

УДК 621.01:534.1

## АНАЛИЗ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ДИНАМИКИ ЦИКЛОВЫХ МЕХАНИЗМОВ К ХАРАКТЕРИСТИКАМ ЭЛЕКТРОДВИГАТЕЛЯ

© Иосиф Исаакович Вульфсон

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования "Санкт-Петербургский государственный университет промышленных технологий и дизайна", СПбГУПТД, Санкт-Петербург, Россия

[jvulf@yandex.ru](mailto:jvulf@yandex.ru)

*Аннотация.* В статье исследуется ряд динамических моделей, анализ которых позволяет выявить взаимовлияние характеристик электродвигателей, механических подсистем приводов и исполнительных органов технологических цикловых машин. Предложены направления динамического синтеза с целью устранения повышенной виброактивности, возникающей из-за соударений в зазорах.

**Ключевые слова:** колебания, электродвигатели, цикловые машины, механизмы.

## DYNAMICS SENSITIVITY ANALYSIS OF CYCLIC MECHANISMS TO THE CHARACTERISTICS OF ELECTRIC MOTOR

© I. I. Vulfson

Saint Petersburg State University of Industrial Technologies and Design  
Saint-Petersburg, Russia

[jvulf@yandex.ru](mailto:jvulf@yandex.ru)

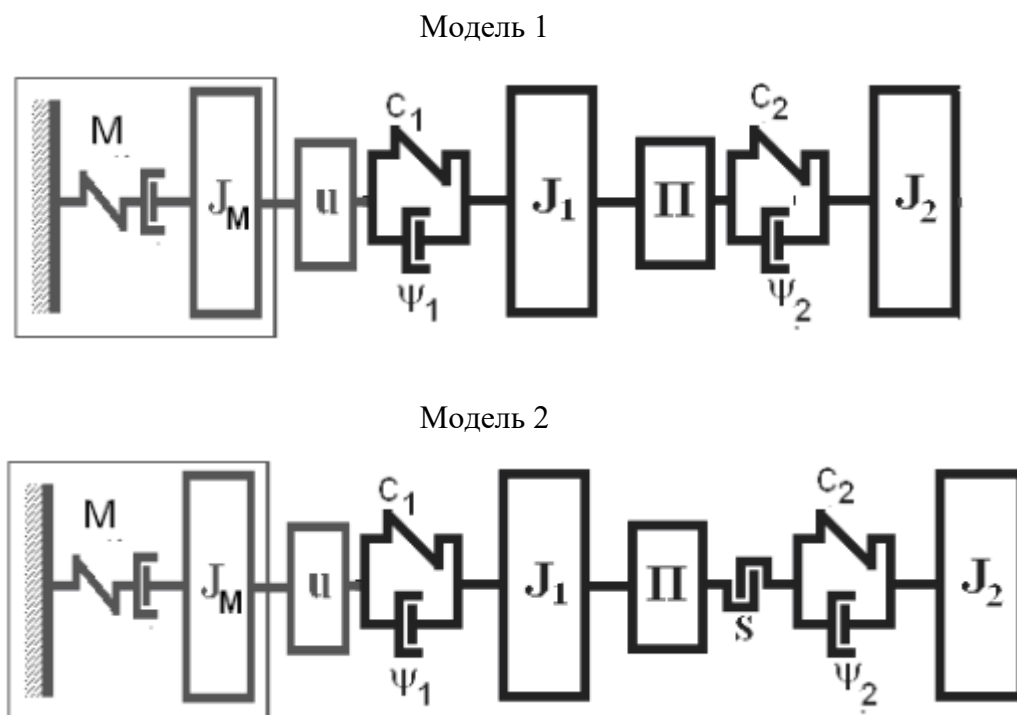
*Abstract.* The article examines a number of dynamic models, which allows to reveal the influence of the characteristics of electric motors, mechanical subsystems of drives and executive bodies of technological cycle machines. It has been suggested the directions of dynamic synthesis in order to eliminate the vibroactivity arising from collisions in the gaps.

**Key words:** vibrations, electric motors, cyclic machines.

1. Колебаниям машинных агрегатов посвящено много публикаций, обзор которых не рассматривается в качестве цели данной статьи. В ссылках мы использовали лишь те из них, которые в общей постановке служат опорой для решения излагаемой задачи [1–9]. Непосредственно в статье получили развитие некоторые связанные с обсуждаемой проблемой важные вопросы, которые нуждаются в отдельном рассмотрении. В частности, в дальнейшем развитии нуждаются исследования ряда источников виброактивности цикловых машин, возникающей из-за колебаний ротора электродвигателя [10, 11].

На рис.1 представлены две универсальные динамические модели, которые включают основные структурные компоненты, формирующие виброактивность исполнительных органов технологических машин. Выделим следующие элементы этой модели: 1)

электродвигатель  $M$ ; 2) механическая подсистема привода,  $(c_1, \psi_1, J_1)$ , связанная с электродвигателем редуктором с передаточным отношением  $u$ ; 3) ведомая подсистема исполнительного органа  $(s, c_2, \psi_2, J_2)$ , связанная с подсистемой привода цикловым механизмом с нелинейной функцией положения  $\Pi$ . Здесь приняты условные обозначения:  $J_j$  – моменты инерции;  $c_j$  – коэффициенты жесткости;  $\psi_j$  – коэффициенты рассеяния;  $s$  – зазор. Нередко привод и исполнительные органы объединяются общим термином – рабочая машина [6,7].



**Рис.1.** Динамические модели

Отличие второй модели от первой состоит в учете зазора в цикловом механизме исполнительного органа. Зазоры могут существенно повысить виброактивность привода и точность воспроизведения заданных программных движений рабочих органов.

Механические колебания привода исполнительных органов в основном формируются в рабочей машине, поэтому при определении уровня виброактивности для установившихся режимов нередко задаются постоянной средней угловой скоростью на «входе» привода машины. При этом исходят из допущения о малой динамической связанности функциональных частей машины. В цикловых технологических машинах, к которым относятся многие машины текстильной, легкой, полиграфической и ряда других отраслей промышленности, управление движением обычно реализуется в самой механической системе без использования специальных средств программного управления. Это связано с повышенными требованиями к точности позиционирования рабочих органов. В подобных случаях возникает необходимость анализа взаимовлияния электромеханического привода и рабочей машины.

2. Описание электромагнитных колебательных процессов в двигателях связано с решением достаточно сложных систем нелинейных дифференциальных уравнений. Однако применительно к установившимся режимам в инженерной практике хорошо себя зарекомендовали приближенные линеаризованные уравнения, которые для двигателя постоянного тока и асинхронных двигателей имеют вид [2, 3]

$$\Omega_{\dot{A}} = \Omega_{\dot{A}0} [1 - v(\dot{I}_{\dot{A}} + \tau \dot{I}_{\dot{A}})], \quad (1)$$

где  $\dot{I}_{\dot{A}}$  – момент двигателя;  $v$  – коэффициент крутизны статической характеристики;  $\tau$  – электромагнитная постоянная времени;  $\Omega_{\dot{A}0}$  – угловая скорость идеального холостого хода (т.е. при  $\dot{I}_{\dot{A}} \equiv 0$ ).

Для асинхронных двигателей  $\tau = (2\pi f_c s_e)^{-1}$ ;  $s_e = (1 - \Omega_{\dot{A}}^i / \Omega_{\dot{A}0}) (\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})$ ;  $v = s_e / (2\dot{I}_{\dot{A}}^i \xi)$ , где  $s_k$  – критическое скольжение;  $f_c = 50$  Гц – частота сети;  $\xi$  – отношение максимального момента к номинальному  $\dot{I}_{\dot{A}}^i$ . (Исходные данные заимствуются из каталога электродвигателей). Характеристика электродвигателя (1) соответствует реологической модели Максвелла, в которой ротор соединен со статором посредством «упругого элемента» с коэффициентом жесткости  $\tilde{n}_{\dot{A}} = (v\Omega_{\dot{A}0}\tau)^{-1}$  и последовательно включенного демпфера с моментом сопротивления  $b_{\dot{A}}\Omega_{\dot{A}}$  при  $b_{\dot{A}} = (v\Omega_{\dot{A}0})^{-1}$  [5, 6, 10, 11, 12].

Как уже отмечалось, в данной статье акцентируется внимание на влиянии характеристик двигателя на колебания рабочих органов. Исходные данные для определения  $\tau$  и  $v$  заимствуются из каталогов электродвигателей. Если в уравнении (1) принять  $\tau = 0$ , то характеристика называется *статической*.

Обратимся к анализу модели 1. Как показано в [5], если приведенный к валу двигателя момент инерции  $J$  является постоянным, то задача сводится к решению дифференциального уравнения

$$v\tau J \ddot{\omega}_{\dot{A}} + vJ \dot{\omega}_{\dot{A}} + \omega_{\dot{A}} / \omega_{\dot{A}}^0 = 1 - v(\dot{I}_{\dot{N}} + \tau \dot{I}_{\dot{N}}). \quad (2)$$

Далее представим момент сопротивления  $M_C$  в виде суммы среднего значения  $M_C^*$  и переменной составляющей  $\Delta M_C(t)$ . Соответственно функцию  $\Delta\omega_{\dot{A}}(t)$  также представим как  $\omega_{\dot{A}}(t) = \omega_{\dot{A}}^* + \Delta\omega_{\dot{A}}(t)$ . Постоянная составляющая  $\omega_{\dot{A}}^*$  определяется статической характеристикой двигателя:

$$\omega_{\dot{A}}^* = \omega_{\dot{A}}^0 (1 - v\dot{I}_{\dot{N}}^*). \quad (3)$$

При учете (3) перепишем уравнение (2) в следующем виде:

$$\Delta \ddot{\omega}_{\dot{A}} + 2n \Delta \dot{\omega}_{\dot{A}} + k^2 \Delta \omega_{\dot{A}} = W(t), \quad (4)$$

где  $n = 0,5\tau^{-1}$ ;  $k^2 = (v\tau J \omega_{\dot{A}}^0)^{-1}$ ;  $W(t) = -(\Delta M_{\dot{N}} / \tau + \Delta \dot{I}_{\dot{N}}) / J$ .

Заметим, что в отличие от случаев, когда диссипативная сила была вызвана в основном конструкционным демпфированием, параметр  $n$  здесь может оказаться соизмерим с

частотой  $k$ . Поэтому при расчете собственной частоты  $k_1$  следует пользоваться зависимостью

$$k_1 = \sqrt{k^2 - n^2} = \sqrt{(J\nu\tau\omega_A^0)^{-1} - 0,25\tau^{-2}}.$$

При  $\tau = \tau^* = 0,25\nu\omega_A^0 J$  собственная частота обращается в нуль. Таким образом, при  $\tau \leq \tau^*$  решение однородного дифференциального уравнения, соответствующего (4), становится аperiodическим. С увеличением  $\tau$  до значения  $\tau^{**} = 0,5\nu\omega_A^0 J$  величина  $k_1$  растет до своего максимального значения  $k_{1\max} = (\nu\omega_A^0 J)^{-1}$ ; при  $\tau > \tau^{**}$  собственная частота с ростом электромагнитной постоянной времени  $\tau$  соответственно убывает. Такой характер влияния параметра  $\tau$  связан с тем, что динамическая характеристика двигателя (1) соответствует модели, в которой ротор соединен с статором посредством условного «упругого элемента» с коэффициентом жесткости  $c_A = (\nu\omega_A^0 \tau)^{-1}$  и последовательно включенного «демпфера», соответствующего моменту сопротивления, пропорционального первой степени скорости при коэффициенте пропорциональности  $b_A = (\nu\omega_A^0)^{-1}$ . При малых значениях  $\tau$  доминирующую роль играет демпфер, что даже может привести к возможности появления аperiodических решений. При больших значениях  $\tau$  «жесткость» убывает, и соответственно уменьшается собственная частота. Первая резонансная частота располагается в окрестности  $k_1$ .

Более подробный анализ уравнения (4) отражен на графиках (рис.2). В рамках данной статьи мы ограничимся качественным анализом, принимая во внимание, что для рассматриваемого класса двигателей обычно изменение частоты  $\Omega$  не превышает значений  $\Delta\Omega = (5-10)\tilde{n}^{-1}$ , а параметры  $\nu \leq 0,01(\tilde{n})^{-1}$ ;  $\tau \leq 0,05\tilde{n}$ . При построении графиков на рис. 2,а зафиксировано значение параметра  $\tau$ , а для графиков на рис. 2,б зафиксировано значение параметра  $\nu$ . Кривые 1 и 3 отвечают изменению нормированной угловой скорости двигателя и отличаются лишь тем, что во втором случае уточнены коррективы, возникающие при учете переменности функции положения. Кривые 2 соответствуют изменению момента двигателя. Из графиков следует, что кинематические характеристики рабочей машины в большей степени влияют при малых значениях параметра  $\nu$ , а максимальный момент двигателя – при повышенных значениях электромагнитного параметра  $\tau$ .

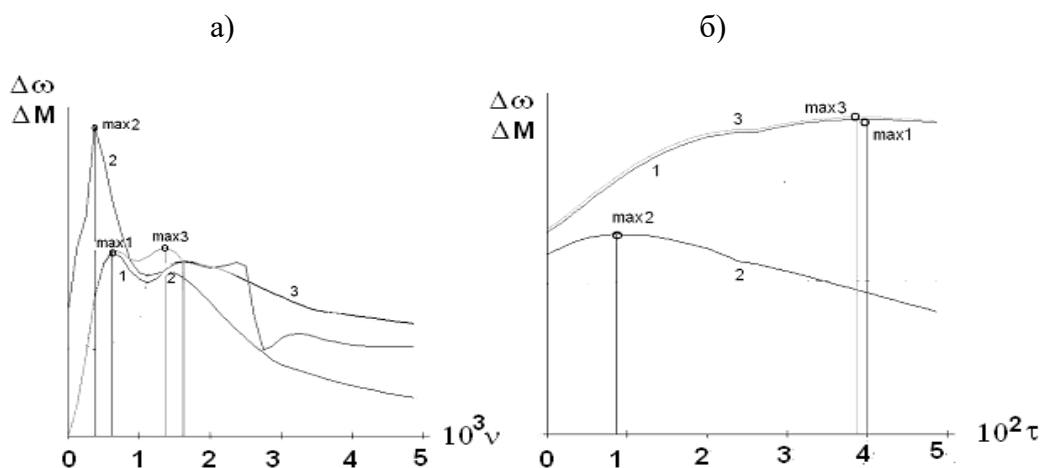


Рис.2. К анализу чувствительности кинематических и силовых факторов от характеристик электродвигателя

3. На первом этапе анализа следует произвести оценку низшей собственной частоты рабочей машины  $p_1$  (или определение динамической жесткости), считая входные сечения главного вала заземленными. Заметим, что при сложной структуре колебательной системы, например, при кольцевой структуре привода исполнительных органов, характерной для многих трикоотажных машин, нередко целесообразно использовать континуальную идеализацию, при которой реализуется прием агрегирования системы [3, 4, 5].

Второй этап базируется на анализе модифицированной модели, полученной при приведении параметров двигателей к главному валу. Можно показать, что при этом  $c_0 = c_{\bar{A}}u^2$ ,  $b_0 = b_{\bar{A}}u^2$ ,  $J_0 = J_{\bar{A}}u^2$ , а в уравнении (1) следует произвести замену  $\Omega_{\bar{A}} = \Omega u^{-1}$ ,  $\Omega_{\bar{A}0} = \Omega_0 u^{-1}$ ,  $v_{\bar{A}} = v u$ ,  $M_{\bar{A}} = M_0 u^{-1}$ , где  $\Omega$ ,  $\Omega_0$ ,  $M_0$  – соответствующие угловые скорости и движущий момент на главном валу. Далее представим момент инерции рабочей машины как  $J = \bar{J} + \Delta J(\varphi)$ , где  $\varphi = \bar{\omega}t$ ,  $\bar{\omega} = \Omega_{\bar{A}}^i u^{-1}$  – номинальная угловая скорость главного вала,  $\bar{J}$  – среднее значение приведенного момента инерции. Для одностороннего привода приведенный коэффициент жесткости в первом приближении равен  $c = \bar{J}p_1^2$ , а для двухстороннего –  $c = 0,5\bar{J}p_1^2$ . Момент, действующий на приводные двигатели, выразим как  $M = M_c + 0,5\bar{\omega}^2 \Delta J'(\varphi)$ , где  $M_c$  – момент сопротивления,  $(\quad)' = d/d\varphi$ . При этом переменная составляющая этого момента  $\Delta M$  описывается следующим рядом Фурье:

$$\Delta M = \sum_{j=1}^{\infty} [\mu_{j1} \sin(j\bar{\omega}t + \alpha_{1j}) + \mu_{j2} \sin(j\bar{\omega}t + \alpha_{2j})], \quad (2)$$

где  $\mu_{j1}$ ,  $\mu_{j2}$  – амплитудные значения гармоники  $j$  момента сопротивления или динамической составляющей.

В машинах текстильной и легкой промышленности обычно доминирует динамическая составляющая вынуждающего момента, связанная с переменностью приведенного момента инерции при  $j=2$ . Тогда основная частота возбуждения равна  $\omega = 2\bar{\omega}$  и  $\mu_{22} = 0,125\omega^2 \Delta J'_2$ , где  $\Delta J'_2$  соответствует этой гармонике.

Не сужая общности, для иллюстрации методики расчета ниже принято  $\mu_{j1} = 0$ ,  $\mu_{j2} = \mu_{22} = 0,04\omega^2 \zeta J_M$ , где  $\zeta = \bar{J}_1 / \bar{J}_M$ . Представим гармонические колебания с частотой  $\omega$  в комплексной форме  $q = A \exp[i(\omega t + \alpha)] = \tilde{A} \exp(i\omega t)$ , где  $\tilde{A} \exp(i\alpha)$  – комплексная амплитуда, модуль которой  $|\tilde{A}| = A$  равен амплитуде, а аргумент  $\alpha$  – фазе колебаний. Аналогичным образом, представляя момент в комплексной форме  $\Delta \tilde{M}$ , запишем для одинарного привода следующее матричное равенство:

$$\begin{pmatrix} \tilde{A} \\ \Delta \tilde{M} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta \tilde{M}_0 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Здесь  $\gamma_{ks}$  – элементы матрицы перехода  $\Gamma$ , которая равна произведению в обратном порядке матриц перехода подсистем:

$$\Gamma = \Gamma_J \Gamma_{c\psi} \Gamma_{J0} \Gamma_{c0} \Gamma_{b0}, \quad (4)$$

где

$$\Gamma_J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\omega^2 J & 1 \end{pmatrix}; \Gamma_{J_0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\omega^2 J_0 & 1 \end{pmatrix}; \Gamma_{c_0} = \begin{pmatrix} 1 & c_0^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \Gamma_{c\psi} = \begin{pmatrix} 1 & \tilde{c}^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \Gamma_{b_0} = \begin{pmatrix} 1 & (b_0 \omega i)^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$\tilde{c}$  – комплексный коэффициент жесткости реологической модели Кельвина–Фойхта, который при конструкционном демпфировании согласно гипотезе Е.С. Сорокина определяется зависимостью  $\tilde{c} = c(1 + 2\delta i)$  при  $\delta = \psi / (2\pi)$  ( $\psi$  – приведенный коэффициент рассеяния).

Собственные частоты с достаточной точностью соответствуют  $\min|\gamma_{22}|$  [10, 11]. Заметим, что здесь и ниже при применении матричных зависимостей не требуется производить каких-либо аналитических выкладок, поскольку можно воспользоваться любым современным пакетом программ, например, пакетом Mathcad. На рис. 3 приведены графики собственных частот  $k_1(\zeta)$  полученные при следующих исходных данных:  $J_0 = 0,1 \text{ кгм}^2$ ,  $\tau = 0,043 \text{ с}$ ,  $v^* = v/u = 0,001 \text{ (Нм)}^{-1}$ ,  $p_1 = 500 \text{ с}^{-1}$ . (кривая 1),  $k_2(\zeta)$  (кривая 2). Кривая 3, которая отвечает низшей собственной частоте без учета упруго-диссипативных свойств рабочей машины.

Кривая 4 получена согласно зависимости  $k_{20} = p_1 \sqrt{1 + \zeta}$  без учета влияния электромагнитных характеристик двигателя на собственную частоту машинного агрегата.

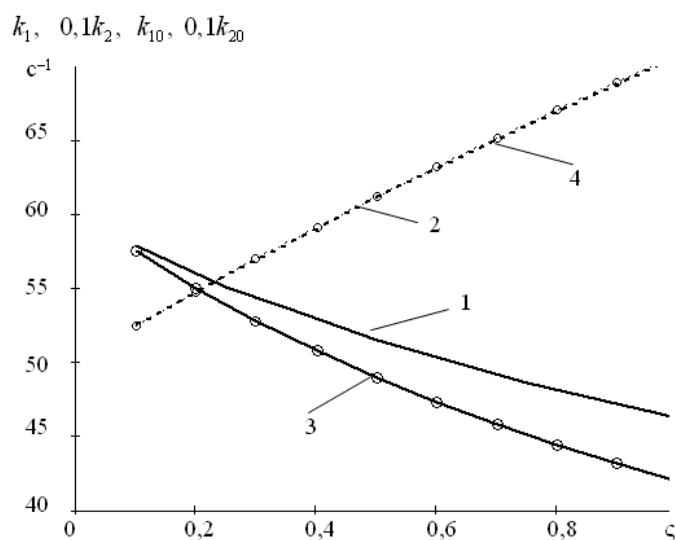


Рис. 3. Графики частотных характеристик

Как следует из сопоставления графиков, учет колебательной системы рабочей машины оказывает некоторое влияние на низшую частоту лишь при больших значениях  $\zeta$ . В то же время параметры двигателя  $v, \tau$  при достаточно большой разнице парциальных частот подсистем практически не влияют на частотный спектр рабочей машины. Это существенно, поскольку устраняет опасность возбуждения параметрических резонансов и связанных с ними возможностью нарушения условий динамической устойчивости из-за характеристик электродвигателя. Разумеется, данный вывод не относится к двигателям, которые включают подсистемы управления, имеющие обратные связи с подсистемами рабочей машины [6].

«Упругая» характеристика асинхронного двигателя или двигателя постоянного тока обычно существенно ниже жесткости элементов привода. Это позволяет в первом приближении при определении неравномерности вращения вала двигателя в окрестности  $\omega \approx k_1$ , считать остальную кинематическую цепь либо абсолютно жесткой, либо ограничиться учетом наиболее податливых элементов привода. При анализе второго резонансного режима следует иметь в виду, что под действием номинального момента двигателя эквивалентная динамическая ошибка на входе привода соответствует деформации  $(0,05-1,4)$  рад., что, как правило, значительно превышает деформации остальных участков валопровода. Это свидетельствует о высокой эквивалентной податливости. Тогда, для инженерных оценок второй резонансной частоты можно принять  $c_{\bar{\alpha}} = 0$  при обязательном учете момента инерции ротора двигателя [10, 11].

Одним из традиционных способов уменьшения неравномерности вращения входных звеньев привода является увеличение момента инерции установкой маховика. Однако, как показывает анализ, увеличение  $J$  приводит к уменьшению  $\Delta\omega_{\bar{\alpha}}$  только в зарезонансном режиме, когда частота вынуждающего момента  $\omega > k_1$ . Если при этом с целью отстройки от резонанса принять  $\omega \geq \sqrt{2}k_1$ , то при установке маховика во всяком случае должно быть удовлетворено условие  $J > 2(\omega^2 \omega_{\bar{\alpha}}^0 \nu \tau)^{-1}$ . Далее на основании решения уравнений (2), (4) может быть определен коэффициент неравномерности  $\delta_f \approx 2|\Delta\omega_{\bar{\alpha}}|_{\max} / \bar{\omega}_{\bar{\alpha}}$ , где  $\bar{\omega}_{\bar{\alpha}}$  – среднее значение угловой скорости двигателя. Следует, однако, иметь в виду, что существенное увеличение момента инерции  $J$  не является желательным для переходных режимов, поскольку при этом возрастают динамические нагрузки при разгоне.

На первом этапе анализа следует произвести оценку низшей собственной частоты рабочей машины  $p_1$  (или определение динамической жесткости), считая входные сечения главного вала заземленными. При сложной структуре колебательной системы, например, при кольцевой структуре привода исполнительных органов, характерной для многих трикотажных машин, нередко целесообразно использовать континуальную идеализацию, при которой реализуется прием агрегирования системы [3, 4, 5].

Второй этап базируется на анализе модифицированной модели (см. рис.1), полученной при приведении параметров двигателей к главному валу. Можно показать, что при этом  $c_0 = c_m u^2$ ,  $b_0 = b_m u^2$ ,  $J_0 = J_{\bar{\alpha}} u^2$ , а в уравнении (1) следует произвести замену  $\Omega_{\bar{\alpha}} = \Omega u^{-1}$ ,  $\Omega_{\bar{\alpha}0} = \Omega_0 u^{-1}$ ,  $v_m = \nu u$ ,  $M_D = M_0 u^{-1}$ , где  $\Omega$ ,  $\Omega_0$ ,  $M_0$  – соответствующие угловые скорости и движущий момент на главном валу. Далее представим момент инерции рабочей машины как  $J = \bar{J} + \Delta J(\varphi)$ , где  $\varphi = \bar{\omega}t$ ,  $\bar{\omega} = \Omega_{\bar{\alpha}}^i u^{-1}$  – номинальная угловая скорость главного вала,  $\bar{J}$  – среднее значение приведенного момента инерции. Для одностороннего привода приведенный коэффициент жесткости в первом приближении равен  $c = \bar{J} p_1^2$ , а для двухстороннего –  $c = 0,5 \bar{J} p_1^2$ . Момент, действующий на приводные двигатели, выразим как  $M = M_c + 0,5 \bar{\omega}^2 \Delta J'(\varphi)$ , где  $M_c$  – момент сопротивления,  $(\ )' = d/d\varphi$ . При этом переменная составляющая этого момента  $\Delta M$  описывается следующим рядом Фурье:

$$\Delta M = \sum_{j=1}^{\infty} [\mu_{j1} \sin(j\bar{\omega}t + \alpha_{1j}) + \mu_{j2} \sin(j\bar{\omega}t + \alpha_{2j})], \quad (2)$$

где  $\mu_{j1}, \mu_{j2}$  – амплитудные значения гармоники  $j$  момента сопротивления и динамической составляющей.

В машинах текстильной и легкой промышленности обычно доминирует динамическая составляющая вынуждающего момента, связанная с переменностью приведенного момента инерции при  $j=2$ . Тогда основная частота возбуждения равна  $\omega = 2\bar{\omega}$  и  $\mu_{22} = 0,125\omega^2 \Delta J'_2$ , где  $\Delta J'_2$  – амплитудное значение для гармоники  $j=2$ .

Не сужая общности, для иллюстрации методики расчета ниже принято  $\mu_{j1} = 0$ ,  $\mu_{j2} = \mu_{22} = 0,04\omega^2 \zeta J_0$ , где  $\zeta = \bar{J} / \bar{J}_0$ . Представим гармонические колебания с частотой  $\omega$  в комплексной форме  $q = \dot{A} \exp[i(\omega t + \alpha)] = \tilde{A} \exp(i\omega t)$ , где  $\tilde{A} \exp(i\alpha)$  – комплексная амплитуда, модуль которой  $|\tilde{A}| = \dot{A}$  равен амплитуде, а аргумент  $\alpha$  – фазе колебаний. Аналогичным образом, представляя момент в комплексной форме  $\Delta \tilde{M}$ , запишем для одинарного привода следующее матричное равенство:

$$\begin{pmatrix} \tilde{A} \\ \Delta \tilde{M} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta \tilde{M}_0 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Здесь  $\gamma_{ks}$  – элементы матрицы перехода  $\Gamma$ , которая равна произведению в обратном порядке матриц перехода подсистем:

$$\Gamma = \Gamma_J \Gamma_{c\psi} \Gamma_{J0} \Gamma_{c0} \Gamma_{b0}, \quad (4)$$

где

$$\Gamma_J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\omega^2 J & 1 \end{pmatrix}; \Gamma_{J0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\omega^2 J_0 & 1 \end{pmatrix}; \Gamma_{c0} = \begin{pmatrix} 1 & c_0^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \Gamma_{c\psi} = \begin{pmatrix} 1 & \tilde{c}^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\Gamma_{b0} = \begin{pmatrix} 1 & (b_0 \omega i)^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$\tilde{c}$  – комплексный коэффициент жесткости реологической модели Кельвина–Фойхта, который согласно гипотезе Е.С. Сорокина [12] определяется зависимостью  $\tilde{c} = c(1 + 2\delta i)$  при  $\delta = \psi / (2\pi)$  ( $\psi$  – приведенный коэффициент рассеяния).

Собственные частоты соответствуют  $\min |\gamma_{22}|$ . Заметим, что здесь и ниже при применении матричных зависимостей не требуется производить каких-либо аналитических выкладок, поскольку можно воспользоваться любым современным пакетом программ, например, пакетом Mathcad. На рис.3 приведены графики собственных частот  $k_1(\zeta)$  (кривая 1),  $0,1k_2(\zeta)$  (кривая 2), полученные при следующих исходных данных:  $J_0 = 0,1 \text{ кгм}^2$ ,  $\tau = 0,043 \text{ с}$ ,  $v = v_{\dot{A}} / u = 0,001 \text{ (Нм)}^{-1}$ ,  $p_1 = 500 \text{ с}^{-1}$ . Кривая 3 отвечает низшей собственной частоте без учета упругодиссипативных свойств рабочей машины, а кривая 4 получена согласно зависимости  $k_{20} = p_1 \sqrt{1 + \zeta}$  – без учета влияния электромагнитных характеристик двигателя на собственную частоту машинного агрегата.



Как следует из сопоставления графиков, учет колебательной системы рабочей машины оказывает некоторое влияние на низшую частоту лишь при больших значениях  $\zeta$ . В то же время параметры двигателя  $\nu, \tau$  при достаточно большой разнице парциальных частот подсистем практически не влияют на частотный спектр рабочей машины.

На рис. 4,а приведено полученное на основании (3), (4) семейство амплитудно-частотных характеристик  $A(\omega, \zeta) = |\tilde{A}(\omega, \zeta)|$ . Коэффициент неравномерности вращения вала электродвигателя  $\Delta\Omega_{\max} / \bar{\omega}$  определяется как  $\chi = |\tilde{\chi}|$  при  $\tilde{\chi} = \nu \Delta \tilde{M}(\omega, \zeta)(1 + i\tau)$  (рис.4,б).

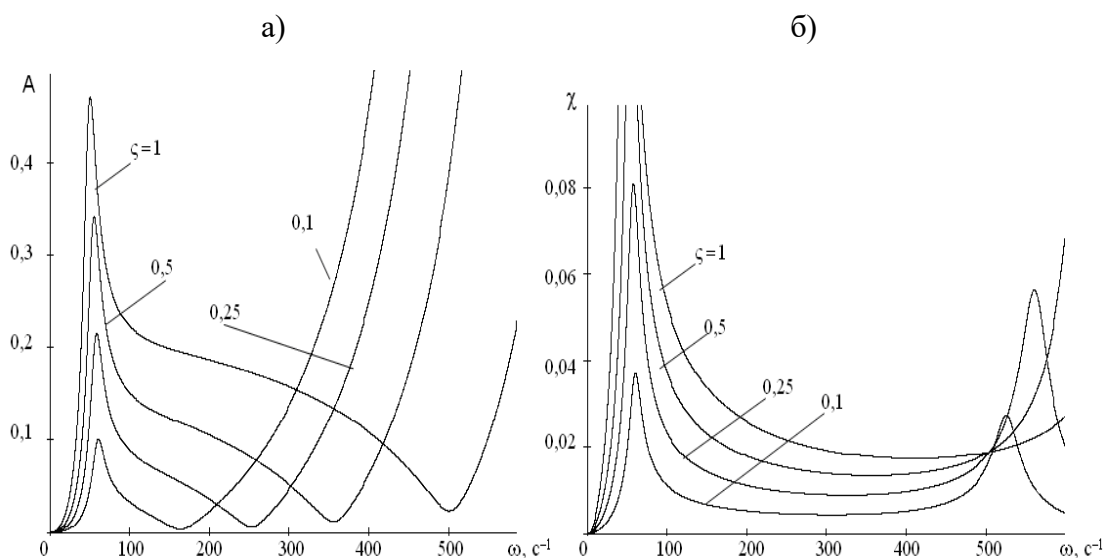


Рис. 4. Графики амплитудно-частотных характеристик и коэффициентов неравномерности

4. Приведенное выше исследование соответствует модели 1 (см. рис.1), в котором не учтены зазоры, влияние которых частично отражено в динамической модели 2. Эта модель при совместном учете динамических характеристик привода и зазора описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \Delta\bar{\omega}'' + \frac{\Delta\bar{\omega}'}{\tau_m \bar{\omega}_*} + \frac{\Delta\bar{\omega}}{\nu_m \tau_m \bar{\omega}_*^3 J_0^*} - \frac{k_1^2 q_1}{\tau_m J_0^*} &= 0; \\ q_1'' + \{ \mu \Pi_*' \bar{k}_2^2 [2\delta_2 \bar{k}_2^{-1} (q_1 \Pi_*' - q_2) + q_1 \Pi_*' - q_2 - \\ - 0,5s \operatorname{sgn}(-\Pi_*' q_1 - q_2)] \} H(|\Pi_*' q_1 - q_2| - 0,5s) + k_1^2 (2\delta_1 k_1^{-1} q_1' + q_1) &= 0; \\ q_2'' + \bar{k}_2^2 [2\delta_2 \bar{k}_2^{-1} (-q_1' \Pi_*' + q_2') - q_1 \Pi_*' + q_2 - \\ - 0,5s \operatorname{sgn}(-q_1' \Pi_*' + q_2') H + \Pi_*' (1 + \Delta\bar{\omega})^2 + \Pi_*' \Delta\bar{\omega}' + k_0^2 (\Delta_0 + \Pi_*) &= M_2 / J_2, \end{aligned} \right\} (5)$$

где  $\Delta\bar{\omega}$  – усредненная динамическая ошибка угловой скорости на «входе» (см. ниже);  $q_1, q_2$  – координаты в сечениях «дисков»  $J_1, J_2$ ;  $(\cdot)' = d/d\varphi$ ;  $\nu_m, \tau_m$  – коэффициент крутизны

статической характеристики и электромагнитная постоянная времени электродвигателя, приведенные к сечению  $J_1$  [1, 2, 9];  $\bar{k}_i = k_i / \omega_*$ ;  $k_1 = \sqrt{c_1 / J_1}$ ,  $k_2 = \sqrt{c_2 / J_2}$ ,  $k_0 = \sqrt{c_0 / J_2}$ ; ;  $\mu = u^2 J_M / J_1$ ;  $J_0^* = J_1 u^{-2}$ ;  $\delta_i = \psi_i / (4\pi)$ ;  $\Delta_0$  – предварительный натяг замыкающего устройства (при отсутствии силового замыкания  $c_0 = 0$ );  $M_2$  - момент внешних сил;  $u$  – передаточное отношение;  $H(\varphi, s, q_1, q_2)$  – единичная функция ( $H = 0$  è  $H = 1$  соответственно при отрицательном и положительном аргументе). Здесь и ниже безразмерные параметры, отмеченные черточкой, соответствуют их исходному значению, отнесенному к  $\omega_*$ . Характеристика асинхронного электродвигателя и двигателя постоянного тока может быть представлена как реологическая модель Максвелла, в которой ротор соединен со статором посредством «упругого элемента» с коэффициентом жесткости  $\tilde{n}_* = (v\Omega_{m0}\tau)^{-1}$  и последовательно включенного демпфера с моментом сопротивления  $b\Omega_0$ . Здесь  $b = v^{-1}$ ;  $\Omega_0$  – угловая скорость идеального холостого хода двигателя [1, 2, 4, 12]. В статьях [10, 11] было показано, что условный эквивалентный коэффициент жесткости электродвигателя значительно ниже приведенного коэффициента жесткости механической подсистемы привода. Практически это означает, что нередко достаточную точность в рабочем диапазоне скоростей дает допущение  $c_* \approx 0$ , при котором влияние двигателя на динамику привода ограничивается учетом момента инерции ротора. Этому допущению отвечает динамическая модель 2. Соответствующая этой модели система дифференциальных уравнений совпадает с (2), если принять  $\Delta\omega = 0$ , т.е., пренебречь переменностью вращения ротора двигателя. Для инженерных оценок можно также воспользоваться методом последовательных приближений, принимая  $\Delta\omega$  как решение первого уравнения системы (5), в котором можно ограничиться статической характеристикой двигателя ( $\tau = 0$ ). Реактивные моменты, связанные с координатами  $q_1, q_2$ , в этом случае можно заменить моментом сопротивления, базируясь на результатах кинестатического анализа. Следует однако отметить, что при этом возможны некоторые ошибки не только количественного, но и качественного уровня из-за изменения частотных и модальных характеристик. В рамках данной статьи мы ограничились лишь качественным анализом взаимовлияния характеристик электродвигателя и динамических эффектов, вызванных соударениями в зазорах. Связь между этими факторами наглядно отражена в уравнениях системы (5). Подробный анализ возникающих при этом возмущений и способы их подавления нуждаются в отдельном рассмотрении.

### Список литературы

1. Бидерман В. Л. Теория механических колебаний. – М.: Высшая школа, 1980. – 408 с.
2. Вейц В.Л. Динамика машинных агрегатов./В.Л. Вейц. Л.: Машиностроение, 1969. – 370 с.
3. Вейц В.Л., Коловский М.З., Кочура А.Е. Динамика управляемых машинных агрегатов. – М.: Наука, 1984. – 352 с.
4. Вульфсон И.И. Колебания машин с механизмами циклового действия. – Л.: Машиностроение, 1990. – 309 с.
5. Вульфсон И. И. Динамика цикловых машин. – СПб.: Политехника, 2013. – 425 с.
6. Коловский М.З. Динамика машин. – Л.: Машиностроение, 1989. – 264 с.
7. Вульфсон И.И., Коловский М.З. Нелинейные задачи динамика машин. – Л.: Машиностроение, 1968. – 284 с.

8. Пальмов В.А. Колебания упруго-пластичных тел. – М.: Наука, 1976. –328 с.
9. Dresig, H., Vulfson, I.I. Dynamik der Mechanismen /, Wien, New York: Springer, 1989. – 328 P.
10. Вульфсон И. И. К проблеме динамической взаимозависимости электродвигателя и механического привода цикловой машины. // Теория механизмов и машин. – 2016. - Т. 32, №4. – С. 173–182.
11. Вульфсон И. И. О некоторых коррективах при оценке влияния электродвигателя на виброактивность привода технологических машин// Вестник научно-технического развития. – 2017. – №2 (114). - С. 11–23.
12. Сорокин Е. С. Динамический расчет несущих конструкций. – М.: Госстройиздат, 1958. – 325 с.

*Дата поступления: 15 января 2019 г.*