

УДК 536.21+537.311.3

## ВЛИЯНИЕ АКСИАЛЬНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ НА ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ ПРОВОДНИКА В ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА

© Владимир Михайлович Шаповалов

Волжский политехнический институт (филиал) федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Волгоградского государственного технического университета», Волжский, Россия  
[svm24412@gmail.com](mailto:svm24412@gmail.com)

**Аннотация.** Поставлена и решена нестационарная задача о нагреве цилиндра конечной длины электрическим током. Цилиндр находится в адиабатических условиях и имеет место аксиальный тепловой поток к закреплённым концам цилиндра. Удельное электрическое сопротивление материала цилиндра зависит от температуры. Численный анализ математической модели показал существование предельного тока, который приводит к лавинообразному нарастанию температуры и «тепловому взрыву» проводника.

**Ключевые слова:** теплопроводность; краевая задача; электрический ток; проволока; температура; температурный коэффициент сопротивления; теплофизические свойства; критерий Померанцева; число Фурье.

## EFFECT OF AXIAL HEAT CONDUCTION ON THE TEMPERATURE FIELD OF THE CONDUCTOR IN THE DC CIRCUIT

© V.M. Shapovalov

Volzhsy Polytechnical Institute (branch of) State Educational Institution of Higher Professional Education «Volgograd State Technical University», Volgzhsky, Russia  
[svm24412@gmail.com](mailto:svm24412@gmail.com)

**Abstract.** The non-stationary problem of heating a cylinder of finite length by an electric current has been posed and solved. The cylinder is in adiabatic conditions and there is an axial heat flow to the fixed ends of the cylinder. The electrical resistivity of the material of the cylinder depends on the temperature. Numerical analysis of the mathematical model showed the existence of a limiting current, which leads to an avalanche-like increase in temperature and a “thermal explosion” of the conductor.

**Keywords:** thermal conductivity; boundary problem; electricity; wire; temperature; temperature coefficient of resistance; thermo physical properties; Pomerantsev criterion; Fourier number.

**Введение.** Металлическая проволока, нагреваемая протекающим электрическим током, широко применяется как в технике, так и в научных исследованиях. Например, широко используются плавкие предохранители. Теория плавких предохранителей построена на элементарных уравнениях энергетического баланса (закон Джоуля-Ленца) без учёта продольной теплопроводности проводника. Между тем, в предохранителях часто используется проволока из меди, т.е. из металла, имеющего высокую теплопроводность.

Следует отметить, что разрушение проводника предохранителя за счёт перегрева происходит в середине, что указывает на влияние фактора осевой теплопроводности в окрестности заделок концов проводника.

Тонкие, нагреваемые током, проволоки широко применяются в научных исследованиях процессов теплопереноса с фазовым превращением [1], [2]. Для повышения локализации термического воздействия используются микронагреватели, например, размером  $10 \times 3$  мкм [3]. В качестве материала для микронагревателей используется платина размером  $100 \times 10$  мкм [4],  $100 \times 20$  мкм [5], медь диаметром менее 5 мкм [6], никель [7]. Используются не только проволоки круглого сечения, но полоски субмикронного платинового нагревателя [8]. Для стабилизации температуры проволоки, а, следовательно, повышения достоверности экспериментальных результатов, используется ПИД – регулятор [9].

Нагретая проволока используется в анемометрах для исследования переходных режимов газовых потоков [10]. Отмечается, что при калибровке необходимо учитывать потери тепла в горячих опорах проволок.

Из имеющихся математических моделей следует отметить решение задачи для неограниченного цилиндра [11]. Однако авторы ограничились рассмотрением случая радиальной теплопроводности с граничным условием первого рода.

Цель настоящей работы состоит в выяснении влияния осевого оттока тепла к стенке на динамику процесса электрического нагрева проволоки.

**Постановка задачи.** Рассматривается короткий металлический проводник, по которому течёт электрический ток. Схема теплового нагружения представлена на рис.1,а. Концы проводника закреплены в высокотеплопроводных заделках, имеющих постоянную температуру. Теплообмен на боковой поверхности цилиндра не учитываем, тепловой поток одномерен. Внутри цилиндра имеет место равномерное объёмное тепловыделение от протекающего электрического тока постоянной величины. Выделяющееся тепло за счёт осевой теплопроводности отводится в заделку.

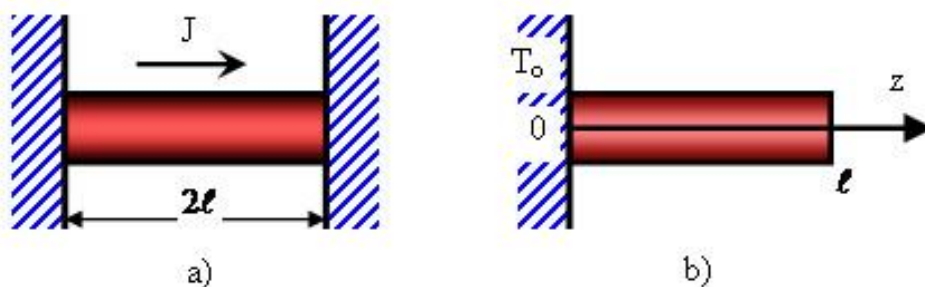


Рис.1. Схема теплового нагружения металлического цилиндра (а) и расчётная схема (б).

Ввиду одномерности теплового потока цилиндрический стержень может иметь произвольную форму поперечного сечения, например, круглую или прямоугольную. Площадь поперечного сечения постоянна по длине.

Согласно рис.1,а задача симметрична относительно среднего сечения цилиндра длиной  $l$ . Общая длина цилиндра  $2l$ . Учитывая симметрию задачи, ограничимся рассмотрением левой

половины проводника длиной  $\ell$  (рис.2,b). Площадь сечения цилиндра постоянная. Теплофизические свойства материала цилиндра однородны по объёму и не зависят от температуры. Интенсивность внутренних источников тепла постоянна и распределена равномерно по объёму цилиндра (протекающий электрический ток не изменяет свой величины). Начальная температура цилиндра и его торцов (заделок)  $T=T_0$ . Поперечный тепловой поток отсутствует, поскольку теплообмен на боковой поверхности пренебрежимо мал. На торцах цилиндра имеет место идеальный тепловой контакт.

Задача описывается уравнениями

$$\rho_+ C \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + G, \quad (t > 0, \quad 0 < z < \ell) \quad (1)$$

$$\begin{aligned} t=0, & \quad T=T_0, \\ z=0, & \quad T=T_0, \\ z=1, & \quad \partial T / \partial z = 0, \end{aligned}$$

где  $C$ ,  $\rho_+$ ,  $\lambda$  – теплоёмкость, плотность и коэффициент теплопроводности материала цилиндра,  $a = \lambda / (\rho_+ C)$  – коэффициент температуропроводности,  $t$  – время,  $z$  – продольная координата,  $T$  – температура,  $T_0$  – начальная температура цилиндра и температура его торцов ( $T_0 > 0$  °C),  $l$  – половина длины проводника,  $G$  – плотность объёмных источников тепла,

Для внутреннего источника тепла характерны следующие соотношения:  $G = w / (\ell S)$ ,  $w = J^2 R$ ,  $S = \pi R_1^2$ ,  $R = \rho l / S$ , где  $w$  – электрическая мощность, рассеиваемая проводником,  $S$  – площадь поперечного сечения,  $J$  – величина тока,  $R$  – электрическое сопротивление проводника,  $R_1$  – радиус поперечного сечения цилиндрического проводника,  $\rho$  – удельное сопротивление. Удельное сопротивление линейно зависит от температуры  $\rho = \rho_0 (1 + \beta T)$ , где  $\rho_0$  – удельное сопротивление при  $T = 0$  °C,  $\beta$  – температурный коэффициент сопротивления. Принимаем  $J = \text{const}$ .

**Решение задачи.** Введём безразмерные переменные и параметры

$$\zeta = \frac{z}{\ell}, \quad \theta = \frac{T}{T_0}, \quad P_0 = \frac{\ell^2 J^2 \rho_0}{\pi^2 R_1^4 \lambda T_0}, \quad D = \frac{\ell^2 J^2 \rho_0 \beta}{\pi^2 R_1^4 \lambda}, \quad F_0 = \frac{at}{\ell^2}. \quad (2)$$

где  $P_0$  – критерий Померанцева для постоянного тока,  $F_0$  – число Фурье,  $\theta$  – безразмерная температура ( $T_0 > 0$ ),  $\zeta$  – безразмерная продольная координата. Имеет место соотношение  $D = P_0 T_0 \beta$ .

В безразмерной форме краевая задача имеет вид

$$\frac{\partial \theta}{\partial F_0} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \zeta^2} + D \theta + P_0, \quad (F_0 > 0, \quad 0 < \zeta < 1) \quad (3)$$

$$\begin{aligned} F_0 = 0, & \quad \theta = 1, \\ \zeta = 0, & \quad \theta = 1, \\ \zeta = 1, & \quad \partial \theta / \partial \zeta = 0. \end{aligned}$$

Решение задачи (3) можно представить в виде суммы функций [12]

$$\theta = V(\zeta) + W(\zeta, F_0), \quad (4)$$

где функция  $V(\zeta)$  определяет установившееся распределение температуры и находится как решение следующей задачи

$$\frac{d^2V}{d\zeta^2} + DV + Po = 0, \quad (0 < \zeta < 1) \quad (5)$$

$$\zeta = 0, \quad \theta = 1,$$

$$\zeta = 1, \quad d\theta/d\zeta = 0.$$

Решение неоднородного линейного уравнения (5) имеет вид

$$V = \left(1 + \frac{Po}{D}\right) \frac{\cos[\sqrt{D}(1-\zeta)]}{\cos(\sqrt{D})} - \frac{Po}{D}, \quad D \neq 0. \quad (6)$$

Максимальная температура  $\theta_{\max}$  в сечении стержня  $\zeta=1$  составляет

$$\theta_{\max} = V|_{\zeta=1} = \left(1 + \frac{Po}{D}\right) \frac{1}{\cos(\sqrt{D})} - \frac{Po}{D}, \quad D \neq 0. \quad (7)$$

Решение для случая  $D \rightarrow 0$  может быть непосредственно получено из уравнений (5), либо из выражения (6) путём асимптотического представления тригонометрических функций. В случае  $D=0$  установившееся распределение температуры описывается параболой  $\theta = 1 + Po(\zeta - 0,5\zeta^2)$ .

Из выражений (6), (7) видно, что установившаяся температура неограниченно возрастает при  $\sqrt{D} \rightarrow \pi/2$ . Действительно, согласно уравнениям энергии (3) и (5) имеем систему с положительной обратной связью; с повышением температуры увеличивается интенсивность тепловыделения.

Для определения функции  $W(\zeta, Fo)$  с учётом уравнений (3)-(6), приходим к следующим уравнениям

$$\frac{\partial W}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 W}{\partial \zeta^2} + DW + Po_i, \quad (Fo > 0, \quad 0 < \zeta < 1) \quad (8)$$

$$Fo=0, \quad W = 1 + \frac{Po}{D} - \left(1 + \frac{Po}{D}\right) \frac{\cos[\sqrt{D}(1-\zeta)]}{\cos(\sqrt{D})},$$

$$\zeta = 0, \quad W = 0,$$

$$\zeta = 1, \quad \partial W / \partial \zeta = 0.$$

Частное решение задачи (8) ищется в виде произведения двух функций [12]

$$W = f(Fo)\varphi(\zeta). \quad (9)$$

Если подставить решение (9) в уравнение (8), получим систему уравнений:

$$f' = -\chi^2 f, \quad \varphi'' + (D + \chi^2)\varphi = 0.$$

Решения этих уравнений имеют вид:

$$f = \exp(-\chi^2 Fo), \quad \varphi = A \sin(\sqrt{D + \chi^2} \zeta) + B \cos(\sqrt{D + \chi^2} \zeta).$$

Из граничного условия  $\zeta=0, W=0$  следует  $B=0$ . Согласно последнему граничному условию в (8) можем записать  $\exp(-\chi^2 Fo) \cos(\sqrt{D+\chi^2}) = 0$ . Отсюда следует

$$\sqrt{D+\chi^2} = (2n+1) \frac{\pi}{2}, \quad n=0, 1, 2, \dots$$

Общее решение будет суммой всех частных решений (9)

$$W = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin \left[ (2n+1) \frac{\pi}{2} \zeta \right] \exp \left\{ - \left[ (2n+1)^2 \frac{\pi^2}{4} - D \right] Fo \right\}. \quad (10)$$

Постоянные  $A_n$  найдём из начального условия в (8)

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin \left[ (2n+1) \frac{\pi}{2} \zeta \right] = 1 + \frac{Po}{D} - \left( 1 + \frac{Po}{D} \right) \frac{\cos \left[ \sqrt{D} (1-\zeta) \right]}{\cos(\sqrt{D})}.$$

Учитывая ортогональность собственных функций, можем записать

$$\begin{aligned} A_n \int_0^1 \sin^2 \left[ (2n+1) \frac{\pi}{2} \zeta \right] d\zeta = \\ = \int_0^1 \left\{ 1 + \frac{Po}{D} - \left( 1 + \frac{Po}{D} \right) \frac{\cos \left[ \sqrt{D} (1-\zeta) \right]}{\cos(\sqrt{D})} \right\} \sin \left[ (2n+1) \frac{\pi}{2} \zeta \right] d\zeta. \end{aligned}$$

Выполнив интегрирование, после несложных преобразований, находим коэффициенты Фурье

$$A_n = - \frac{16(D+Po)}{\pi(2n+1) \left[ \pi^2(2n+1)^2 - 4D \right]}. \quad (11)$$

С учётом выражений (16), (17), (20), (21) можем окончательно записать для безразмерной температуры

$$\begin{aligned} \theta = \left( 1 + \frac{Po}{D} \right) \frac{\cos \left[ \sqrt{D} (1-\zeta) \right]}{\cos(\sqrt{D})} - \frac{Po}{D} - \\ - \frac{16(D+Po)}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin \left[ (2n+1) \frac{\pi}{2} \zeta \right]}{(2n+1) \left[ \pi^2(2n+1)^2 - 4D \right]} \exp \left\{ - \left[ (2n+1)^2 \frac{\pi^2}{4} - D \right] Fo \right\}. \end{aligned} \quad (12)$$

В сечении  $\zeta=1$  безразмерная температура имеет максимум  $\theta_{\max} = \theta(\zeta=1)$

$$\theta_{\max} = \left( 1 + \frac{Po}{D} \right) \frac{1}{\cos(\sqrt{D})} - \frac{Po}{D} \quad (13)$$

$$-\frac{16(D+Po)}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \exp \left\{ - \left[ (2n+1)^2 \frac{\pi^2}{4} - D \right] Fo \right\}}{(2n+1) \left[ \pi^2 (2n+1)^2 - 4D \right]}.$$

Ряды Фурье (12) и (13) имеют достаточно быструю сходимость. При этом решающий вклад в распределение температуры вносит нулевая мода ( $n=0$ ). Как в (12), так и в (13) первое слагаемое правой части описывает установившееся распределение температуры. Из выражений (12), (13) следует, что функция температуры имеет особенность в точке  $D=D_k=\pi^2/4$ ; бесконечный разрыв второго рода. Область определения параметра  $D$ , а, следовательно, и применимости полученного решения:  $0 < D < D_k$ . При приближении  $D$  к значению  $D_k$  температура возрастает неограниченно  $\lim_{D \rightarrow D_k} \theta = \infty$ . Кроме того, согласно

выражениям (12), (13) темп нагрева (скорость изменения температуры, показатель экспоненты нулевой моды  $n=0$ ) снижается  $\left[ (1)^2 \frac{\pi^2}{4} - D \right] \rightarrow 0$ , и достижение высокой

температуры требует значительного времени (больших чисел Фурье). Учитывая соотношение  $D=PoT_0\beta$ , на критерий Померанцева также следует наложить ограничение  $Po < D_k/(T_0\beta)$ .

В отмеченной точке происходит как бы «тепловой взрыв» проводника. С физической точки зрения отмеченный эффект обусловлен температурной чувствительностью материала проводника: с увеличением температуры электрическое сопротивление растёт. Ток сохраняет постоянное (стабилизированное) значение, в результате нагревания сопротивление увеличивается, так же увеличивается выделяемая тепловая энергия. Имеем систему с положительной обратной связью; процесс напоминает автокаталитическую реакцию.

**Численный анализ математической модели.** В установившемся тепловом режиме ( $Fo \gg 1$ ) выражения (12), (13) переходят в выражения (6), (7). Предварительно рассмотрим установившийся тепловой режим.

На рис.2 представлены расчётные распределения безразмерной температуры по длине стержня, выполненные с помощью выражения (6). Графики построены в полулогарифмической системе координат. Расчёты выполнены для  $Po=1$ . Видно, что с увеличением параметра  $D$  температура повышается. При этом тепловой поток к заделке проволоки ( $\zeta=0$ ) увеличивается. Согласно рис.2 околокритическому значению  $D=2,46$  отвечает максимальная безразмерная температура  $\theta_{\max}=600$ . Соответствующая размерная температура составляет  $T=T_0\theta_{\max}=20 \times 600=12000$  °C. Таковую температуру не выдержит даже вольфрам!

Рис.3 иллюстрирует асимптотическое поведение максимальной температуры от параметра  $D$ . Графики построены в полулогарифмической системе координат. Видно, что наиболее интенсивный рост температура имеет в окрестности критического значения параметра  $D=2,467$ .

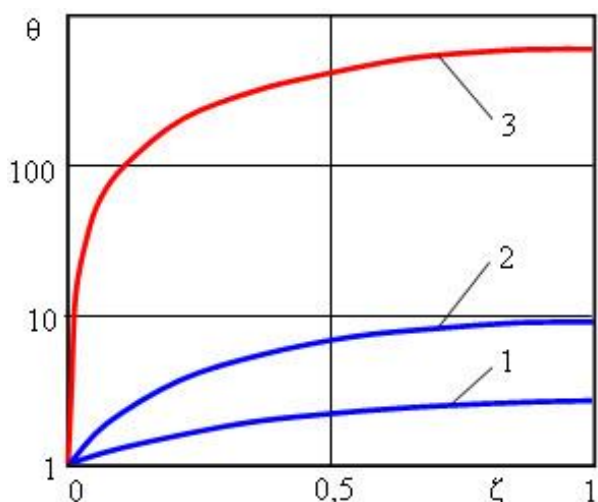


Рис.2. Распределение установившейся температуры при  $Ro=1$  и различных значениях параметра  $D$ : линии 1 отвечает  $D=1$ ; 2 – 2; 3 – 2,46.

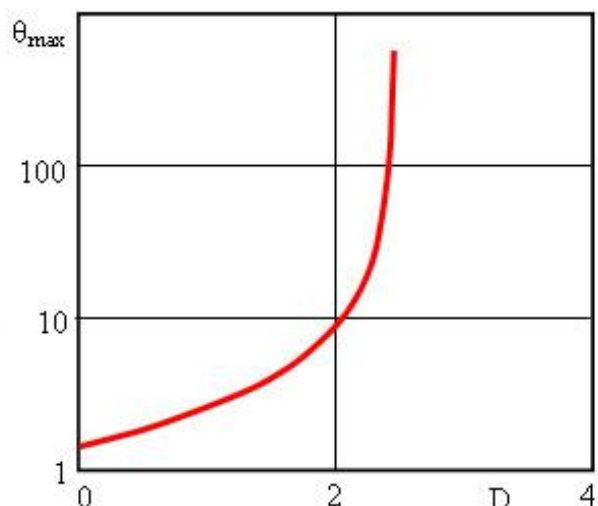


Рис.3. Зависимость максимальной температуры от параметра  $D$ .

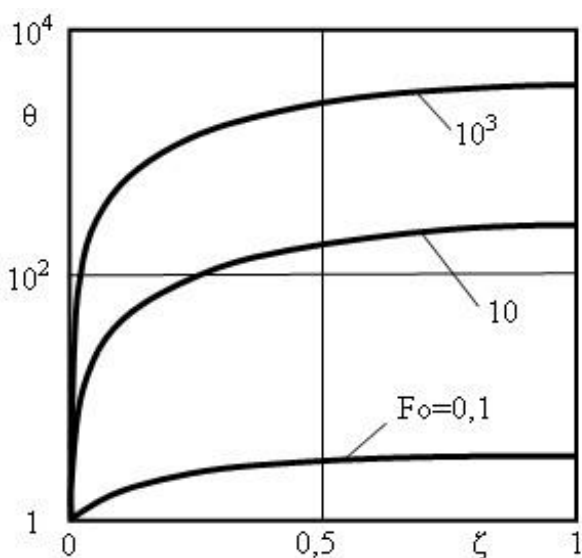


Рис.4. Эволюция профиля температуры при  $Ro=18$  и  $D=2,46$ .

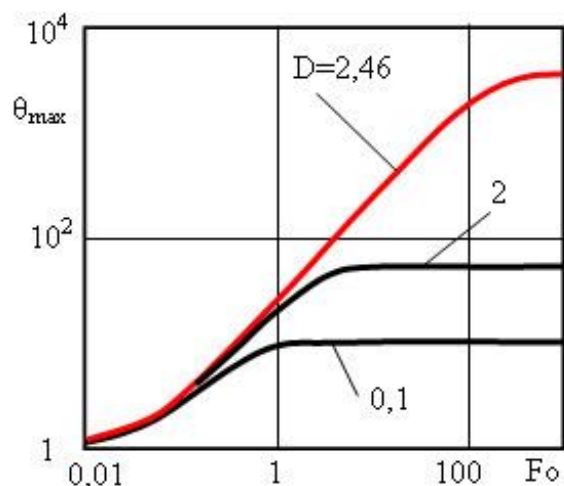


Рис.5. Зависимость максимальной температуры от числа Фурье при  $Ro=18$  и различных значениях  $D$ .

На рис.4 и рис.5 представлены результаты численного анализа выражений, соответственно (12) и (13). Учитывались первые 20 членов ряда Фурье. Графики рис.4 построены для значений параметров  $Ro=18$  и  $D=2,46$ . Состояние системы близко к критическому. Видно, что для достижения полного прогрева требуется значительное время ( $Fo=10^3$ ). Градиент температуры в месте крепления ( $\zeta=0$ ) со временем нарастает, увеличивается тепловой поток. На рис.5 представлены кривые изменения максимальной температуры во времени при постоянном значении критерия Померанцева ( $Ro=18$ ) и различных значениях параметра  $D$ .

При малых  $D$  время температурной стабилизации мало, но оно значительно увеличивается при приближении параметра  $D$  к критическому значению. Так при  $D=0,1$  стабилизация наступает после  $Fo=1$ , при  $D=2$  после  $Fo=10$ , а при  $D=2,46$  после  $Fo=1000$ .

Параметры  $Ro$  и  $D$  могут изменяться в достаточно широких пределах. Выполним численную оценку критического состояния никелевой проволоки при условиях:  $\beta=0,0065 \text{ K}^{-1}$ ;  $\rho_0=8,7 \times 10^{-6} \text{ Ом}\cdot\text{м}$ ;  $\lambda=74 \text{ Вт/мК}$ ;  $R_1=10^{-4} \text{ м}$ ;  $\ell=10^{-2} \text{ м}$ ;  $T_0=20 \text{ }^\circ\text{C}$ . Согласно принятым обозначениям (2) ток, отвечающий «тепловому взрыву» ( $D = \pi^2/4$ ), составляет

$$J = \frac{\pi^2 R_1^2}{2\ell} \sqrt{\frac{\lambda}{\rho_0 \beta}} = 1,92 \text{ а.}$$

Для описываемых условий критерий Померанцева равен  $Ro=18,96$ .

**Выводы.** Получено аналитическое решение задачи нестационарной теплопроводности цилиндрического проводника, нагреваемого за счёт протекающего электрического тока. Электрическое сопротивление материала проводника зависит от температуры.

Анализ полученного решения показал, что рассматриваемая задача относится к системам с положительной обратной связью. Обнаружен режим «теплового взрыва», когда нагрев проводника способствует увеличению тепловыделения и его температура возрастает неограниченно. Указаны условия его проявления.

#### Список литературы

1. Lee D. J. Two-mode boiling on a horizontal heating wire: effects of liquid subcoolings//International Journal of Heat and Mass Transfer. – 1998. - Vol. 41, Issue 19. - P. 2925-2928.
2. Mohammad Nasim Hasan. Model for boiling explosion during rapid liquid heating/Mohammad Nasim Hasan, Masanori Monde, Yuichi Mitsutake//International Journal of Heat and Mass Transfer. - 2011. - Vol. 54, Issues 13–14. - P. 2844-2853.
3. Peigang Deng. The growth and collapse of a micro-bubble under pulse heating/Peigang Deng, Yi-Kuen Lee, Ping Cheng//International Journal of Heat and Mass Transfer. – 2003. - Vol. 46, Issue 21. - P. 4041-4050.
4. Glod S. An investigation of microscale explosive vaporization of water on an ultrathin Pt wire/ Glod S., Poulikakos D., Zhao Z., Yadigaroglu G//International Journal of Heat and Mass Transfer.- Vol. 45, Issue 2, January 2002. – P. 367-379
5. Jinliang Xu. Effect of pulse heating parameters on the microscale bubble dynamics at a microheater surface/ Jinliang Xu, Wei Zhang//International Journal of Heat and Mass Transfer. – 2008. - Vol. 51, Issues 1–2. – P. 389-396
6. Ayako Ono. Liquid–vapor structure near heating surface at high heat flux in subcooled pool boiling/ Ayako Ono, Hiroto Sakashita//International Journal of Heat and Mass Transfer. – 2007. - Vol. 50, Issues 17–18. - P. 3481-3489.
7. Grassmann P. Heat transfer from wire to subcooled and boiling water/ Grassmann P., Hauser I. J. //International Journal of Heat and Mass Transfer. - 1964. – Vol. 7, Issue 2. - P. 211-214.
8. Romera-Guereca G. Explosive vaporization and microbubble oscillations on submicron width thin film strip heaters/ Romera-Guereca G., Choi T. Y., Poulikakos D.// International Journal of Heat and Mass Transfer. – 2008. - Vol. 51, Issues 17–18. - P. 4427-4438.



9. Zhukov S. A. Concerning the magnitude of the maximum heat flux and the mechanisms of superintensive bubble boiling/Zhukov S. A., Afanas'ev S. Yu., Eshmaev S. B.//International Journal of Heat and Mass Transfer. – 2003. - Vol. 46, Issue 18. - P. 3411-3427.
10. Eklund T. I. Application of the hot wire anemometer to temperature measurement in transient gas flows/ Eklund T. I., Dobbins R. A. //International Journal of Heat and Mass Transfer. 1977. - Vol. 20, Issue 10. - P. 1051-1058.
11. Берд Р., Стьюарт В., Лайтфут Е. Явления переноса. - М.: Химия, 1974. - 688с.
12. Лыков А.В. Теория теплопроводности. - М.: Высшая школа, 1967. - 600 с.

*Дата поступления: 8 января 2019 г.*