tau^2 I_g}} \quad (33)$$

V – скорость уединенной волны, A – амплитуда, Δ - ширина. Сепаратрисное решение имеет форму перепада, его вид представлен на рис. 6б.

Амплитуда уединенной волны увеличивается с ростом скорости, но ее график лежит выше соответствующей зависимости (30) для периодической волны.

Ширина уединенной волны (33) при $c_s < V < c_\tau \sqrt{(I_x + I_g)/I_g}$ уменьшается пропорционально $1/V$. При скоростях $V > c_0$ проявляется аномальное поведение уединенной волны, которое выражается в увеличении ее ширины ($\Delta \sim V$) с ростом ее скорости и амплитуды.

Пусть $m_1 < 0$, $m_2 > 0$. Этот случай справедлив для скоростей находящихся в интервале $c_\tau \sqrt{(I_x + I_g)/I_g} < V < c_0$. В этом случае функция потенциальной энергии $f(\theta) = (m_1/2)\theta^2 - (m_2/4)\theta^4$ имеет локальный максимум $f_{max} = 0$ при $\theta = 0$ и локальный минимум $f_{min} = -m_1^2/4m_2$ в точках $\theta = \pm \sqrt{-m_1/m_2}$ (рис.7а). На фазовой плоскости $(\theta; d\theta/d\xi)$ точки $(\pm \sqrt{-m_1/m_2}, 0)$ являются устойчивым положением равновесия типа «центр», а точка $(0, 0)$ является «седлом» (рис. 7б).

Ограниченные решения уравнения (20) существуют, если константа интегрирования изменяется в диапазоне $f_{min} \leq E < +\infty$, причем различным значениям начальной энергии E соответствуют качественно различные режимы движения.

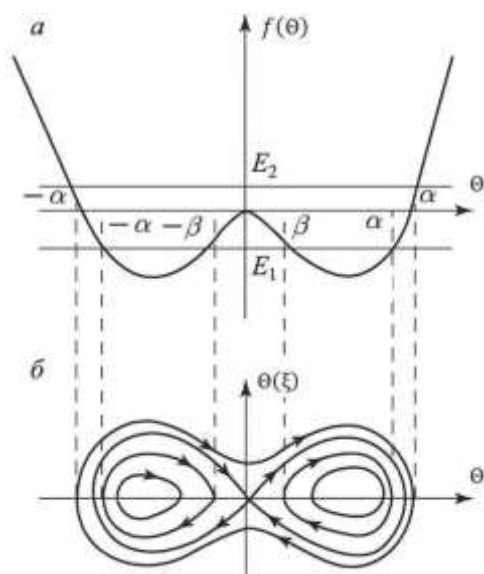


Рис. 7.

Пусть $f_{min} \leq E \leq 0$. В этом случае полином $E - f(\Theta)$ имеет четыре действительных корня $\Theta_{1,2} = \pm\alpha$, $\Theta_{3,4} = \pm\beta$, где

$$\alpha^2 = \frac{-m_1 + \sqrt{m_1^2 + 4m_2E}}{m_2}, \quad \beta^2 = \frac{-m_1 - \sqrt{m_1^2 + 4m_2E}}{m_2}, \quad (\alpha^2 \geq \beta^2) \quad (34)$$

и принимает положительные значения в областях $|\alpha| \leq \Theta \leq |\beta|$ (рис. 7а). На фазовой плоскости им соответствуют замкнутые траектории, лежащие внутри сепаратрисы.

Уравнение (20) принимает вид:

$$\alpha\beta\sqrt{\frac{m_2}{2}}d\xi = \frac{d\Theta}{\sqrt{-(1 - (\Theta^2/\alpha^2))(1 - (\Theta^2/\beta^2))}} \quad (35)$$

и с помощью замены

$$\frac{\Theta}{\alpha} = \sqrt{1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2}z^2} \quad (36)$$

сводится к эллиптическому интегралу первого рода

$$\sqrt{\frac{m_2}{2}}(\xi - \xi_0) = \frac{1}{\alpha} \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - s^2z^2)}}, \quad (37)$$

где $s^2 = (\alpha^2 - \beta^2)/\alpha^2$. Обращая эллиптический интеграл при $z = 0$, $\xi_0 = 0$, получаем решение, описывающее нелинейные периодические колебания в виде:

$$\Theta(\xi) = \alpha \operatorname{dn} \left(\sqrt{\frac{1}{2}m_2\alpha^2} \xi, s \right) \quad (38)$$

В выражении (38) введем обозначения:

$$\begin{aligned} A &= \alpha = \sqrt{\frac{(-m_1 + \sqrt{m_1^2 + 4m_2E})}{m_2}} \\ k &= \sqrt{-\frac{1}{2}m_2\alpha^2} = \sqrt{\frac{1}{2}(-m_1 + \sqrt{m_1^2 + 4m_2E})} \\ s^2 &= \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\beta^2} = \frac{2\sqrt{m_1^2 + 4m_2E}}{-m_1 + \sqrt{m_1^2 + 4m_2E}} \end{aligned} \quad (39)$$

где A – амплитуда стационарной волны, k – нелинейный аналог волнового числа, s – модуль эллиптической функции, $\Lambda = 4\mathbf{K}(s)/k$ – длина волны. Из соотношений (39) следует, что при изменении E от $E_{min} = -m_1^2/4m_2$ до 0 частота колебаний увеличивается от $k = \sqrt{-m_1/2}$ до $k = \sqrt{-m_1}$, а амплитуда периодических колебаний изменяется от значения $A = A_c^1 = \sqrt{-m_1/m_2}$ до значения $A = A_c^2 = \sqrt{-2m_1/m_2}$, где A_c^1 , A_c^2 – амплитуды колебаний, соответствующих движений по сепаратрисам для фазовых портретов, приведенных на рис. 5 и 7 соответственно. Модуль эллиптической функции меняется в пределах $0 \leq s^2 \leq 1$.

Исключая из выражений (39) константу интегрирования E , получим зависимость между параметрами A , k , s в решении (38):

$$s^2 = 2 \left(1 + \frac{m_1}{m_2 A^2} \right), \quad k = \sqrt{m_2 A^2 / 2}, \quad \Lambda = \frac{4\sqrt{2}K(s)}{\sqrt{m_2 A^2}}, \quad (40)$$

которые можно представить в виде:

$$A = \sqrt{-\frac{2m_1}{m_2} \frac{1}{2-s^2}} = \sqrt{\frac{(V^2 - c_s^2)\rho I_r}{2\alpha_1} \frac{1}{2-s^2}}, \quad k = \sqrt{-\frac{m_1}{2-s^2}}, \quad 0 \leq s^2 \leq 1 \quad (41)$$

т.е. $A \sim V$, но амплитуда периодической волны при любом s меньше амплитуды уединенной волны.

С учетом введенных обозначений решение (38), описывающее нелинейные периодические колебания по замкнутым фазовым траекториям внутри сепаратрисы можно представить в виде эллиптической функции дельта-амплитуды:

$$\Theta(\xi) = A \operatorname{dn}(k\xi, s) \quad (42)$$

Эти колебания не имеют линейного вырождения, так как при $E \rightarrow E_{min} =$

$$= -\frac{m_1^2}{4m_2} s \rightarrow 0 \text{ и } \operatorname{dn}(k\xi, s) = 1.$$

При $E = 0, s = 1$ из (38) получаем вырождение в сепаратрисное решение:

$$\Theta(\xi) = A_c^2 \operatorname{ch}^{-1}(\xi/\Delta) \quad (43)$$

где:

$$A_c^2 = \pm \sqrt{-\frac{2m_1}{m_2}} = \pm \sqrt{\frac{(V^2 - c_s^2)\rho I_r}{2\alpha_1}} \quad (44)$$

$$\Delta = \frac{1}{k} = \sqrt{-\frac{1}{m_1}} = \sqrt{\frac{I_\omega [V^2 - ((I_x + I_g)/I_g) c_t^2] (V^2 - c_0^2)}{(V^2 - c_s^2) c_t^2 I_g}}$$

A_c^2 – амплитуда колебания Δ – ширина уединенной волны.

Видно, что в этом диапазоне $A \sim V$, а $\Delta \sim \sqrt{1 - V^2/c_0^2}$. Качественный вид нелинейных периодических движений, описываемых дельта-амплитудой приведен на рис. 8а, а на рис.8в показан вид сепаратрисного решения.

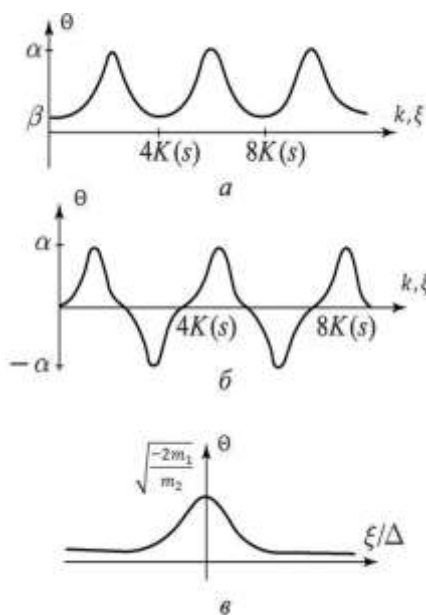


Рис. 8

Если $E = 0$, то в этом случае полином $E - f(\Theta)$ имеет два действительных корня $\Theta_{1,2} = \pm\alpha$, $\Theta_{3,4} = \pm i\beta$, где

$$\alpha^2 = \frac{-m_1 + \sqrt{m_1^2 + 4m_2E}}{m_2}, \quad \beta^2 = \frac{m_1 + \sqrt{m_1^2 + 4m_2E}}{m_2} \quad (45)$$

и принимает положительные значения в областях $-\alpha < \Theta < \alpha$ (рис. 7а). На фазовой ограниченные решениями при таких значениях E соответствуют замкнутые фазовые траектории, лежащие вне петли сепаратрисы (рис. 7б).

Уравнение (20) принимает вид:

$$\alpha\beta\sqrt{\frac{m_2}{2}}d\xi = \frac{d\Theta}{\sqrt{(1 - (\Theta^2/\alpha^2))(1 - (\Theta^2/\beta^2))}} \quad (46)$$

и с помощью замены

$$\frac{\Theta}{\alpha} = \sqrt{1 - z^2} \quad (47)$$

сводится к эллиптическому интегралу первого рода

$$\sqrt{\frac{m_2}{2}}(\xi - \xi_0) = -\frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - s^2z^2)}}, \quad (48)$$

где $s^2 = \alpha/(\alpha^2 + \beta^2)$.

Обращая эллиптический интеграл при $z = 0, \xi_0 = 0$, получаем решение, описывающее нелинейные периодические колебания в виде:

$$\Theta(\xi) = \alpha \operatorname{cn} \left(\sqrt{\frac{m_1}{2}}(m_1^2 + \beta^2) \xi, s \right) \quad (49)$$

В выражении (49) введем обозначения:

$$\begin{aligned} A &= \alpha = \sqrt{\frac{(-m_1 + \sqrt{m_1^2 + 4m_2E})}{m_2}} \\ k &= \sqrt{\frac{m_1}{2}}(\alpha^2 + \beta^2) = (m_1^2 + 4m_2E)^{1/4} \\ s^2 &= \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{-m_1\sqrt{m_1^2 + 4m_2E}}{2\sqrt{m_1^2 + 4m_2E}} \end{aligned} \quad (50)$$

где A – амплитуда стационарной волны, k – нелинейный аналог волнового числа, s – модуль эллиптической функции, $\Lambda = 4\mathbf{K}(s)/k$ – длина волны.

Анализируя соотношения (50) получим, что при изменении E от 0 до $+\infty$ частота колебаний возрастает от значения $k = \sqrt{-m_1}$ до $+\infty$, амплитуда колебаний так же неограниченно возрастает от значения $A = A_c^1 = \sqrt{-2m_1/m_2}$, а модуль эллиптической функции при этом уменьшается $0,5 \leq s \leq 1$.

Исключая константу интегрирования E из (50), получим зависимость между параметрами A, k, s в решении:

$$s^2 = \left(\frac{m_2 A^2}{2(m_1 + m_2 A^2)} \right), \quad k = \sqrt{2m_1 + m_2 A^2}, \quad \Lambda = \frac{4\mathbf{K}(s)}{\sqrt{m_1 + m_2 A^2}}. \quad (51)$$

Эти соотношения можно представить в виде:

$$A = \sqrt{-\frac{2m_1}{m_2} \frac{s^2}{2s^2 - 1}} = \sqrt{\frac{(V^2 - c_s^2)\rho I_r}{2\alpha_1} \frac{s^2}{2s^2 - 1}},$$

$$k = \sqrt{-\frac{m_1}{2s^2 - 1}},$$

$$1 > s^2 > \frac{1}{2}$$
(52)

С учетом введенных обозначений решение (49), описывающее колебания по замкнутым фазовым траекториям вне сепаратрисы представляется в виде:

$$\Theta(\xi) = A \operatorname{cn}(k\xi, s) \tag{53}$$

Это решение описывает нелинейные колебания, которые не имеют линейного вырождения. Их форма при s^2 близких к единице показана на рис.8б. При $s = 1$ из (53) получаем сепаратрисное решение (43). Амплитуда таких периодических колебаний всегда больше амплитуды уединенных.

На основании приведенных рассуждений можно сделать следующий вывод: если стержень обладает геометрической нелинейностью ($\alpha_1 > 0$), то стационарных крутильных волн не существует в диапазоне скоростей $V < c_s$. Во всех других диапазонах нелинейные стационарные волны могут формироваться. Однако в зависимости от величины скорости V имеются качественно различные волновые картины, поскольку при этом уравнение Дуффинга (17) имеет различные решения.

Если скорость стационарной волны $c_s < V < c_\tau \sqrt{(I_x + I_g)/I_g}$ или $V > c_0$, то уравнение Дуффинга (17) имеет два типа финитных решений – периодическое (29), выражающееся через эллиптический синус и уединенное (31), являющееся предельным случаем периодического.

Для скоростей, лежащих в интервале $c_\tau \sqrt{(I_x + I_g)/I_g} < V < c_0$, фазовый портрет уравнения (17) содержит два устойчивых положения равновесия, в окрестности которых фазовые траектории имеют форму, близкую к эллипсу. В этом случае имеются три типа финитных решений. Одним из них является уединенная стационарная волна (43), связывающая между собой два класса периодических волн. На фазовой плоскости это решение соответствует сепаратрисе, проходящей через начало координат и отделяющей одну область решений от другой. Второй тип финитного решения соответствует движению по замкнутым траекториям вблизи положения равновесия и описывается эллиптической функцией дельта-амплитуды (42). Другой тип периодических движений описывается эллиптическим косинусом (53).

Типы фазовых портретов уравнения (17) в зависимости от скорости стационарной волны приведены на рис.9.

Если стержень обладает физической нелинейностью ($\alpha_1 < 0$), то возможны следующие случаи:

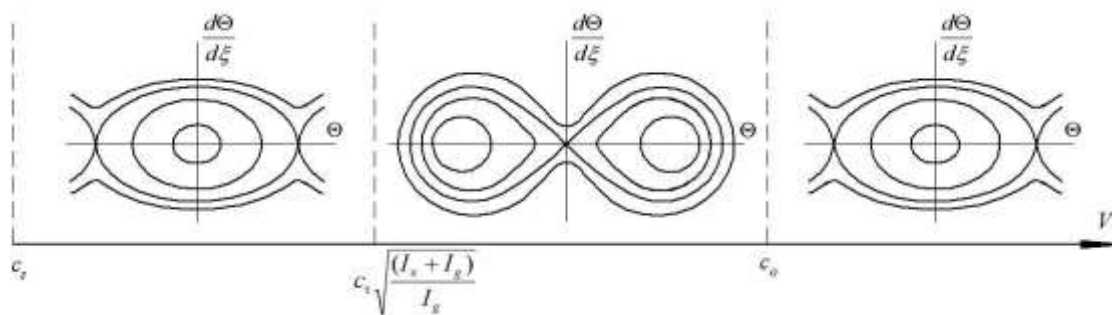


Рис. 9

Пусть $m_1 > 0, m_2 > 0$. Это справедливо если скорость стационарной волны находится в диапазоне $c_s < V < c_\tau \sqrt{(I_x + I_g)/I_g}$ или $V > c_0$. В этом случае функция потенциальной энергии $f(\Theta) = (m_1/2)\Theta^2 - (m_2/4)\Theta^4$ имеет локальный минимум $f_{min} = 0$ в при $\Theta = 0$ (рис.10 а). На фазовой плоскости $(\Theta; d\Theta/d\xi)$ точка с координатами $(0, 0)$ является устойчивым положением равновесия типа «центр» (рис. 10 б).

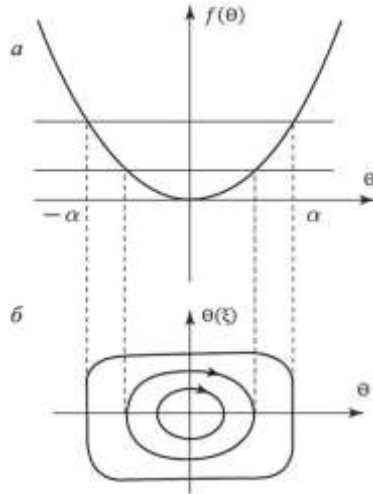


Рис. 10.

Ограниченные решения уравнения (20) существуют при $0 < E < +\infty$. Полином $E - f(\Theta)$, в этом случае, имеет два действительных корня $\Theta_{1,2} = \pm\alpha$ и два мнимых корня $\Theta_{3,4} = \pm i\beta$, где

$$\alpha^2 = \frac{-m_1 + \sqrt{m_1^2 + 4m_2E}}{m_2}, \quad \beta^2 = \frac{m_1 + \sqrt{m_1^2 + 4m_2E}}{m_2} \quad (54)$$

и принимает положительные значения в областях $-\alpha < \Theta < \alpha$ (рис. 10 а).

Тогда уравнение (20) запишется в виде:

$$\alpha\beta \sqrt{\frac{m_2}{2}} d\xi = \frac{d\Theta}{\sqrt{(1 - (\Theta^2/\alpha^2))(1 - (\Theta^2/\beta^2))}} \quad (55)$$

и с помощью замены

$$\frac{\Theta}{\alpha} = \sqrt{1 - z^2} \quad (56)$$

сводится к эллиптическому интегралу первого рода

$$\sqrt{\frac{m_2}{2}} (\xi - \xi_0) = -\frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - s^2 z^2)}}, \quad (57)$$

где $s^2 = \alpha/(\alpha^2 + \beta^2)$.

Обращая эллиптический интеграл при $z = 0, \xi_0 = 0$, стоящий в правой части (57), получаем решение, описывающее нелинейные периодические колебания в виде:

$$\Theta(\xi) = \alpha \operatorname{cn} \left(\sqrt{\frac{m_1}{2} (\alpha^2 + \beta^2)} \xi, s \right) \quad (58)$$

В выражении (58) введем обозначения:

$$A = \alpha = \sqrt{\frac{(-m_1 + \sqrt{m_1^2 + 4m_2E})}{m_2}}$$

$$k = \sqrt{\frac{m_1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)} = (m_1^2 + 4m_2E)^{1/4} \quad (59)$$

$$s^2 = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{-m_1\sqrt{m_1^2 + 4m_2E}}{2\sqrt{m_1^2 + 4m_2E}}$$

где A – амплитуда стационарной волны, k – нелинейный аналог волнового числа, s – модуль эллиптической функции, имеющий смысл коэффициента нелинейных искажений формы колебания $\Theta(\xi)$. Из соотношений (59) видно, что при изменении E от 0 до $+\infty$, амплитуда колебаний и частота изменяются в пределах $0 < A < +\infty$, $\sqrt{m_1} < k < \infty$, а коэффициент нелинейных искажений – в интервале $0,5 \leq s^2 \leq 1$.

Исключая константу интегрирования E из (59), получаем связи между параметрами A , k , s в решении (58):

$$s^2 = \frac{m_2A^2}{2(m_1 + m_2A^2)}, \quad k = \sqrt{m_1 + m_2A^2}, \quad \Lambda = \frac{4\mathbf{K}(s)}{\sqrt{m_1 + m_2A^2}} \quad (60)$$

где Λ – длина волны, $\mathbf{K}(s)$ – полный эллиптический интеграл первого рода.

Из этих соотношений выразим зависимость амплитуды и частоты колебаний от коэффициента нелинейных искажений и коэффициентов уравнения Дуффинга:

$$A = \sqrt{\frac{2m_1}{m_2} \frac{s^2}{1 - 2s^2}} = \sqrt{\frac{(V^2 - c_s^2)\rho I_r}{-2\alpha_1} \frac{s^2}{1 - 2s^2}}, \quad k = \sqrt{\frac{m_1}{1 - s^2}} \quad (61)$$

При $E \rightarrow +\infty$ ($s^2 \approx 0$ и $A \rightarrow 0$) выражение описывает квазигармонические колебания вблизи положения равновесия вида:

$$\Theta = A \cos(k, \xi) \quad (62)$$

При $E \rightarrow +\infty$, $s^2 \rightarrow 1/2$ и в этом случае (58) описывают существенно нелинейные колебания,

$$\Theta = A \operatorname{cn}(k\xi, s) \quad (63)$$

которые имеют пилообразную форму (рис. 11).

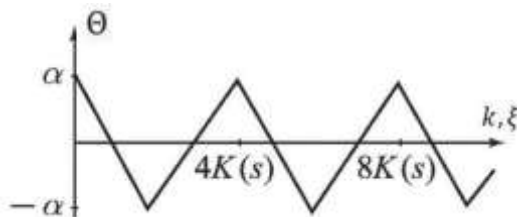


Рис.11.

В диапазоне скоростей $V < c_s$ фазовый портрет уравнения (17) содержит два положения равновесия типа «центр», а точка $(0, 0)$ является седлом (см. рис. 7б). В этом случае, как и для стержня, обладающего геометрической нелинейностью, будут иметь место три типа финитных решений, двум из которых отвечают периодические волны (48) и (53), а третьему – уединенная волна (43).

Скорость, амплитуда и ширина уединенной волны связаны соотношениями (44). Параметры периодической волны (42) связаны между собой соотношением (41), а параметры периодической волны (53) соотношением (52).

Если скорость V находится в диапазоне $c_{\tau} \sqrt{(I_x + I_g)/I_g} < V < c_0$, а это означает, что $m_1 < 0$, $m_2 > 0$, то уравнение (17) не имеет замкнутых фазовых траекторий. Следовательно, в этом интервале скоростей нелинейных стационарных волн не существует.

Типы фазовых портретов уравнения Дуффинга в зависимости от скорости стационарной волны для стержня обладающего физической нелинейностью приведены на рис. 12.

В результате проведенного анализа показано, что совместное действие нелинейности (вызванной высокой интенсивностью вибрации) и дисперсией (обусловленной депланацией) в стержне могут формироваться несинусоидальные стационарные волны, распространяющиеся с постоянной скоростью без изменения формы.

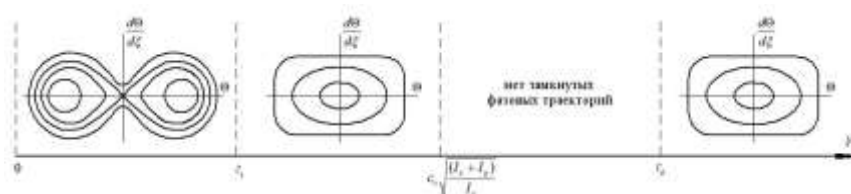


Рис. 12.

4. Волновые процессы в тонкостенном стержне при одновременном учете квадратичной и кубической нелинейностей. Если при анализе стационарных волн учитывать в (9) и кубическую, и квадратичную нелинейности, то обыкновенное дифференциальное уравнение, к которому сведется (9), будет иметь следующий вид:

$$\frac{d^2\theta}{d\xi^2} + m_1\theta + m_2\theta \frac{d\theta}{d\xi} + m_3\theta^3 = 0 \quad (64)$$

Этому уравнению эквивалентна система:

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{d\xi} = \varphi \\ \frac{d\varphi}{d\xi} = m_3\theta^3 - m_1\theta - m_2\theta\varphi \end{cases} \quad (65)$$

На фазовой плоскости (θ, φ) координаты положений равновесия ищутся из условий $(\theta = 0, \varphi = 0)$. Таким образом, ординаты всех равновесных положений равны нулю, а абсциссы являются действительными корнями алгебраического уравнения третьей степени:

$$m_1\theta - m_3\theta^3 = 0 \quad (66)$$

При $m_1 m_3 < 0$ начало координат, точка $(0,0)$ является единственным положением равновесия, причем в любом случае при $m_1 < 0$ это «седло», а при $m_1 > 0$ – «центр». Когда в системе существует единственная «седловая» точка, то периодических движений нет и этот случай для поиска стационарных волн не интересен. Если в системе имеется единственный «центр», то все движения периодические и фазовый портрет представляет собой набор непересекающихся замкнутых кривых. Для определенного набора параметров, а именно $m_1 > 0$, $m_1 = 3$ и $m_1 = -1$ удается записать точное аналитическое решение:

$$\Theta(\xi) = \frac{\sqrt{m_1} (C_1 \sin(\sqrt{m_1} \xi) + C_2 \cos(\sqrt{m_1} \xi))}{C_1 \sin(\sqrt{m_1} \xi) + C_2 \cos(\sqrt{m_1} \xi) + C_3} \quad (67)$$

где C_1, C_2, C_3 – константы интегрирования находятся из начальных условий.

На первый взгляд может показаться странным, что уравнение второго порядка, а констант интегрирования три, но это не так, поскольку числитель и знаменатель можно поделить на любую ненулевую константу и неизвестных будет две. Данная форма решения приведена здесь для общности, полагая, что любая из констант может обращаться в ноль. Непериодическое решение при этих значениях параметров и $m_1 < 0$, так же может быть записано через экспоненты с показателями $\pm \sqrt{|m_1|} \xi$. При другом наборе параметров m_2 и m_3 , конечно с теми же знаками, динамика системы качественно не изменяется, однако точных решений найти не удастся. Нелинейное слагаемое при коэффициенте m_2 несимметрично, по этому, фазовый портрет несимметричен относительно оси абсцисс. При смене знака у коэффициента m_2 на противоположный фазовый портрет (и в случае неединственного положения равновесия) симметрично отражается относительно $(0, \Theta)$, а решение (67) просто меняет знак. Движение по замкнутым фазовым траекториям всегда происходит по часовой стрелке.

При $m_1 m_3 > 0$ имеется три положения равновесия с координатами $(-\sqrt{m_1/m_3}, 0)$, $(0, 0)$ и $(\sqrt{m_1/m_3}, 0)$, при $m_3 > 0$, $(\pm \sqrt{m_1/m_3}, 0)$ – «седла», $(0, 0)$ – «центр». В этом случае все периодические движения находятся внутри области, ограниченной парой сепаратрис, исходящих из левого «седла» в правое и из правого – в левое. Из-за несимметричной нелинейности сепаратрисы также не симметричны и описываются по-разному, хотя величина перехода (амплитуда) из одного состояния в другое одинаковое, но скорость перехода разная. Так при $m_1 > 0$ сепаратриса из левого «седла» в правое имеет вид:

$$\Theta(\xi) = -\sqrt{\frac{m_1}{m_3}} \operatorname{th} \left(\frac{2m_1 m_3 \sqrt{\frac{m_1}{m_3}}}{m_1 m_2 - \sqrt{m_1^2 m_2^2 + 8m_1^2 m_3}} \xi \right) \quad (68)$$

а из правого – в левое:

$$\Theta(\xi) = -\sqrt{\frac{m_1}{m_3}} \operatorname{th} \left(\frac{2m_1 m_3 \sqrt{\frac{m_1}{m_3}}}{m_1 m_2 + \sqrt{m_1^2 m_2^2 + 8m_1^2 m_3}} \xi \right) \quad (69)$$

При смене знака перед m_2 картина симметрично отражается относительно оси абсцисс.

В случае $m_1 < 0$ и $m_3 < 0$ начало координат является «седлом», а точки $(\pm \sqrt{m_1/m_3}, 0)$ «фокусами» при $m_2 > 0$ левый «фокус» – неустойчивый, правый – устойчивый. При смене знака перед m_2 устойчивость фокусов так же меняется на противоположную. При увеличении коэффициента m_2 область притяжения устойчивого «фокуса» увеличивается, за этой областью находится область периодических движений, соответствующих замкнутым фазовым траекториям. К сожалению, для этого случая никаких точных аналитических решений найти не удалось.

Все качественно различные фазовые портреты приведены в таблице.

Выводы. Обсуждается математическая модель, позволяющая описать распространение крутильной волны в тонкостенном стержне. Модель включает в себя геометрическую и физическую упругие нелинейности, а также депланацию. В этой модели связь между углом закручивания стержня и мерой депланации не постулируется, как в большинстве известных моделей, а находится в процессе решения задачи. Из анализа модели определено, что депланация, которая вызывает появление дисперсии фазовой скорости крутильной волны, приводит еще к появлению характерной для интенсивных продольных колебаний квадратичной нелинейности, не встречавшейся прежде в математических моделях, описывающих крутильные колебания. Показано, что в тонкостенном стержне, совершающем интенсивные крутильные колебания, могут формироваться локализованные в пространстве несинусоидальные волны деформации.

Таблица.

m_1	m_3	$m_2 > 0$	$m_2 < 0$
< 0	< 0		
< 0	> 0		
		Периодических движений НЕТ	Периодических движений НЕТ
> 0	< 0		
> 0	> 0		

Список литературы

1. Вибрации в технике. Справочник в 6-ти томах. Т.1/ под ред. Болотина В.В. - М.: Машиностроение, 1999. - 504 с.

2. Артоболевский И.И., Бобровницкий Ю. И., Генкин М. Д. Введение в акустическую динамику машин. - М.: Наука, 1979. - 296 с.
3. Сливкер В. И. Строительная механика. Вариационные основы. - М.: Издательство Ассоциации строительных вузов, 2005. - 736 с.
4. Ерофеев В.И., Лампси Б.Б. Нелинейная математическая модель упругого стержня, совершающего крутильные колебания, учитывающая депланацию поперечного сечения // Вестник научно-технического развития. - 2014. - № 4 (80). - С.12-15.
5. Ерофеев В.И., Лампси Б.Б. Математическая модель упругого тонкостенного стержня, совершающего крутильные колебания при наличии нелинейности и депланации // Приволжский научный журнал. - 2014. - № 2. - С.14-17.
6. Ерофеев В. И., Кажаяев В. В., Семирикова Н. П. Волны в стержнях. Дисперсия. Диспансия. Нелинейность. - М.: Физматлит, 2002. - 208 с.
7. Ерофеев В. И., Ключева Н. В. Солитоны и нелинейные периодические волны деформации в стержнях, пластинах и оболочках (обзор) // Акустический журнал. - 2002. - Т.48, №6. - С. 725-740.

Дата поступления: 24 марта 2019 г.