Bulletin of Science and Technical Development

www.vntr.ru № 1 (137), 2019

DOI: 10.18411/vntr2019-137-2

УДК 534.11

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ДЮАМЕЛЯ И МЕТОДА КАНТОРОВИЧА–ГАЛЕРКИНА ДЛЯ ОПИСАНИЯ КОЛЕБАНИЙ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ДВИЖУЩИМИСЯ ГРАНИЦАМИ

© Владислав Львович Литвинов
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия
Самарский государственный технический университет, Самара, Россия
vladlitvinov@rambler.ru

Аннотация. *Метод Канторовича – Галеркина в совокупности с методом Дюамеля рассматривается применительно к решению задач, описывающих колебания вязкоупругих объектов с условиями на движущихся границах. Математическая постановка задачи включает неоднородное дифференциальное уравнение в частных производных относительно искомой функции смещения, неоднородные граничные и начальные условия. При помощи введения в задачу новой функции граничные и начальные условия приводятся к однородным. Решение производится в безразмерных переменных с точностью до величин второго порядка малости относительно малых параметров, характеризующих скорость движения границы и вязкоупругость. Используя метод Канторовича – Галеркина и метод Дюамеля находится приближенное решение задачи о вынужденных продольных колебаниях вязкоупругого стержня переменной длины.*

Ключевые слова: *колебания систем с движущимися границами, законы движения границ, вязкоупругие свойства, амплитуда колебаний, продольные колебания стержня.*

APPLICATION OF THE DUAMEL AND KANTOROVICH – GALERKIN METHOD TO DESCRIBE THE VIBRATIONS OF MECHANICAL SYSTEMS WITH MOVING BOUNDARYS

© Vladislav L. Litvinov
Moscow State University, Moscow, Russia
Samara State Technical University, Samara, Russia
vladlitvinov@rambler.ru

Abstract. *The Kantorovich – Galerkin method in conjunction with the Duhamel method is considered as applied to solving problems describing the oscillations of visco-elastic objects with conditions on moving boundaries. The mathematical formulation of the problem includes an inhomogeneous partial differential equation with respect to the desired displacement function, inhomogeneous boundary and initial conditions. By introducing a new function into the problem, the boundary and initial conditions are reduced to homogeneous. The solution is made in dimensionless variables with an accuracy of the second order of smallness with respect to small parameters characterizing the velocity of the boundary and viscoelasticity. Using the Kantorovich – Galera-kin method and the Duhamel method, an approximate solution of the problem of forced longitudinal oscillations of a viscoelastic rod of variable length is found.*

Key words: *oscillations of systems with moving boundaries, laws of motion of boundaries, viscoelastic properties, amplitude of oscillations, longitudinal oscillations of a rod.*

Системы, границы которых движутся, широко распространены в технике (канаты грузоподъемных установок [1, 2, 9, 14–19, 21, 22], гибкие звенья передач [3, 7, 9] и т.д.). Наличие движущихся границ вызывает значительные затруднения при описании таких систем. Точные методы решения ограничены волновым уравнением и сравнительно простыми граничными условиями [2, 3, 8, 9, 11, 12, 15]. Из приближенных методов наиболее эффективен метод Канторовича – Галеркина, описанный в работах [2, 10, 14–19, 21, 22]. Однако метод Канторовича – Галеркина в совокупности с методом Дюамеля может быть применён и в более сложных случаях при решении полностью неоднородной начально–краевой задачи, с учетом действия на систему вязкоупругих свойств колеблющегося объекта [14, 16, 22],

Пусть требуется получить решение уравнения гиперболического типа

$$U_{\tau\tau}(\xi,\tau)+L[U(\xi,\tau)]+\varepsilon_1 L_1[U(\xi,\tau)]=\varphi(\xi,\tau); \qquad (1)$$

при начальных условиях

$$U(\xi,0)=\Phi_0(\xi);\; U_\tau(\xi,0)=\Phi_1(\xi) \qquad (2)$$

и граничных условиях

$$Y_{ji}\left[U\left(\ell_j(\varepsilon\tau),\tau\right)\right]=F_{ji}(\tau); \qquad (3)$$

$$i=\overline{1,m};\; j=\overline{1,2},$$

где L – линейный однородный дифференциальный оператор по ξ порядка $2m$ ($m\le 2$ – целое положительное число); L_1- линейный дифференциальный оператор (его порядок по τ равен единице, по ξ не превышает $2m$); $Y_{ji}-$линейные однородные дифференциальные операторы по ξ; $\varphi(\xi,\tau)$ – заданная функция класса C^1; $\Phi_0(\xi),\ \Phi_1(\xi),\ F_{ji}(\tau)$ – заданные функции класса C^2; $\varepsilon,\varepsilon_1-$ малые параметры ($\varepsilon=V/a,\ V-$ скорость границы, a – скорость распространения колебаний).

Запись законов движения границ в виде $\ell_j(\varepsilon\tau)$ соответствует режиму медленного движения.

Для редуцирования задачи (1) – (3) к задаче с однородными граничными условиями вводится новая гладкая функция $u(\xi,\tau)$, удовлетворяющая граничным условиям (3).

В силу линейности операторов L, L_1, Y_{ji} для разности $\tilde U(\xi,\tau)=U(\xi,\tau)-u(\xi,\tau)$ получим

$$\tilde U_{\tau\tau}(\xi,\tau)+L\left[\tilde U(\xi,\tau)\right]+\varepsilon_1 L_1\left[\tilde U(\xi,\tau)\right]=\tilde\varphi(\xi,\tau); \qquad (4)$$

$$\tilde U(\xi,0)=\tilde\Phi_0(\xi);\; \tilde U_\tau(\xi,0)=\tilde\Phi_1(\xi); \qquad (5)$$

$$Y_{ji}\left[\tilde U\left(\ell_j(\varepsilon\tau),\tau\right)\right]=0; \qquad (6)$$

$$i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,2},$$

где

$$\tilde{\varphi}(\xi,\tau)=\varphi(\xi,\tau)-u_{\tau\tau}(\xi,\tau)-L\left[u(\xi,\tau)\right]-\varepsilon_1 L_1\left[u(\xi,\tau)\right];$$

$$\tilde{\Phi}_0(\xi)=\Phi_0(\xi)-u(\xi,0);\ \tilde{\Phi}_1(\xi)=\Phi_1(\xi)-u_\tau(\xi,0).$$

Для получения задач с единственной неоднородностью либо в уравнении, либо в начальном условии, введем в задачу (4) – (6) новую функцию

$$\tilde{U}(\xi,\tau)=V(\xi,\tau)+H(\xi,\tau). \quad (7)$$

где

$$V(\xi,\tau)_{\tau\tau}+L\left[V(\xi,\tau)\right]+\varepsilon_1 L_1\left[V(\xi,\tau)\right]=0; \quad (8)$$

$$V(\xi,0)=\tilde{\Phi}_0(\xi);\ V_\tau(\xi,0)=\tilde{\Phi}_1(\xi); \quad (9)$$

$$Y_{ji}\left[V\left(\ell_j(\varepsilon\tau),\tau\right)\right]=0; \quad (10)$$

$$i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,2},$$

а функция $H(\xi,\tau)$ находится как решение следующей задачи:

$$H(\xi,\tau)_{\tau\tau}+L\left[H(\xi,\tau)\right]+\varepsilon_1 L_1\left[H(\xi,\tau)\right]=\tilde{\varphi}(\xi,\tau); \quad (11)$$

$$H(\xi,0)=0;\ H_\tau(\xi,0)=0; \quad (12)$$

$$Y_{ji}\left[H\left(\ell_j(\varepsilon\tau),\tau\right)\right]=0; \quad (13)$$

$$i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,2}.$$

Согласно методу Дюамеля [26] решение задачи (11) – (13) имеет вид

$$H(\xi,\tau)=\int_0^\tau z(\xi,\tau-\tau_0,\tau_0)\,d\tau_0,$$

где $z(\xi,\tau,\tau_0)-$ решение импульсной задачи

$$z(\xi,\tau)_{\tau\tau}+L\left[z(\xi,\tau)\right]+\varepsilon_1 L_1\left[z(\xi,\tau)\right]=0; \quad (14)$$

$$z(\xi,0)=0;\ z_\tau(\xi,0)=\tilde{\varphi}(\xi,\tau_0); \quad (15)$$

$$Y_{ji}\left[z\left(\ell_j(\varepsilon\tau),\tau\right)\right]=0. \quad (16)$$

В качестве примера рассмотрим вынужденные продольные колебания вязкоупругого стержня, изменение длины которого происходит на свободном конце (например, стержень выдвигается со скоростью v_0). Если затухание поперечных колебаний обусловлено, главным образом, действием внешних демпфирующих сил, то в случае продольных колебаний основное влияние на затухание оказывают упругие несовершенства материала колеблющегося объекта.

Дифференциальное уравнение (вязкоупругость учитывается на основе гипотезы Фойгта), имеет вид [1]

$$Z_{tt}(x,t)-a^2[Z_{xx}(x,t)+\mu Z_{xxt}(x,t)]=f\left(x,t\right). \tag{17}$$

Начальные условия

$$Z(x,0)=\psi_0(x);\ \ Z_t(x,0)=\psi_1(x). \tag{18}$$

Граничные условия системы

$$Z(0,t)=f_1(t);\ \ Z_x(l_0(v_0 t),t)=f_2(t). \tag{19}$$

В задаче (17) – (19) обозначено: $Z(x,t)$ – продольное смещение точки с координатой x в момент времени *t*; $a=\sqrt{E/\rho}$ – скорость распространения продольных волн в стержне; *E* – длительный модуль упругости материала стержня; ρ – линейная плотность массы; μ – малый параметр, учитывающий вязкоупругость; $l_0(v_0 t)=L_0-v_0 t$ – закон движения границы; $f\left(x,t\right)$ – заданная функция класса C^1; $\psi_0(x),\ \psi_1(x),\ f_1(t),\ f_2(t)$ – заданные функции класса C^2.

Введем в задачу (17) – (19) безразмерные переменные:

$$\xi=\frac{\omega_0}{a}x;\ \ \tau=\omega_0 t+\varphi_0;\ \ \varphi_0=-\frac{\omega_0 L_0-a}{v_0};\ \ Z(x,t)=U(\xi,\tau),$$

где ω_0 – постоянная величина.

После преобразований получим:

$$U_{\tau\tau}(\xi,\tau)-U_{\xi\xi}(\xi,\tau)-\varepsilon_1 U_{\xi\xi\tau}(\xi,\tau)=\varphi(\xi,\tau); \tag{20}$$

$$U(\xi,0)=\Phi_0(\xi);\ U_\tau(\xi,0)=\Phi_1(\xi); \tag{21}$$

$$U(0,\tau)=F_1(\tau);\ U_\xi(l(\varepsilon_0\tau),\tau)=F_2(\tau), \tag{22}$$

где

$$\varepsilon_1=\mu\omega_0;\ l(\varepsilon_0\tau)=1+\varepsilon_0\tau;\ \varepsilon_0=-v_0/a;\ \ \varphi(\xi,\tau)=\frac{1}{\omega_0^2}f\left(\frac{a}{\omega_0}\xi;\ \frac{\tau-\varphi_0}{\omega_0}\right);$$

$$\Phi_0(\xi)=\psi_0\left(\frac{a}{\omega_0}\xi\right);\Phi_1(\xi)=\psi_1\left(\frac{a}{\omega_0}\xi\right);\ F_1(\tau)=f_1\left(\frac{\tau-\varphi_0}{\omega_0}\right);F_2(\tau)=f_2\left(\frac{\tau-\varphi_0}{\omega_0}\right).$$

Следуя описанной выше методике, получим

$$\tilde{U}_{\tau\tau}\left(\xi,\tau\right)-\tilde{U}_{\xi\xi}\left(\xi,\tau\right)-\varepsilon_1\tilde{U}_{\xi\xi\tau}\left(\xi,\tau\right)=\tilde{\varphi}\left(\xi,\tau\right); \tag{23}$$

$$\tilde{U}(\xi,0)=\tilde{\Phi}_0(\xi);\ \tilde{U}_\tau(\xi,0)=\tilde{\Phi}_1(\xi); \tag{24}$$

$$\tilde{U}(0,\tau)=0;\ \tilde{U}_\xi(l(\varepsilon_0\tau),\tau)=0, \tag{25}$$

где функция $\tilde{U}\left(\xi,\tau\right)$ имеет вид (7).

Функция $V\left(\xi,\tau\right)$ находится как решение следующей задачи:

$$V_{\tau\tau}(\xi,\tau)-V_{\xi\xi}(\xi,\tau)-\varepsilon_1 V_{\xi\xi\tau}(\xi,\tau)=0; \quad (26)$$

$$V\left(\xi,0\right)=\tilde{\Phi}_0(\xi);\ V_\tau\left(\xi,0\right)=\tilde{\Phi}_1(\xi); \quad (27)$$

$$V(0,\tau)=0;\quad V_\xi(l(\varepsilon_0\tau),\tau)=0, \quad (28)$$

Для решения задачи (26) – (28) воспользуемся методом Канторовича–Галеркина [9, 10, 15, 19, 23]. Решение будем искать в виде

$$V(\xi,\tau)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\tau)X_n(\xi,\varepsilon_0\tau). \quad (29)$$

Здесь $X_n(\xi,\varepsilon_0\tau)=\sin\left(\omega_{0n}(\varepsilon_0\tau)\xi\right),\ \omega_{0n}(\varepsilon_0\tau)=\dfrac{\pi n-\pi/2}{l(\varepsilon_0\tau)}$ – собственные функции и собственные частоты задачи:

$$X_{n\xi\xi}(\xi,\varepsilon_0\tau)+\omega_{0n}^2(\varepsilon_0\tau)X_n(\xi,\varepsilon_0\tau)=0; \quad (30)$$

$$X_n(0,\varepsilon_0\tau)=0;\ X_{n\xi}(l(\varepsilon_0\tau),\varepsilon_0\tau)=0. \quad (31)$$

Подставляя n–ный член ряда (29) в уравнение (26) получим:

$$\begin{gathered}\left[f_n(\tau)X_n(\xi,\varepsilon_0\tau)\right]_{\tau\tau}+\omega_{0n}^2(\varepsilon_0\tau)\,f_n(\tau)X_n(\xi,\varepsilon_0\tau)+\\+\varepsilon_1\omega_{0n}^2(\varepsilon_0\tau)\,f_n'(\tau)X_n(\xi,\varepsilon_0\tau)=0.\end{gathered} \quad (32)$$

Как и в [23], функцию $f_n(\tau)$ будем определять из условия ортогональности левой части уравнения (32) с функцией $X_n(\xi,\varepsilon_0\tau)$ на интервале $[0,l(\varepsilon_0\tau)]$. В этом случае будем иметь:

$$\begin{gathered}\int_0^{l(\varepsilon_0\tau)}\left[f_n(\tau)X_n(\xi,\varepsilon_0\tau)\right]_{\tau\tau}X_n(\xi,\varepsilon_0\tau)d\xi+\\+A_{1n}(\varepsilon_0\tau)\omega_{0n}^2(\varepsilon_0\tau)\,f_n(\tau)+\varepsilon_1 A_{1n}(\varepsilon_0\tau)\omega_{0n}^2(\varepsilon_0\tau)\,f_n'(\tau)=0,\end{gathered} \quad (33)$$

где $A_{1n}(\varepsilon_0\tau)=\displaystyle\int_0^{l(\varepsilon_0\tau)}X_n^2(\xi,\varepsilon_0\tau)d\xi=\frac{l(\varepsilon_0\tau)}{2}.$

Уравнение (33) с точностью до величин порядка малости ε_0^2 будет иметь вид

$$f_n''(\tau)+2A_n(\varepsilon_0\tau)\,f_n'(\tau)+\omega_{0n}^2(\varepsilon_0\tau)\,f_n(\tau)=0, \quad (34)$$

где

$$A_n(\varepsilon_0\tau)=\frac{\varepsilon_0 A_{2n}(\varepsilon_0\tau)}{A_{1n}(\varepsilon_0\tau)}+\frac{\varepsilon_1}{2}\frac{(\pi n-\pi/2)^2}{l^2(\varepsilon_0\tau)}, \quad (35)$$

$$\varepsilon_0 A_{2n}(\varepsilon_0\tau)=\int\limits_0^{l(\varepsilon_0\tau)} X_{n_\tau}(\xi,\varepsilon_0\tau)X_n(\xi,\varepsilon_0\tau)d\xi=-\frac{\varepsilon_0 l'(\varepsilon_0\tau)}{4}. \qquad (36)$$

Заметим, что в работе [2] уравнение (34) имеет аналогичный вид:

$$l^2(\varepsilon\tau)f_k''(\tau)-\varepsilon l(\varepsilon\tau)f_k'(\tau)+(R-1/2)^2\pi^2 f_k(\tau)=0.$$

Подставляя (36) в (35) получим

$$A_n(\varepsilon_0\tau)=-\frac{\varepsilon_0 l'(\varepsilon_0\tau)}{2l(\varepsilon_0\tau)}+\frac{\varepsilon_1}{2}\frac{(\pi n-\pi/2)^2}{l^2(\varepsilon_0\tau)}.$$

Если ввести в уравнение (34) новую функцию

$$f_n(\tau)=A_{0n}(\varepsilon_0\tau)y_n(\tau),$$

где

$$A_{0n}(\varepsilon_0\tau)=\exp\left[-\int\limits_0^\tau A_n(\varepsilon_0\zeta)d\zeta\right]=\sqrt{l(\varepsilon_0\tau)}\exp\left[-\int\limits_0^\tau \frac{\varepsilon_1}{2}\frac{(\pi n-\pi/2)^2}{l^2(\varepsilon_0\zeta)}d\zeta\right],$$

то уравнение можно преобразовать так, что оно не будет содержать члена с $y_n'(\tau)$:

$$y_n''(\tau)+\omega_{0n}^2(\varepsilon_0\tau)y_n(\tau)=0.$$

Выполняя преобразования, аналогичные преобразованиям [23], для амплитуды колебаний, соответствующих n–ной динамической моде, получим следующее выражение:

$$A_n(\tau)=\frac{l(\varepsilon_0\tau)}{\sqrt{\pi n-\pi/2}}\cdot e^{-\int\limits_0^\tau \frac{\varepsilon_1}{2}\frac{(\pi n-\pi/2)^2}{l^2(\varepsilon_0\zeta)}d\zeta} *$$
$$*\left(D_n\cos\left(\frac{\pi n-\pi/2}{\varepsilon_0}\ln(1+\varepsilon_0\tau)\right)+E_n\sin\left(\frac{\pi n-\pi/2}{\varepsilon_0}\ln(1+\varepsilon_0\tau)\right)\right) \qquad (37)$$

Решение задачи (26) – (28) имеет вид

$$V(\xi,\tau)=\sum_{n=1}^\infty \sin\left(\omega_{0n}(\varepsilon_0\tau)\xi\right)\cdot\frac{l(\varepsilon_0\tau)}{\sqrt{\pi n-\pi/2}}\cdot e^{-\int\limits_0^\tau \frac{\varepsilon_1}{2}\frac{(\pi n-\pi/2)^2}{l^2(\varepsilon_0\zeta)}d\zeta} *$$
$$*\left(D_n\cos\left(\frac{\pi n-\pi/2}{\varepsilon_0}\ln(1+\varepsilon_0\tau)\right)+E_n\sin\left(\frac{\pi n-\pi/2}{\varepsilon_0}\ln(1+\varepsilon_0\tau)\right)\right),$$

где постоянные D_n, E_n определяются из начальных условий (27).

Точное решение задачи (26) – (28) без учета вязкоупругости, полученное в [11], имеет вид:

$$V_\xi(\xi,\tau)=\sum_{n=1}^\infty \cos\left\{\frac{k_n}{2}\left[\varphi(\tau+\xi)-\psi(\tau-\xi)\right]\right\}*$$

$$*\left(A_n^* \cos\left\{ \frac{k_n}{2}\left[\varphi(\tau+\xi)+\psi(\tau-\xi)\right]\right\} + B_n^* \sin\left\{ \frac{k_n}{2}\left[\varphi(\tau+\xi)+\psi(\tau-\xi)\right]\right\}\right);$$

$$A_n^* = 4\int_{-1}^{0} r(\zeta)\cos(k_n\zeta)d\zeta;\ B_n^* = 4\int_{-1}^{0} r(\zeta)\sin(k_n\zeta)d\zeta.$$

Функция $H\left(\xi,\tau\right)$ находится как решение следующей задачи:

$$H_{\tau\tau}(\xi,\tau) - H_{\xi\xi}(\xi,\tau) - \varepsilon_1 H_{\xi\xi\tau}(\xi,\tau) = \tilde{\varphi}(\xi,\tau); \tag{38}$$

$$H\left(\xi,0\right)=0;\ \ H_\tau\left(\xi,0\right)=0; \tag{39}$$

$$H(0,\tau)=0;\ \ H_\xi(l(\varepsilon_0\tau),\tau)=0, \tag{40}$$

Согласно методу Дюамеля [26] решение задачи (38) – (40) имеет вид

$$H\left(\xi,\tau\right) = \int_0^\tau \left(\sum_{n=1}^\infty \sin\left(\omega_{0n}(\varepsilon_0(\tau-\tau_0))\xi\right)\cdot \frac{1+\varepsilon_0(\tau-\tau_0)}{\sqrt{\pi n-\pi/2}}\cdot e^{-\int_0^{\tau-\tau_0}\frac{\varepsilon_1}{2}\frac{(\pi n-\pi/2)^2}{(1+\varepsilon_0\zeta)^2}d\zeta} \right. *$$

$$\left. *\left(F_n\cos\left(\frac{\pi n-\pi/2}{\varepsilon_0}\ln(1+\varepsilon_0(\tau-\tau_0))\right) + G_n\sin\left(\frac{\pi n-\pi/2}{\varepsilon_0}\ln(1+\varepsilon_0(\tau-\tau_0))\right)\right)\right)d\tau_0,$$

где $\omega_{0n}(\varepsilon_0(\tau-\tau_0)) = \dfrac{\pi n-\pi/2}{1+\varepsilon_0(\tau-\tau_0)}$, а постоянные F_n, G_n определяются из начальных условий (15).

Общее решение задачи (23) – (25) имеет вид

$$\tilde{U}(\xi,\tau) = \sum_{n=1}^\infty \sin\left(\omega_{0n}(\varepsilon_0\tau)\xi\right)\cdot\frac{l(\varepsilon_0\tau)}{\sqrt{\pi n-\pi/2}}\cdot e^{-\int_0^\tau \frac{\varepsilon_1}{2}\frac{(\pi n-\pi/2)^2}{l^2(\varepsilon_0\zeta)}d\zeta} *$$

$$*\left(D_n\cos\left(\frac{\pi n-\pi/2}{\varepsilon_0}\ln(1+\varepsilon_0\tau)\right) + E_n\sin\left(\frac{\pi n-\pi/2}{\varepsilon_0}\ln(1+\varepsilon_0\tau)\right)\right) +$$

$$+\int_0^\tau \left(\sum_{n=1}^\infty \sin\left(\omega_{0n}(\varepsilon_0(\tau-\tau_0))\xi\right)\cdot\frac{1+\varepsilon_0(\tau-\tau_0)}{\sqrt{\pi n-\pi/2}}\cdot e^{-\int_0^{\tau-\tau_0}\frac{\varepsilon_1}{2}\frac{(\pi n-\pi/2)^2}{(1+\varepsilon_0\zeta)^2}d\zeta} \right. *$$

$$\left. *\left(F_n\cos\left(\frac{\pi n-\pi/2}{\varepsilon_0}\ln(1+\varepsilon_0(\tau-\tau_0))\right) + G_n\sin\left(\frac{\pi n-\pi/2}{\varepsilon_0}\ln(1+\varepsilon_0(\tau-\tau_0))\right)\right)\right)d\tau_0.$$

В заключение отметим, что приведенные здесь результаты позволяют произвести исследования колебаний для систем, которые описывает задача (1) – (3).

Список литературы

1. *Горошко О. А., Савин Г. Н.* Введение в механику деформируемых одномерных тел переменной длины. - Киев: Наукова думка, 1971. - 270 с.
2. *Лежнева А.А.* Продольные колебания балки переменной длины: Ученые записки / А.А. Лежнева. – Пермь: Пермск. ун–т, 1966. – №156. – С. 133–142.
3. *Весницкий А.И.* Волны в системах с движущимися границами и нагрузками. – М.: Физматлит, 2001. – 320 с.
4. *Ерофеев В.И., Колесов Д.А., Лисенкова Е.Е.* Исследование волновых процессов в одномерной системе, лежащей на упруго–инерционном основании, с движущейся нагрузкой // Вестник научно–технического развития. – 2013. - № 6 (70). – С. 18–29.
5. *Ерофеев В.И., Кажаев В.В., Семерикова Н.П.* Волны в стержнях. Дисперсия. Диссипация. Нелинейность. - М.: Наука. Физматлит, 2002. - 208с.
6. *Асташев В.К., Крупенин В.Л.* Волны в распределенных и дискретных виброударных системах и сильно нелинейных средах // Проблемы машиностроения и надежности машин. - 1998. - №5. - С.13-30.
7. *Крупенин В.Л.* О колебаниях струны, соударяющейся с ограничителем, состоящим из прямой и точки// Вестник научно-технического развития. - 2017. - №9 (121). - С.34-45.
8. *Самарин Ю.П.* Об одной нелинейной задаче для волнового уравнения в одномерном пространстве // Прикладная математика и механика. – 1964. – Т. 26, В. 3. – С. 77–80.
9. *Анисимов В.Н., Литвинов В.Л.* Резонансные свойства механических объектов с движущимися границами: монография. – Самара: Самар. гос. техн. ун–т, 2009. – 131 с.
10. *Анисимов В.Н., Литвинов В.Л.* Исследование резонансных свойств механических объектов с движущимися границами при помощи метода Канторовича–Галеркина // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. «Физико–математические науки». – 2009. - №1 (18).- С. 149–158.
11. *Анисимов В.Н., Литвинов В.Л., Корпен И.В.* Об одном методе получения аналитического решения волнового уравнения, описывающего колебания систем с движущимися границами // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. «Физико–математические науки». – 2012. - № 3 (28).- С.145–151.
12. *Литвинов В.Л.* Решение краевых задач с движущимися границами при помощи метода замены переменных в функциональном уравнении // Журнал Средневолжского математического общества. – 2013. - Т. 15, № 3. – С. 112–119.
13. *Анисимов В.Н., Литвинов В.Л.* Анализ влияния движения границ при исследовании резонансных свойств систем с демпфированием // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. «Физико–математические науки». – 2009. - № 2 (19). – С. 147–152.
14. *Анисимов В.Н., Литвинов В.Л.* Вычисление собственных частот поперечных колебаний вязкоупругого каната, движущегося в продольном направлении и имеющего изгибную жесткость // Математическое моделирование и краевые задачи: Труды Пятой Всероссийской научной конференции с международным участием. Ч. 1: Математические модели механики, прочности и надежности элементов конструкций. – Самара: СамГТУ, 2008. – 358 с.

15. *Литвинов В.Л., Анисимов В.Н.* Математическое моделирование и исследование колебаний одномерных механических систем с движущимися границами: монография. - Самара: Самар. гос. техн. ун–т, 2017. – 149 с.
16. *Литвинов В.Л.* Поперечные колебания вязкоупругого каната, лежащего на упругом основании, с учетом влияния сил сопротивления среды // Вестник научно–технического развития. – 2015. - № 4 (92). — С. 29–33.
17. *Анисимов В. Н., Литвинов В.Л.* Вычисление собственных частот каната движущегося в продольном направлении // Журнал Средневолжского математического общества. — 2017. — Т. 19, № 1. — С. 130–139.
18. *Литвинов В.Л.* Продольные колебания каната переменной длины с грузом на конце // Вестник научно–технического развития. – 2016. - № 1 (101). — С. 19–24.
19. *Литвинов В.Л.* Применение метода Канторовича-Галеркина при исследовании резонансных свойств систем с демпфированием // Вестник научно–технического развития. – 2017. - № 2 (114). — С. 37–46.
20. *Анисимов В. Н., Литвинов В.Л* Аналитический метод решения волнового уравнения с широким классом условий на движущихся границах // Вестник научно–технического развития. – 2016. - № 2 (102). — С. 28–35.
21. *Анисимов В.Н., Литвинов В.Л.* Математические модели продольно-поперечных колебаний объектов с движущимися границами // Вестн. Сам.гос. техн. ун-та. Сер. Физ-мат. Науки, 2015. Т. 19, №2. С. 382-397.
22. *Анисимов В.Н.* Продольные резонансные колебания вязкоупругого каната грузоподъёмной установки // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. - 2016. - Т. 18, № 4-1. - С. 128-133.
23. *Анисимов В. Н., Литвинов В. Л., Корпен И. В.* Применение метода Канторовича – Галеркина для решения краевых задач с условиями на движущихся границах // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. - 2018. - №2. - С. 70-77.
24. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики, 4. – М.: Физматгиз, 1958.
25. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. - М.: Наука, 1976. - 576 с.
26. *Котляр Я.М.* Методы математической физики и задачи гидроаэродинамики: [Учеб. пособие для втузов] / Я. М. Котляр. – М. : Высш. шк., 1991. – 207 с.
27. *Мышкис А.Д.* Элементы теории математических моделей. Изд. 5-е. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2011. – 192 с.

Дата поступления: 22 января 2019 г.