

УДК 534.1

## К ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОМУ ОПИСАНИЮ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ВИБРОУДАРНЫХ РЕЖИМОВ ДВИЖЕНИЯ В СТРУННЫХ РЕШЁТКАХ

© Николай Алексеевич Андрианов, Виталий Львович Крупенин

ИМАШ РАН, Москва, Россия

[krupeninster@gmail.com](mailto:krupeninster@gmail.com)

*Аннотация.* Изложены результаты исследования динамических особенностей струнной решетчатой конструкции, узлы которой соударяются с неподвижным ограничителем хода. Даны уравнения движения и приведены способы их анализа и построения решений. Экспериментально установлено, в частности, существование периодических стоячих волн, характеризующихся неодновременными ударами всех узлов в режиме силового синусоидального возбуждения, а также свойствами, аналогичными резонансным свойствам виброударной системы с одной степенью свободы (ударного осциллятора). Даны результаты анализа профилей таких волн.

**Ключевые слова:** струнная, решетка, соударения узлов, периодическая функция Грина, резонанс, фаза удара, импульс удара, профили стоячей волны, хлопок.

Работа выполнялась при поддержке Российского научного фонда (проект 19-19-00065).

## TO THE EXPERIMENTAL DESCRIPTION OF PERIODIC VIBRO-IMPACT MOTION MODES IN STRING LATTICES

© N.A. Andrianov, V.L. Krupenin

IMASH RAN, Moscow, Russia

[krupeninster@gmail.com](mailto:krupeninster@gmail.com)

**Abstract.** The results of the study of the dynamic features of a string lattice structure, whose nodes collide with a fixed travel stop, are presented. Equations of motion are given and methods for their analysis and construction of solutions are given. It has been established experimentally, in particular, the existence of periodic standing waves characterized by non-simultaneous impacts of all nodes in the regime of force sinusoidal excitation, as well as properties similar to the resonant properties of a vibro-impact system with one degree of freedom (impact oscillator). The results of the analysis of profiles of such waves are given.

**Keywords:** string, lattice, collisions of nodes, periodic Green function, nonlinear resonance, impact phase, impact impulse, standing wave profiles, claps.

**Acknowledgements.** The research was supported by the Russian Science Foundation (project No. 19-19-00065).

**1. Введение.** В работе [1] описана картина виброударных режимов движения в струнной решётке. Будем именовать струнной решеткой систему двух семейств взаимно перпендикулярных безынерционных упругих струн, образующих прямоугольные (в частности, квадратные) ячейки, в узлах которых помещены точечные абсолютно твердые тела [2]. Струнные решетки такого типа оказываются естественным  $2D$ -расширением известной в теории колебаний модели «струна с бусинами», сыгравшей весьма существенную и нетривиальную роль [3]. Модели струнных решеток могут использоваться при изучении многочисленных двумерных объектов и некоторых типов реальных машин и устройств [4]. С их помощью могут изучаться колебания узлов кристаллических решёток, а также наноструктурированных слоев металлов [5].

Отмеченные выше виброударные режимы отвечали так называемым синхронным хлопкам, ранее описанным в одномерных системах точечных грузов, имеющих ограничители хода и расположенные через одинаковые расстояния на натянутой струне [6, 7]. При реализации хлопков в системах разной размерности все узлы решеток совершали синхронные движения с соударениями о неподвижное препятствие.

Оказалось, что при изменении параметров решёток соударения узлов могут происходить и неодновременно, но в то же время синхронность их движений сохраняется. Соответствующие экспериментальные данные и приводятся в этой статье.

**2. Уравнения и представление движения.** Ниже мы дадим краткое описание экспериментального стенда «Аллигатор Квадрат», схема которого дана на рис.1, однако, вначале остановимся на уравнениях движения. Квадратная решетка [1], составленная из двух взаимно перпендикулярных семейств идентичных заземленных на концах линейных струн, имеющих длины  $l$ . Каждая струна нумеруется индексами  $k, q = 0, 1, N$ ; массы узлов есть  $m$ . При моделировании полагаем, что ячейки решётки - квадратные и одинаковые, а струны - безынерционные. Крепления струн в узлах - абсолютно жесткие; их натяжения равны  $\tau$ ; длина каждой стороны ячеек -  $\Delta L$ .

Состояние конструкции описывается функциями смещения узлов  $u_{kq}(t)$ ,  $k, q = 0, 1, \dots, N$ . При этом функция  $u_{kq}(t)$  изменяется вдоль некоторой оси, перпендикулярной плоскости статического равновесия решетки; на границах  $u_{kq} = 0$ .

Обозначим  $g_{kq}(p; t, u_{kq})$  – внешние или отнесенные к внешним силы;  $p \equiv d/dt$ . Каждый узел принадлежит двум струнам и для всех значений индексов имеем  $N_0 = N^2$  уравнений [1, 2, 4]:

$$m\ddot{u}_{kq} + c_1(2u_{kq} - u_{(k-1,q)} - u_{(k+1,q)}) + c_2(2u_{kq} - u_{(k,q-1)} - u_{(k,q+1)}) = g_{kq}(p; t, u_{kq}); \quad c_1 = \Delta L \tau^{-1}. \quad (1)$$

Система (1) может быть записана в операторном виде:

$$u_{kq}(t) = \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} L_{kq,nj}(p) g_{nj}(p; u_{nj}, t). \quad (2)$$

Операторы динамической податливости  $L_{kq,nj}(p)$  ставят в соответствие силе, приложенной в узле  $(n, j)$  перемещение узла  $(k, q)$  и подробно описаны в работе [8]. Они определяются наборами собственных частот  $\{\Omega_{kq}\}$  и коэффициентов собственных форм  $\{\Theta_{kq}\}$ .

3. Если вблизи решеток установлены ограничители хода, то система – виброударная. На рис. 1 показан плоский ограничитель, расположенный снизу; величину зазора обозначаем  $\Delta$ . Регулярные алгоритмы изучения виброударных процессов дают частотно-временные методы [6]. Разыскивая  $T$ -периодические свободные колебания с одним взаимодействием каждого

узла с ограничителем, вместо (2) получим систему интегральных уравнений гаммерштейновского типа:

$$u_{kq}(t) = \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} \int_0^T \chi_{kq,nj}(t-s) g_{nj}[u_{nj}(s), \dot{u}_{nj}(s)] ds + w_{kq}(t), \quad (3)$$

где

$$\chi_{kq,nj}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} L_{kq,nj}(ik\omega) e^{ik\omega t}$$

T-периодическая функция Грина;  $w_{kq}(t)$  - перемещения узлов  $(k, q)$  в предположении отсутствия соударений. Здесь  $g_{nj}[u_{nj}(s), \dot{u}_{nj}(s)]$  - суть сила ударного взаимодействия.

Пусть контакт узлов с ограничителем осуществляется в соответствии с концепцией Ньютона. Тогда условия ударного взаимодействия и представление силы удара:

$$u_{kq}(\varphi_{kq}) = \Delta; \quad \frac{d}{dt} u_{kq}(\varphi_{kq} - 0) = -R \frac{d}{dt} u_{kq}(\varphi_{kq} + 0), \quad g_{kq}[u_{kq}(t)] = J_{kq} \delta^T(t - \varphi_{kq}), \quad (4)$$

где  $\Delta, \varphi_{kq} \in [0, T]$  - зазор и момент удара в узле  $(k, q)$ ;  $R \in (0, 1]$  - коэффициент восстановления; импульсы ударов  $J_{kq} = m(1+R)|\dot{u}_{kq}(\varphi_{kq} - 0)|$ ;  $\delta^T(t)$  - T-периодическая последовательность  $\delta$  - функций.

Из (5) и (4), получаем  $2N^2$ -параметрическое представление, в котором неизвестные параметры движения подлежат определению:

$$u_{kq}(t) = w_{kq}(t) - \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} J_{nj} \chi_{kq,nj}(t - \varphi_{nj}), \quad k, q = 1, 2, \dots, N. \quad (5)$$

Из первой и второй формул (5) (условий соударений) находим систему уравнений

$$\Delta \equiv u_{kq}(\varphi_{kq}) = w_{kq}(\varphi_{kq}) - \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} J_{nj} \chi_{kq,nj}(-\varphi_{nj}), \quad (6)$$

$$J_{kq} = 2m(1+R) \left[ \dot{w}_{kq}(\varphi_{kq}) - \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} J_{nj} \frac{d}{dt} \chi_{kq,nj}(\varphi_{kq} - \varphi_{nj} - 0) \right], \quad k, q = 1, 2, \dots, N.$$

Периодическим свободным колебаниям с одним соударением за период отвечают решения системы (6), определяющей  $2N^2$  параметров движения  $(J_{kq}; \varphi_{kq})$ . Особое внимание привлекают решения с простейшей структурой, отвечающие синфазным, антифазным или локализованным режимам [4, 6-8].

При реализации, например, синфазных периодических режимов фазы законов движения узлов решетки одинаковы. Как правило, такие или подобные режимы регистрировались экспериментально. Они отвечают нелинейным резонансным режимам.

Синфазные «хлопки» характеризуются одновременными ударами узлов. Однако, необходимо подчеркнуть, что синфазные режимы могут и не сопровождаться синхронными соударениями (см. ниже).

**3. Описание экспериментального стенда.** В состав стенда «Аллигатор Квадрат» (рис.1) входят рабочая установка, а также системы регистрации и управления.

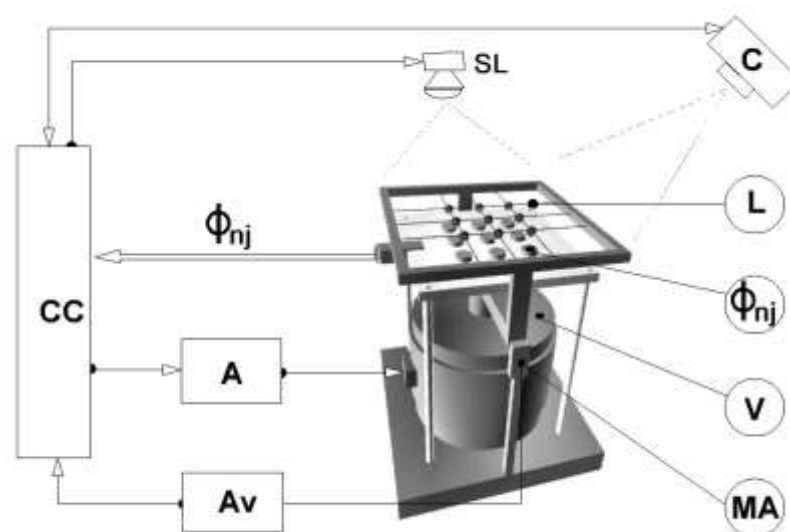


Рис.1. Установка «Аллигатор Квадрат»

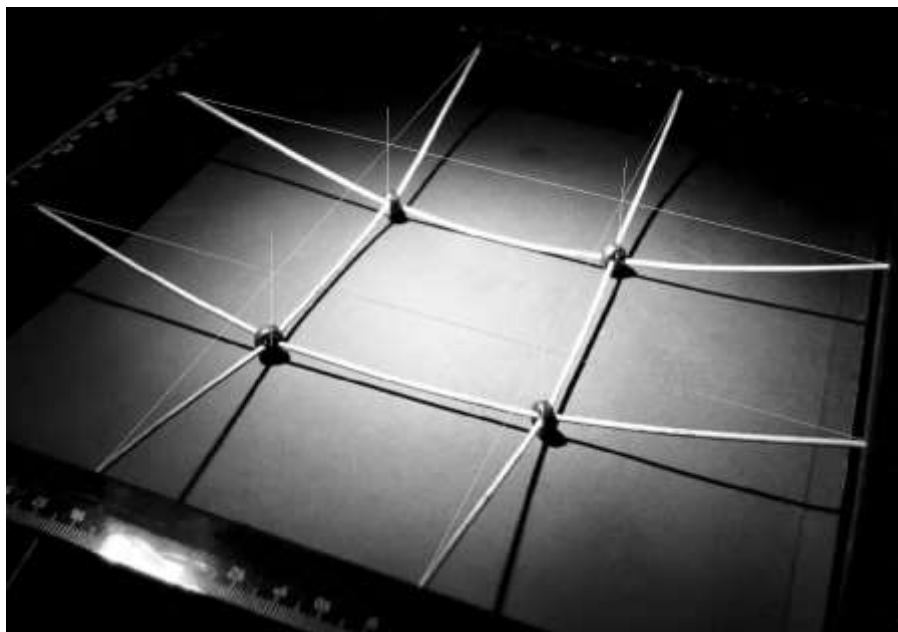
В свою очередь, рабочая установка состоит из: вибровозбудителя (**V**), сменяемых квадратных струнных решеток (**L**), размеры которых  $250 \times 250$  мм, состоящих из рамок, сделанных из алюминиевого профиля и взаимно перпендикулярных натянутых резиновых жгутов диаметром 1 мм. Величины сторон ячеек решёток контролируют прецизионные линейки. Рамки ( $2 \times 2$ ,  $3 \times 3$ ,  $4 \times 4$ ) прикрепляется к штоку вибровозбудителя. Они сконструированы так, что имеется возможность изменять параметры решетки (количество струн, размеры ячеек и др.). Узлы решеток образованы помещенными в местах пересечения жгутов тороидальными шайбами  $d=9$  мм и массой 1,1 г. Шайбы выполнены из закаленной стали; они не фиксируются жестко.

Данная установка допускает применение односторонних или двусторонних ограничителей, в качестве которых могут использоваться датчики силы, смонтированные на стальной платформе. В качестве ограничителей выступают также листы стекла толщиной 8 мм или гетинакса толщиной 10 мм. Будет рассмотрен случай одностороннего ограничителя.

Система регистрации и управления состоит из управляющего компьютера (**CC**), на который возложены функции управления вибратором и частотно-временного анализа регистрируемых величин, поступающих с усилителя мощности (**A**), цифрового стробоскопа (**SL**), измерителя амплитуды вибрации штока вибровозбудителя (**MA**), и, кроме того, также датчиков силы ( $F_{nj}$ ). Регистрация профилей стоячих волн струнных решеток осуществляет камера (**C**), работающая как в режиме фотографирования, так и в режиме ускоренной видеосъемки.

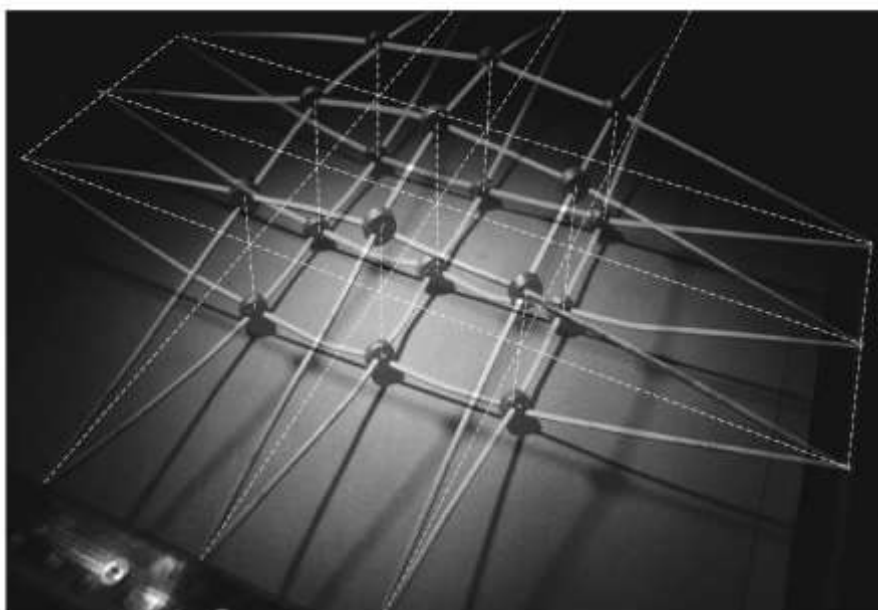
Сигналы от датчиков силы ( $F_{nj}$ ) подступают на управляющий компьютер, где могут визуализироваться на дисплее и представляться как в частотном, так и во временном диапазонах; лампа стробоскопа (**SL**) обеспечивает «остановку» движения решеток и непосредственную визуализацию профилей стоячих волн.

**4. Периодические режимы. Экспериментальные данные.** В работе [1] были описаны наблюдаемые на стенде «Аллигатор Квадрат» синфазные хлопки – периодические режимы с одновременными ударами узлов.



**Рис.2.** Хлопок в решетке 2×2

На рис. 1 и 2 показаны профили таких режимы для решеток 2×2 и 3×3. При реализации указанных режимов проявляются свойственные хлопкам нелинейные эффекты, характерные для ударных осцилляторов [6] – затягивание по частоте, срыв, явление жёсткого запуска.



**Рис.3.** Хлопок в решетке 3×3

Видно, что соударения узлов с неподвижным ограничителем происходят одновременно, но при этом величины пролётов решетки не одинаковы. Если для решётки 2×2 можно считать, что равенство пролётов выполняется приближенно, то для решётки 3×3 боковые пролёты более, чем в два раза превышают величины центральных пролётов. Получить устойчивые

режимы с одновременными соударениями при установки одинаковых ячеек в данных экспериментах не удавалось.

При выравнивании ячеек в решетке  $3 \times 3$  были зарегистрированы устойчивые периодические режимы, для которых, как и для хлопков проявлялись нелинейные резонансные явления, упомянутые выше.

На большой серии фотографий рис. 4, пронумерованных от 1 до 36. Дадим описание приводимым изображениям.

Фото 4.1 – стартовый профиль: все узлы находятся на максимальном удалении от ограничителя.

Фото 4.2—4.4: все узлы совершают движение к ограничителю. Стартовый профиль частично сохраняется. Можно увидеть, что скорость центрального узла нарастает быстрее.

Фото 4.5—4.7: координаты всех узлов приблизительно выравниваются. Все узлы выстроены в плоскости. Можно приближенно считать, что, например, профиль 4.6 отвечает синхронным ударам всех узлов для системы рис.3.

Фото 4.8—4.11: во время движения к ограничителю центральный узел движется с большей скоростью и обгоняет боковые узлы.

Фото 4.12—4.17: центральный узел снижает скорость и стремится «подождать» боковые узлы.

Фото 4.18, 19: центральный узел отстаёт, в то время как боковые узлы двигаются к ограничителю.

Фото 4.20—24: боковые узлы неодновременно соударяются с ограничителем. Центральный узел движется к ограничителю.

Фото 4.25—27: боковые узлы двигаются в направлении «от ограничителя». Центральный узел соударяется.

Фото 4.28: центральный узел совершает быстрый отскок после удара.

Фото 4.29—4.30: координаты всех узлов снова приблизительно выравниваются (см. фото 4.5.-4.7).

Фото 4.31—4.36: профиль решетки возвращается к стартовому.

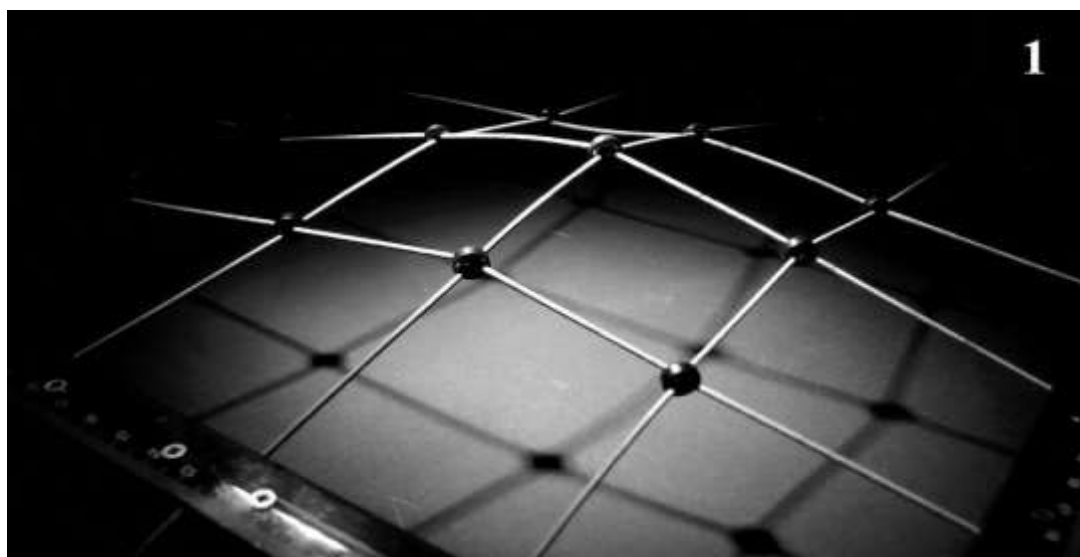


Рис.4.-1

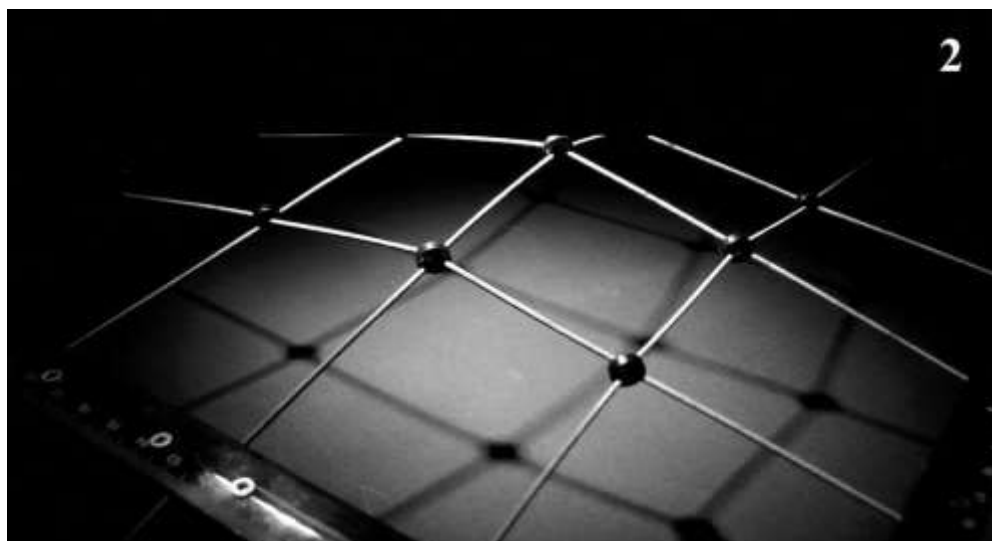


Рис.4-2

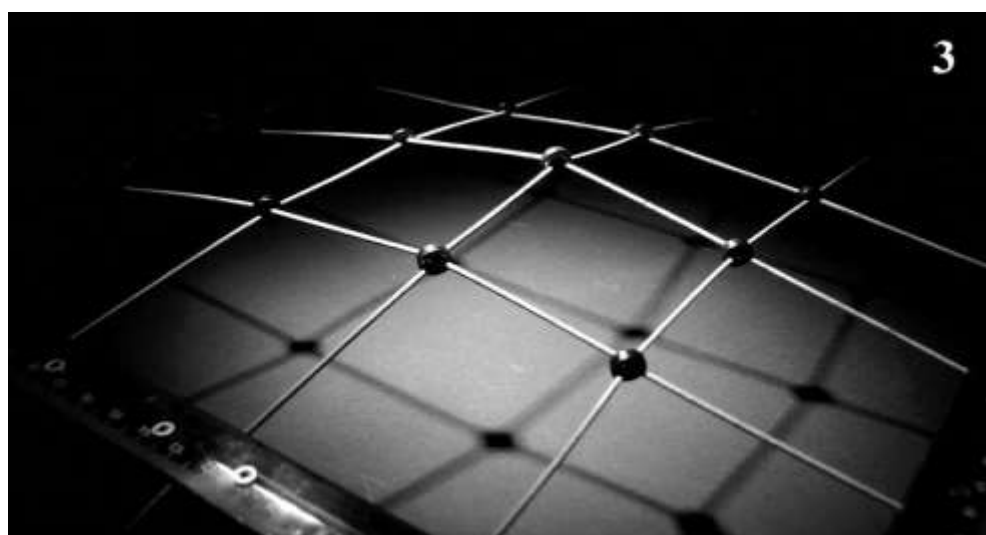


Рис.4.3

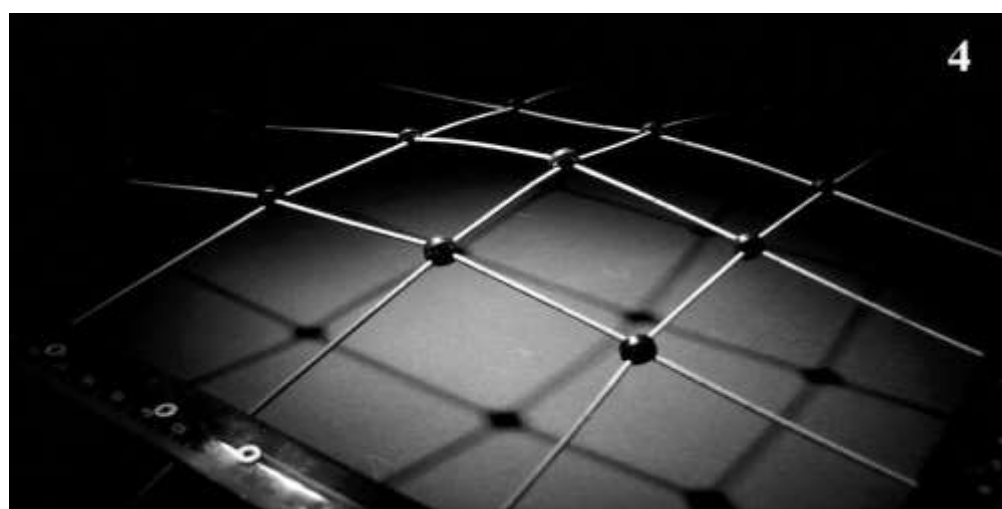


Рис.4.4

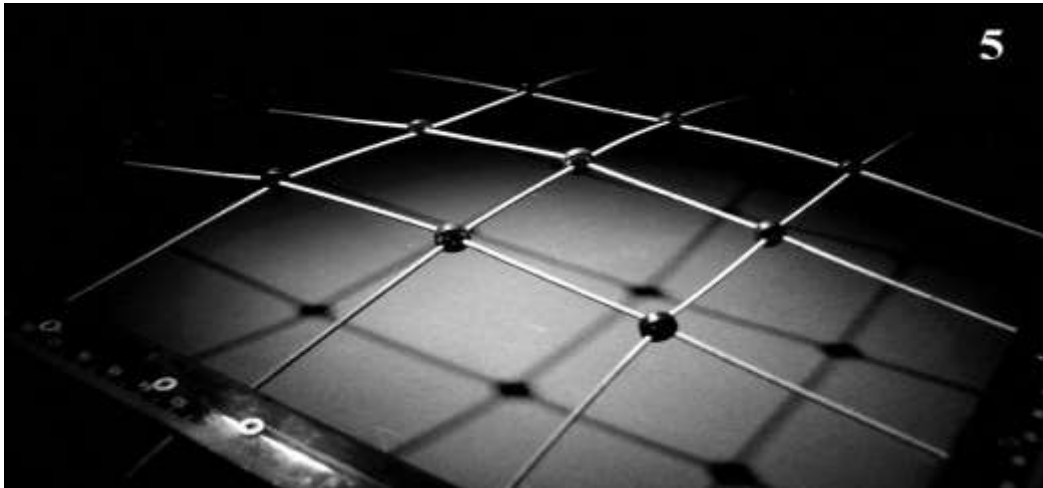


Рис.4.5.



Рис.4.6

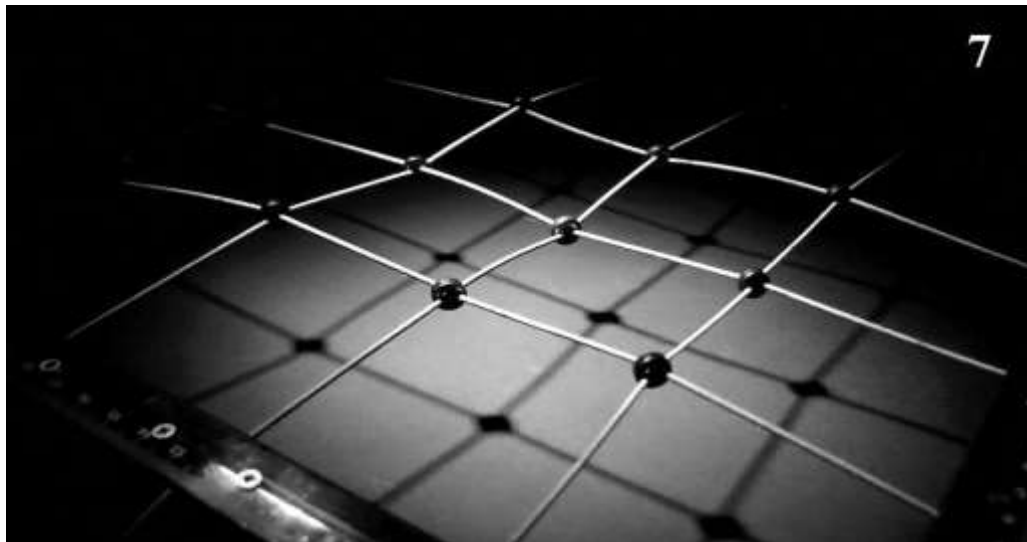


Рис.4.7



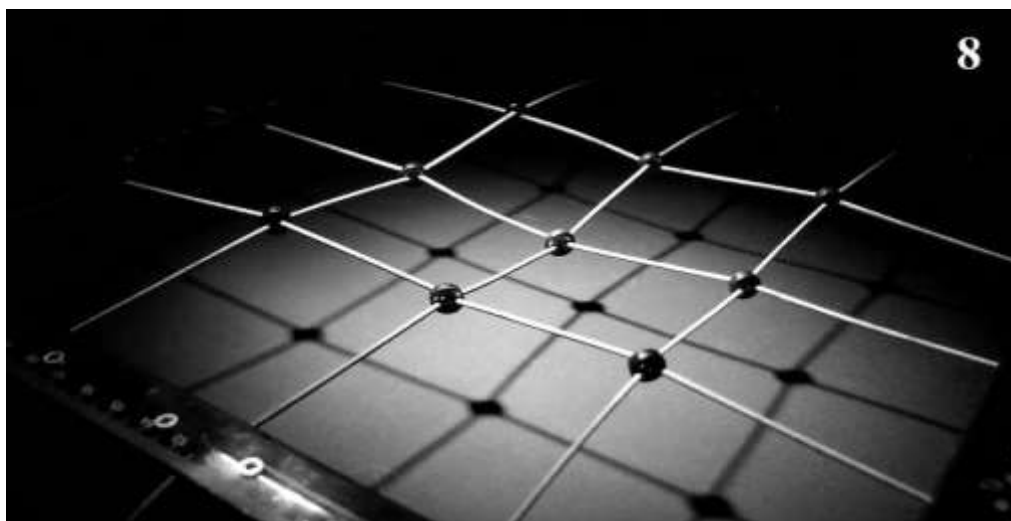


Рис.4.8



Рис.4.9

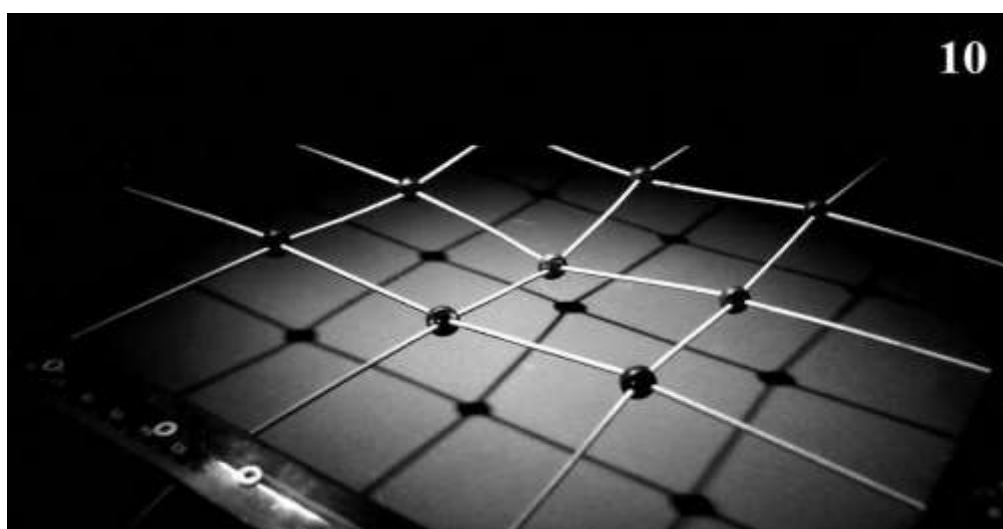


Рис.4.10

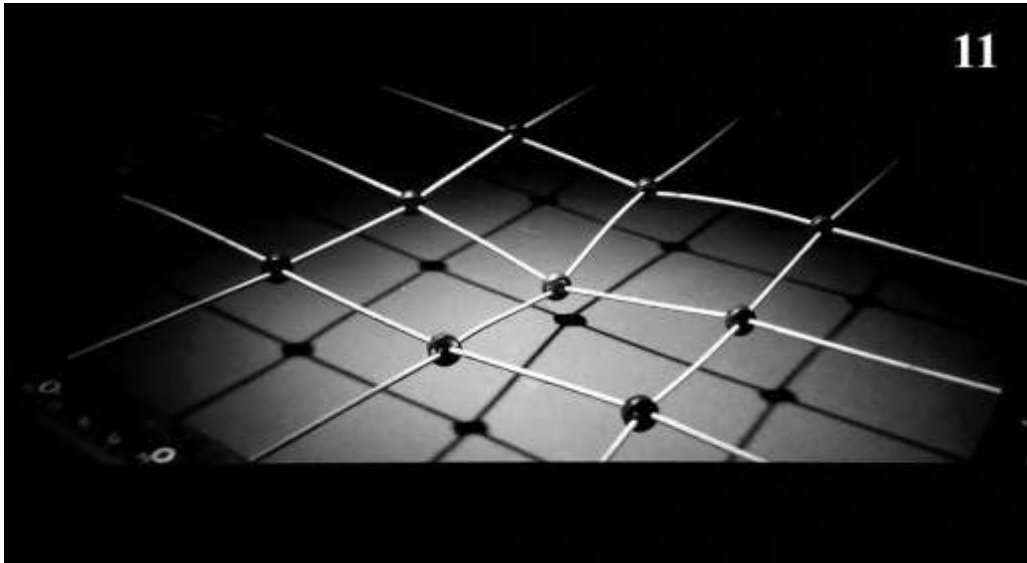


Рис.4.11



Рис.4.12



Рис.4.13



Рис.4-14



Рис.4-15



Рис.4-16



Рис.4-17



Рис.4-18



Рис.4-19



Рис.4-20



Рис.4-21



Рис.4-22



Рис.4-23



Рис.4-24



Рис.4-25



Рис.4-26

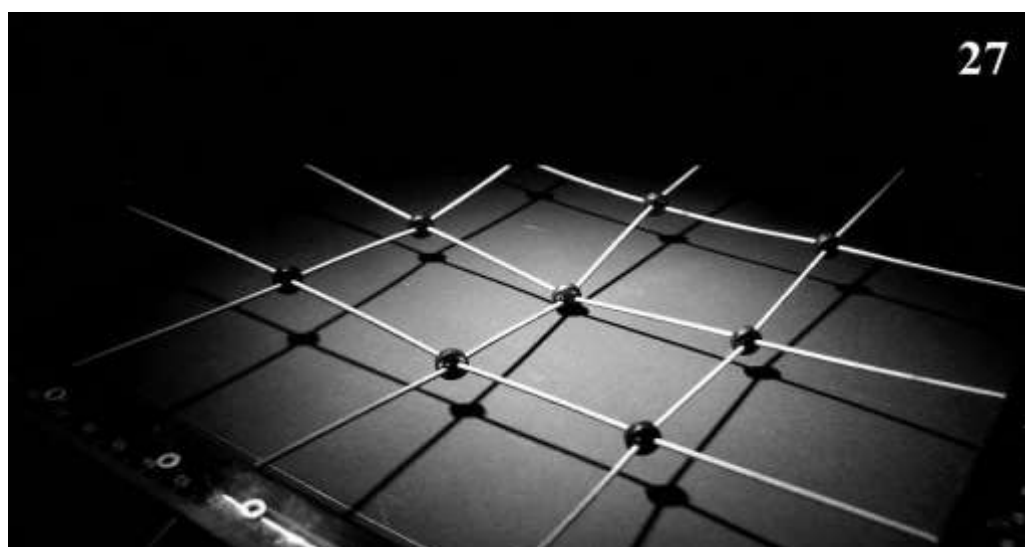


Рис.4-27

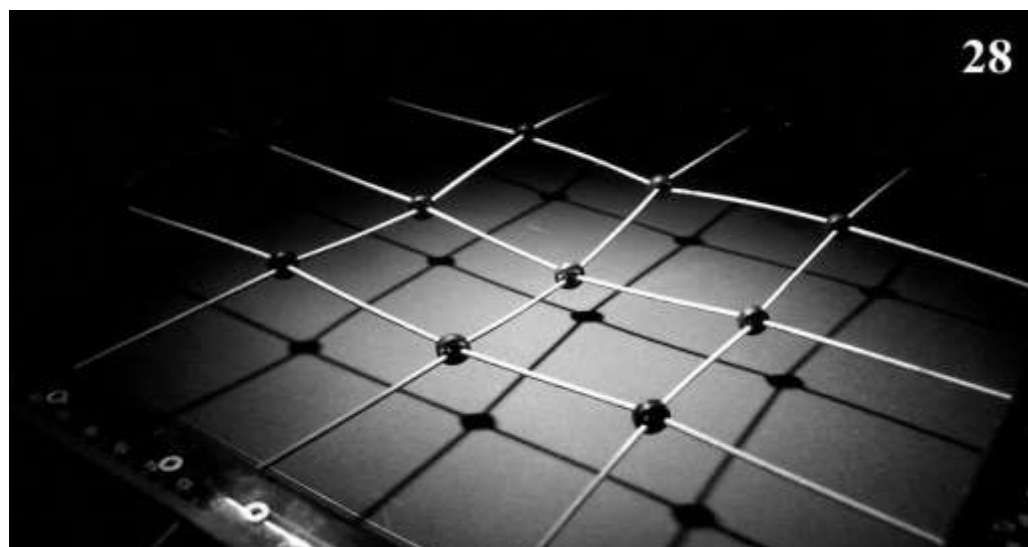


Рис.4-28

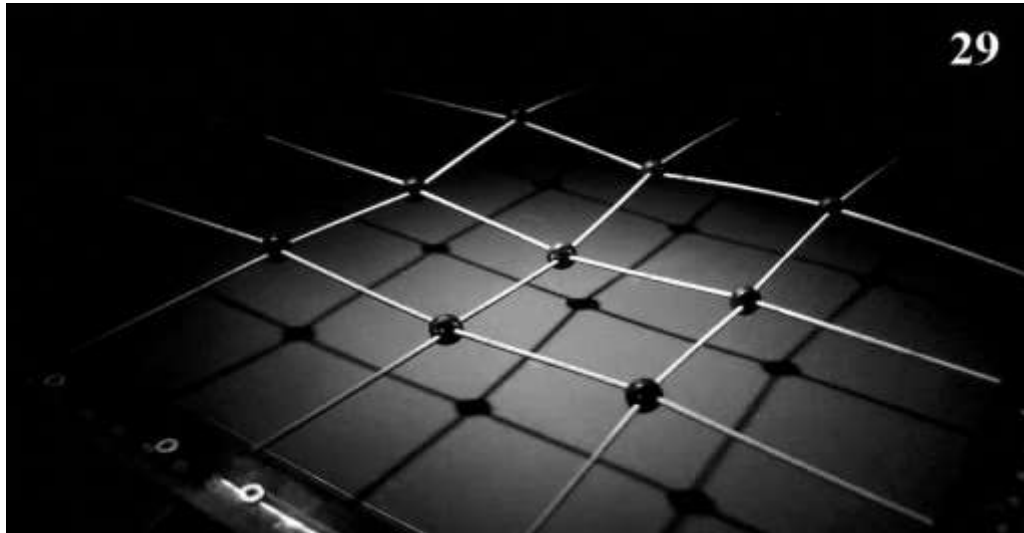


Рис.4-29

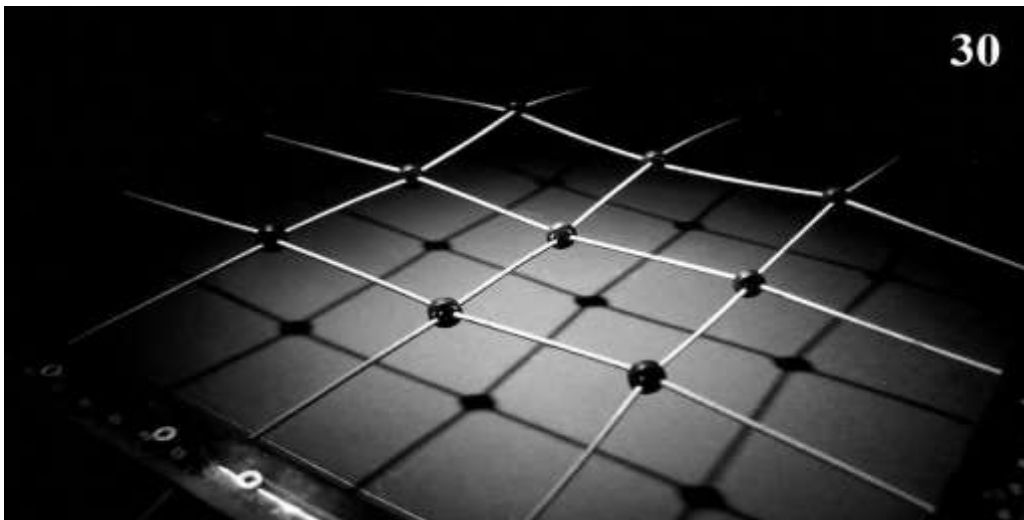


Рис.4-30

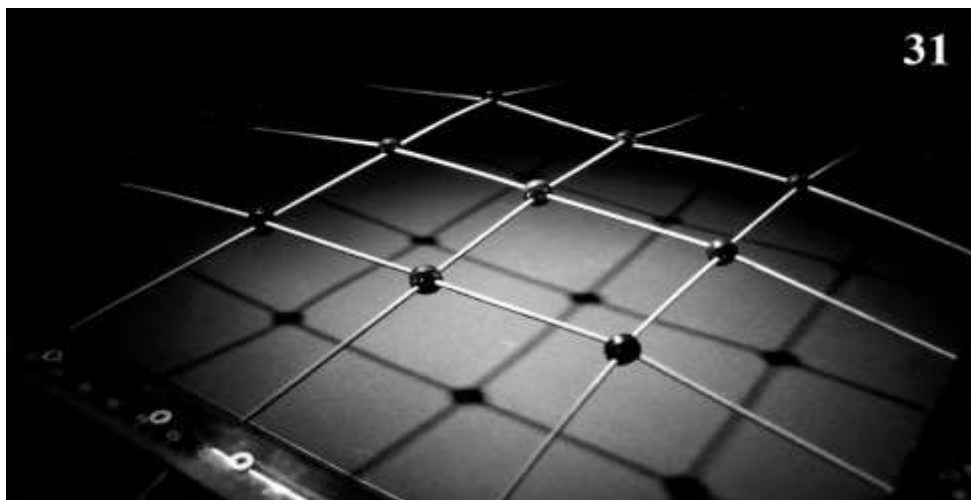


Рис.4-31



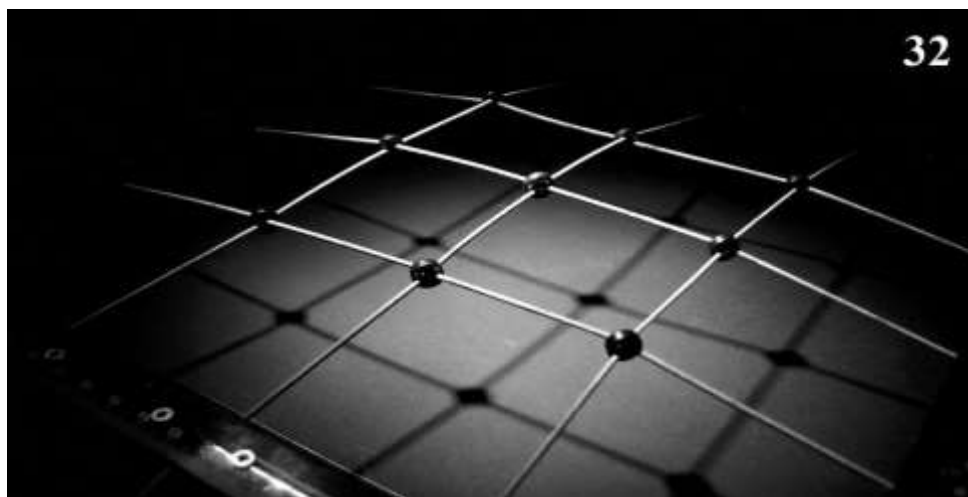


Рис.4-32

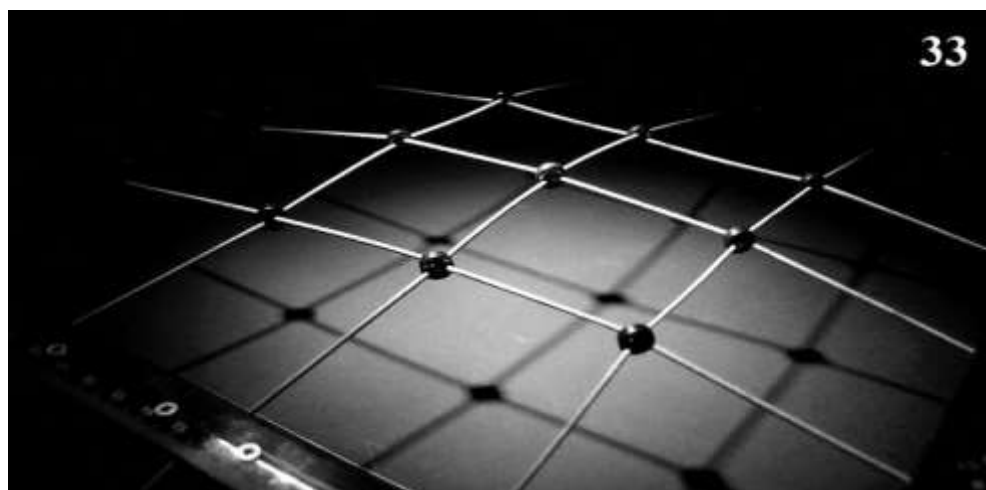


Рис.4-33

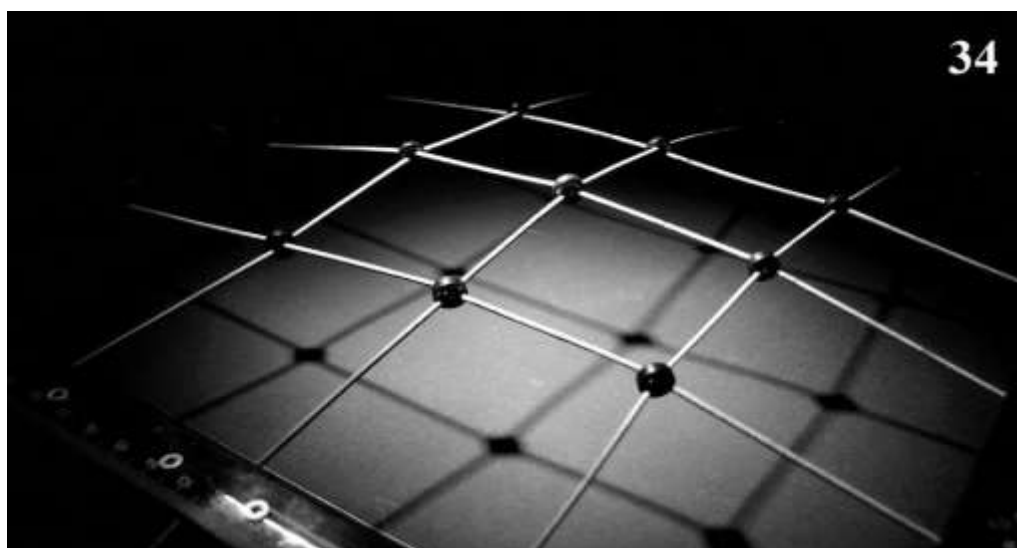


Рис.4-34



Рис.4-35

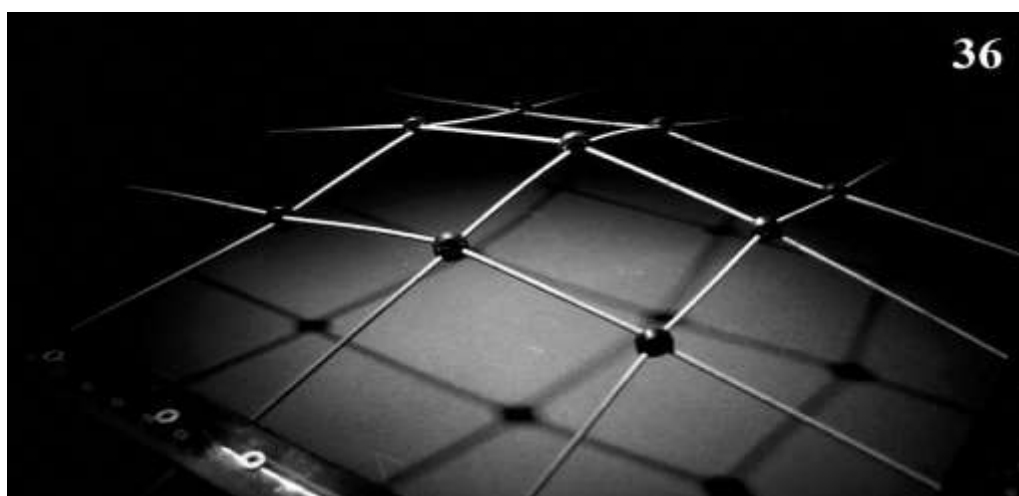


Рис.4-36

**5. Заключение.** В данной статье установлено, что при рассмотрении струнных решеток с расширенными ячейками, описанное ранее свойство образования стоячих волн -хлопков с синхронными соударениями всех узлов может трансформироваться в режимы с более сложными профилями. При этом сохраняются периодичность стоячих волн и ряд свойств, характерных для нелинейных резонансных процессов. Синхронность соударений, по-видимому, переходит в синхронность достижения узлами решетки некоторых промежуточных координат, отличных от величины зазора.

Указанные результаты требуют подробного теоретического изучения, а также ряда уточнений, касающихся выяснению роли числа узлов, ширины пролётов и некоторых других факторов.

#### Список литературы

1. Асташев В.К., Крупенин В.Л. Андрианов Н.А. Виброударные эффекты при ограниченных колебаниях струнных решёток с массивными узлами// Доклады Академии наук. - 2018. - Том 480, № 6. - С. 1–5.
2. Нагаев Р.Ф., Ходжаев К.Ш. Колебания механических систем с периодической структурой. - Ташкент: ФАН, 1973. - 272 с.

3. Мандельштам Л.И. Лекции по теории колебаний. - М.: Наука, 1972. - 471 с.
4. Astashev V., Andrianov N., Krupenin V. Vibration of string lattice // *Vibroengineering PROCEDIA*. - 2016. - Vol.8. - P.97-101.
5. Асташев В.К., Андрианов Н.А., Крупенин В.Л., Привезенцев В.Н., Колик Л.В., Свойства поверхностных слоев, наноструктурированных в результате авторезонансного ультразвукового течения // *Проблемы машиностроения и надежности машин*. - 2011. - № 5. - С.68-72.
6. Бабицкий В.И. И., Веприк А.М., Крупенин В.Л. Виброударные эффекты при ограниченных колебаниях одномерной цепочки упруго соединенных бусинок // *ДАН СССР*. - 1989. - Т. 300, № 3. - С. 562— 566.
7. Babitsky V.I., Krupenin V.L. *Vibration of Strongly Nonlinear Discontinuous Systems*. В.: Springer-Verlag, 2001. - 404 p.
8. Крупенин В.Л. Анализ сингуляризованных уравнений движения решетчатых виброударных 2D-систем при отказе от гипотезы Ньютона // *Проблемы машиностроения и надежности машин*. - 2016. - № 2. - С.13-22.

*Дата поступления: 25 апреля 2019 г.*