

УДК 621.891

## ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ ЭКСПЛУАТАЦИОННЫХ ПАРАМЕТРОВ НА ХАРАКТЕРИСТИКИ ВОДНОЙ СМАЗКИ МОДЕЛЬНОГО ПОДШИПНИКА СКОЛЬЖЕНИЯ

© Владимир Дмитриевич Данилов<sup>1</sup>, Павел Павлович Усов<sup>3</sup>,  
Георгий Михайлович Шитов<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Институт машиноведения РАН, Москва, Россия

<sup>2</sup>Московский институт электронной техники, Зеленоград, Москва, Россия

<sup>3</sup>Национальный исследовательский технологический университет МИСиС, Москва, Россия  
[danilovvd@mail.ru](mailto:danilovvd@mail.ru)

*Аннотация.* На основе рассмотренной модели ЭГД задачи жесткого вала с вкладышем из композиционного материала и разработанного алгоритма решения уравнений математической модели проведен численный анализ влияния эксплуатационных параметров на характеристики слоя водяной смазки модельного подшипника скольжения.

*Ключевые слова:* внутренний контакт вала и вкладыша; толщина и давление в слое водной смазки, модельный подшипник скольжения.

## NUMERICAL ANALYSIS OF THE EFFECT OF OPERATIONAL PARAMETERS ON THE CHARACTERISTICS OF WATER LUBRICATION OF A MODEL SLIDE BEARING

© V.D. Danilov<sup>1</sup>, P.P. Usov<sup>2</sup>, G.M. Shitov<sup>3</sup>

<sup>1</sup>IMASH RAN, Moscow, Russia

<sup>2</sup>Moscow Institute of Electronic Technology, Zelenograd, Moscow, Russia

<sup>3</sup>National University of Science and Technology MISiS, Moscow, Russia  
[danilovvd@mail.ru](mailto:danilovvd@mail.ru)

*Abstract.* On the basis of the considered model of the EHD of a rigid shaft problem with a composite liner and the developed algorithm for solving the equations of a mathematical model, a numerical analysis was made of the influence of operating parameters on the characteristics of a layer of water lubrication of a model sliding bearing.

*Keywords:* internal contact of the shaft and liner; thickness and pressure in the layer of water lubrication, model sliding bearing.

**Введение.** Узлы трения различных механизмов, в том числе подшипники скольжения, исследуются на моделях контакта жесткого шероховатого вала с вкладышем из композиционного материала в присутствии смазочного материала, в качестве которого используется также водная среда.

Толщина слоя смазки и контактное давление в нем, которые являются основными контактными параметрами подшипниковых опор, существенно зависят не только от геометрических, скоростных и нагрузочных параметров, но и от деформации и шероховатости поверхности трения, в первую очередь вкладыша.

Среди публикаций, посвященных контакту жестких поверхностей, отметим работу [1]. Влияние деформаций на характеристики смазанного контакта учитывалось, например, в исследовании [2]. В настоящей работе проведено исследование влияния эксплуатационных параметров на толщину слоя смазки и давление в нем.

Модель внутреннего контакта жесткого шероховатого вала и вкладыша из композитного материала, жестко закрепленного в жестком корпусе, представлена в соответствии с рисунком 1. Внутренний радиус вкладыша мало отличается от радиуса вала  $R$ , то есть  $\Delta/R \ll 1$ , где  $\Delta = R_1 - R$ ,  $R_1$  - внутренний радиус вкладыша.

Пусть линия центров  $NN$  вкладыша и вала образует с линией действия нагрузки угол  $\theta$ , который находится в процессе решения задачи. Через  $\varphi$  обозначим угол, определяющий положение какого-либо поперечного сечения смазочного слоя и отсчитываемый от линии действия нагрузки по направлению движения поверхности вала. Рассмотрим случай подшипника с частичным углом охвата вала вкладышем. В этом случае координата  $\varphi$  начала смазочного слоя определяется положением входного кармана, из которого смазка подается под небольшим давлением в зазор. Пусть линия действия нагрузки делит угол охвата вала вкладышем пополам. Тогда координата начала смазочного слоя равна  $-\mathcal{G}$ , где  $2\mathcal{G}$  - угол охвата подшипника. Координата точки обрыва смазочного слоя  $\varphi_c$  неизвестна и определяется в процессе решения задачи. При этом должно выполняться условие  $|\varphi_c| \leq \mathcal{G}$ .

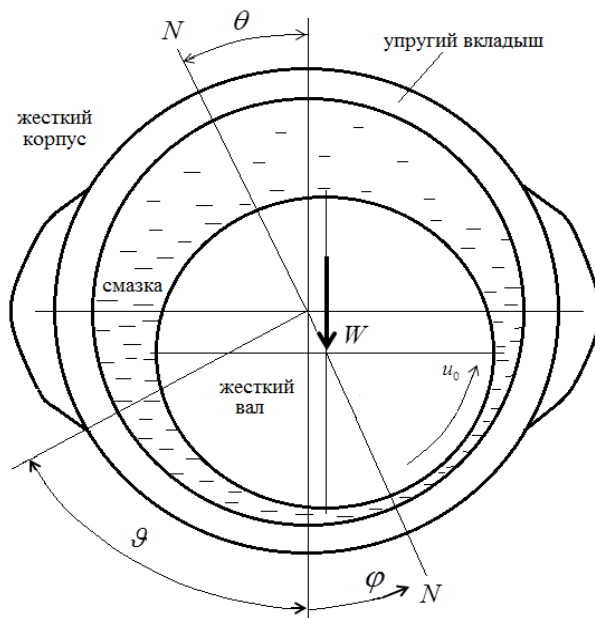


Рис. 1

При выполнении условий

$$\frac{\varepsilon}{R} \gg \frac{E}{E_{\kappa}}, \quad \frac{\varepsilon}{R} \gg \frac{E}{E_{\sigma}}, \quad (1)$$

где  $\varepsilon$  - толщина вкладыша,

$E$ ,  $E_{\sigma}$  и  $E_{\kappa}$  - модули упругости соответственно материалов вкладыша, вала и корпуса.

При определении толщины слоя смазочного материала деформациями вала и корпуса можно пренебречь, а учитывать только деформации вкладыша.

При выполнении дополнительного условия  $\frac{\varepsilon}{R} \ll 1$  перемещение поверхности вкладыша  $w$  равно [3]

$$w = \varepsilon \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)} \frac{P}{E}. \quad (2)$$

При этом выражение для толщины смазочного слоя с учетом шероховатости поверхности вкладыша можно записать в виде

$$\tilde{h}(\varphi) = \Delta - e \cos(\varphi - \theta) + \varepsilon \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu} \frac{P}{E} + \frac{1}{2} R_q \sin\left(2\pi \frac{R\varphi}{\lambda} + \beta\right), \quad (3)$$

где  $\nu$  - коэффициент Пуассона материала вкладыша;

$e$  - эксцентриситет;

$P$  - давление, действующее со стороны смазочного слоя на поверхность вкладыша;

$R_q$  - высота микронеровностей поверхности вкладыша;

$\lambda$  - шаг микронеровностей;

$\beta$  - фаза неровностей.

Распределение давления в смазочном слое определяем из уравнения Рейнольда, которое с учетом зависимости вязкости и плотности смазочного материала от давления в рассматриваемом случае можно записать в виде

$$\frac{1}{R^2} \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{\rho \tilde{h}^3}{12\mu} \frac{dP}{d\varphi} \right) - \frac{u}{2R} \frac{d(\rho \tilde{h})}{d\varphi} = 0, \quad (4)$$

Для учета изменения вязкости жидкости с изменением давления используем модель Баруса [4,5]

$$\mu = \mu_0 \exp(\alpha P), \quad (5)$$

где  $\mu_0$  - вязкость смазки при атмосферном давлении,  $\alpha$  - пьезокэффициент вязкости.

Зависимость плотности смазочного материала от давления примем в виде, предложенном в [4,5]:

$$\rho = \rho_0 \left( 1 + \frac{C_1 P}{1 + C_2 P} \right), \quad (6)$$

где  $\rho_0$  - плотность смазки при атмосферном давлении,  $C_1, C_2$  - константы.

Для уравнения Рейнольдса должны быть заданы граничные условия. Принимаем обычные для теории смазки условия:

$$\begin{aligned} P(-\vartheta) &= P(\varphi_c) = 0, \\ 0 < \varphi_c &\leq \vartheta, \quad \left. \frac{dP}{d\varphi} \right|_{\varphi=\varphi_c} = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\varphi_c$  - координата точки обрыва смазочного слоя.

Координата  $\varphi_c$  неизвестна и определяется в процессе решения задачи.

Условия равновесия вала имеют вид

$$\begin{aligned} R \int_{-\vartheta}^{\varphi_c} (P \cos \varphi - \tau \sin \varphi) d\varphi &= W, \\ R \int_{-\vartheta}^{\varphi_c} (P \sin \varphi + \tau \cos \varphi) d\varphi &= 0, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $W$  - нагрузка на единицу длины вала,  $\tau = \mu \frac{u}{\tilde{h}} + \frac{\tilde{h}}{2} \frac{1}{R} \frac{dP}{d\varphi}$  - касательные напряжения,

действующие со стороны смазочного слоя на вал.

Введем безразмерные переменные по формулам

$$h = \frac{\tilde{h}}{\Delta}, \quad p = \frac{P}{p_0}, \quad p_0 = \frac{\Delta(1-\nu)}{\varepsilon(1+\nu)(1-2\nu)} E, \quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad \bar{\mu} = \frac{\mu}{\mu_0}. \quad (9)$$

В безразмерных переменных уравнения задачи и граничные условия могут быть приведены к виду

$$h(\varphi) = 1 - \chi \cos(\varphi - \theta) + p + \frac{1}{2} \bar{R}_q \sin\left(2\pi \frac{\varphi}{\lambda} + \beta\right), \quad (10)$$

$$\frac{\bar{\rho} h^3}{\bar{\mu}} \frac{dp}{d\varphi} = V(\bar{\rho} h - h_c), \quad (11)$$

$$h_c = 1 - \chi \cos(\varphi_c - \theta) + \frac{1}{2} \bar{R}_q \sin\left(2\pi \frac{\varphi_c}{\lambda} + \beta\right),$$

$$\bar{\rho} = 1 + \frac{K_1 p}{1 + K_2 p}, \quad \bar{\mu} = \exp(Gp), \quad (12)$$

$$\int_{-\vartheta}^{\varphi_c} (p \cos \varphi - \tau \sin \varphi) d\varphi = P, \quad \int_{-\theta}^{\varphi_c} (p \sin \varphi + \tau \cos \varphi) d\varphi = 0, \quad (13)$$

$$\tau = \psi \left( \frac{V \bar{\mu}}{6 h} + \frac{h}{2} \frac{dp}{d\varphi} \right), \quad (14)$$

$$p(-\vartheta) = p(\varphi_c) = 0, \quad 0 < \varphi_c \leq \vartheta, \quad (15)$$

$$\left. \frac{\partial p}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=\varphi_c} = 0, \quad (16)$$

где  $\bar{R}_q = \frac{R_q}{\Delta}$ ,  $\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{R}$ ,  $\psi = \frac{\Delta}{R}$ ,  $\chi = \frac{e}{\Delta}$  - относительный эксцентриситет,  $V = \frac{6uR\mu_0}{\Delta^2 p_0} = \frac{p_*}{p_0}$ ,

$p_* = \frac{6uR\mu_0}{\Delta^2}$  - характерное гидродинамическое давление,  $K_1 = p_0 C_1$ ,  $K_2 = p_0 C_2$ ,  $G = \alpha p_0$ ,  $P$  - безразмерная нагрузка на вал, равная

$$P = \frac{W}{Rp_0}. \quad (17)$$

Входными параметрами являются  $\psi, V, G, K_1, K_2$  и одно из значений  $\chi, \bar{W}$ . Если задано  $\chi$ , то после решения задачи получаем значение  $\bar{W}$ , а если задано  $\bar{W}$ , то после решения задачи получаем значение  $\chi$ .

В результате решения системы уравнений кроме одного из значений  $\chi, \bar{W}$  получаем также значения углов  $\varphi_c, \theta$  и значения функций  $h(\varphi), p(\varphi)$  в выбранных узлах.

При численном решении уравнений математической модели исходные уравнения заменяем системой уравнений в конечных разностях и конечных суммах. Для этого на отрезке  $[-\vartheta, \varphi_c]$  вводим равномерную метку  $\{\varphi_k\}, k=1, 2, \dots, N, \varphi_1 = -\vartheta, \varphi_N = \varphi_c$ .

Из уравнения (10), следует, что

$$h_N = h_c = 1 - \chi \cos(\varphi_c - \theta) + \frac{1}{2} \bar{R}_q \sin\left(2\pi \frac{\varphi_c}{\lambda} + \beta\right), \quad (18)$$

$$h_i = h(\varphi_i) = L_i + y_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1,$$

(19)

$$L_i = 1 - \chi \cos(\varphi_i - \theta) + p_{i+1} + \frac{1}{2} \bar{R}_q \sin\left(2\pi \frac{\varphi_i}{\lambda} + \beta\right), \quad (20)$$

$$y_i = p_i - p_{i+1}, \quad p_i = y_i + p_{i+1}. \quad (21)$$

Уравнение Рейнольдса заменяем системой конечно-разностных уравнений

$$\rho_{i+1} (y_i + L_i + h_{i+1})^3 [1 - \exp(-G y_i)] =$$

$$= -4GV(\Delta\varphi)\exp(Gp_{i+1})\left[\rho_{i+1}(y_i + L_i + h_{i+1}) - 2h_c\right], \quad (22)$$

$$i = 1, 2, \dots, N-1,$$

$$\rho_i = 1 + \frac{K_1 p_i}{1 + K_2 p_i}. \quad (23)$$

В условиях (13) интегралы заменяем конечными суммами. В результате получаем уравнения

$$\sum_{k=1}^N (p_k \sin \varphi_k + \tau_k \cos \varphi_k) = 0, \quad (24)$$

$$\sum_{k=1}^N (\varphi_k - \varphi_{k-1})(p_k \cos \varphi_k - \tau_k \sin \varphi_k) = P, \quad (25)$$

$$\tau_k = \psi \left( \frac{V \exp(Gp_k)}{6 h_k} + \frac{h_k}{2} \frac{p_{k+1} - p_k}{\varphi_2 - \varphi_1} \right), \quad k = 1, 2, \dots, N-1, \quad (26)$$

$$\tau_N = \psi \left( \frac{V}{6 h_c} + \frac{h_c}{2} \frac{dp}{d\varphi} \Big|_{\varphi=c} \right). \quad (27)$$

При заданных значениях параметров  $\chi, \psi, V, G, K_1, K_2$  уравнения (18)-(24) представляют собой систему нелинейных алгебраических уравнений относительно углов и переменных  $h_i, p_i, \rho_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ). Данную систему уравнений решаем численно, используя метод Ньютона. Блок-схема программы, решающей данную систему уравнений численными методами, приведена в соответствии с рисунком 2.

Значение параметра  $T$ , приведенного в блок-схеме, равно

$$T = \sum_{k=1}^N (\varphi_k - \varphi_{k-1})(p_k \sin \varphi_k + \tau_k \cos \varphi_k),$$

$$|T| < \varepsilon_T. \quad (28)$$

Условие (28) задает точность выполнения уравнения (24).

Условие  $|p_1| < \varepsilon_p$  (29)

задает точность решения системы уравнений (18)-(23) относительно переменных  $h_i, p_i, \rho_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) при заданных значениях углов  $\theta, \varphi_c$ .

Вычисления в программе начинаются с того, что задаются начальные приближения углов  $\theta, \varphi_c$ . При заданных значениях этих углов переменная  $h_N$  определяется по формуле (18).

Значение  $p_N$  равно нулю в соответствии с граничными условиями.

Имея значения переменных  $p_N, h_N, \theta$  и  $\varphi_c$ , из уравнений (19)-(23) последовательно определяем значения  $h_{N-1}, p_{N-1}, h_{N-2}, p_{N-2}, \dots, h_1, p_1$ . Далее проверяем выполнение условия (29). Если это условие не выполнено, то корректируем  $\varphi_c$  и вычисляем новые значения переменных  $h_{N-1}, p_{N-1}, h_{N-2}, p_{N-2}, \dots, h_1, p_1$ . Если это условие выполняется, то проверяем выполнение условия (28). Если это условие выполняется, то вычисления заканчиваются, и

выводятся результаты расчетов. Если это условие не выполняется, то корректируем  $\theta$  и вычисляем новые значения переменных  $h_{N-1}, p_{N-1}, h_{N-2}, p_{N-2}, \dots, h_1, p_1$ .

Реализация представленного в соответствии с рисунком 2 алгоритма стала возможной в результате разработанной и отлаженной программы для ПК.

В соответствии с разработанной программой, выполнен численный анализ влияния эксплуатационных параметров на характеристики водной смазки модельного подшипника скольжения:

- радиус  $R = 0.05$  м;
- длина вкладыша  $L = 0.03$  м;
- радиальный зазор  $\Delta = 0.05$  мм;  $\Delta = 0.1$  м;  $\Delta = 0.16$  мм;
- толщина вкладыша  $\varepsilon = 0.003$  м;
- вкладыш из композитного материала с модулем упругости  $E = 1$  ГПа;
- коэффициент Пуассона материала вкладыша  $\nu = 0.32$ ;
- смазка – вода с вязкостью  $\mu = 0.001$  Па·сек;
- скорость скольжения  $u = 1.3$  м/сек;  $u = 2.6$  м/сек;
- $R_q = 1,0 - 2,5$  мкм - высота микронеровностей;
- $\lambda$  – шаг микронеровностей.

Шаг микронеровностей принимался равным 2 мм. Такое значение шага микронеровностей определялось ограничением по количеству узлов сетки  $N$ . При малом шаге микронеровностей число  $N$  должно быть большим, что приводит к трудностям вычислений, связанным с ограничением памяти компьютера и большим временем расчета. При шаге микронеровностей 2 мм число  $N$  принималось равным 2000.

Ниже приведены результаты расчетов и анализ этих результатов.

**Влияние радиального зазора.** На рисунках 3 - 5 приведены результаты расчетов при разных значениях радиального зазора и одинаковых значениях остальных параметров.

Из результатов расчетов, приведенных на рисунках 3 - 5, следует, что с ростом радиального зазора минимальная толщина смазочного слоя уменьшается, максимальное давление растет, а область, в которой развивается высокое давление, сужается. Из расчетов следует, что при радиальном зазоре 0.16 мм минимальная толщина смазочного слоя равна 3.28 мкм, а при радиальном зазоре 0.05 мм – 8.27 мкм. Максимальное давление равно 0.41 МПа при радиальном зазоре 0.05 мм и равно 0.94 МПа при радиальном зазоре 0.16 мм.

**Влияние скорости.** Влияние скорости скольжения на толщину смазочного слоя и распределение давления демонстрируют результаты расчетов, приведено на рисунках 5 и 6.

На рисунке 5 приведены функции  $\tilde{h}(\varphi)$  и  $P(\varphi)$  при скорости 1.3 м/сек, а на рисунке 6 – те же данные при скорости 2.6 м/сек. Значения остальных параметров одинаковы.

Из приведенных на рисунках 5 и 6 результатов следует, что рост скорости при постоянной нагрузке приводит к повышению минимальной толщины смазочного слоя, понижению максимального давления и увеличению размера области, в которой генерируется высокое давление.

При увеличении скорости в 2 раза, от 1.3 м/сек до 2.6 м/сек, минимальная толщина смазочного слоя возросла от 3.28 мкм до 6.3 мкм, то есть почти в 2 раза. Увеличение толщины смазочного слоя привело к уменьшению максимального давления от 0.94 МПа до 0.71 МПа. При этом выходная координата смазочного слоя при росте скорости также возросла на 0.1.

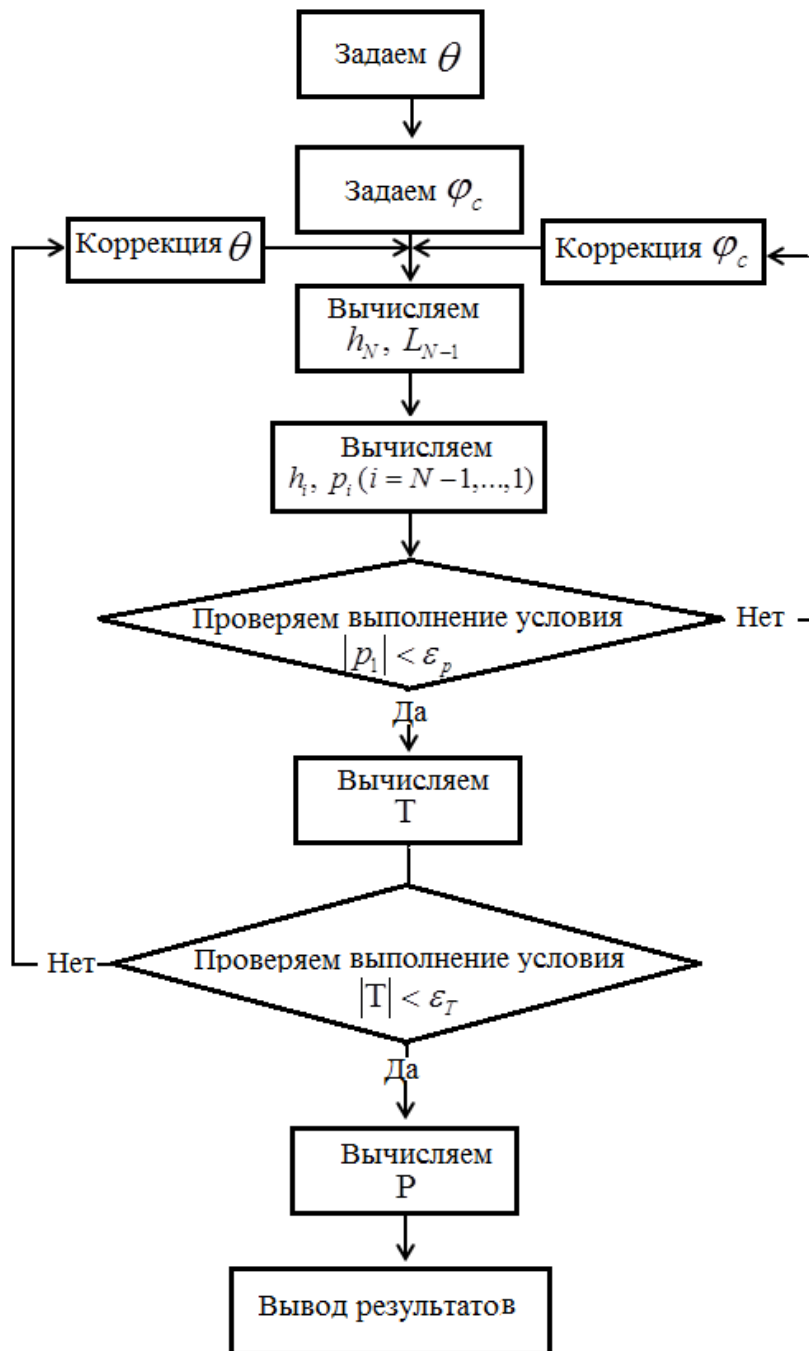
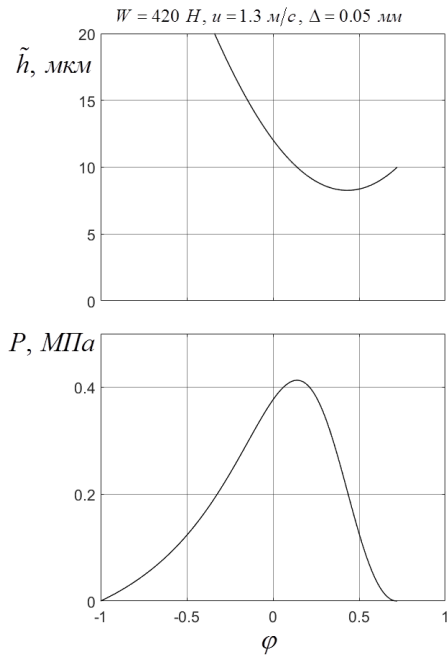
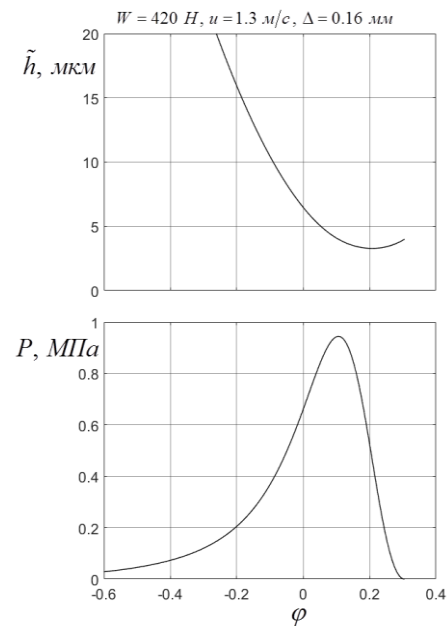


Рис. 2

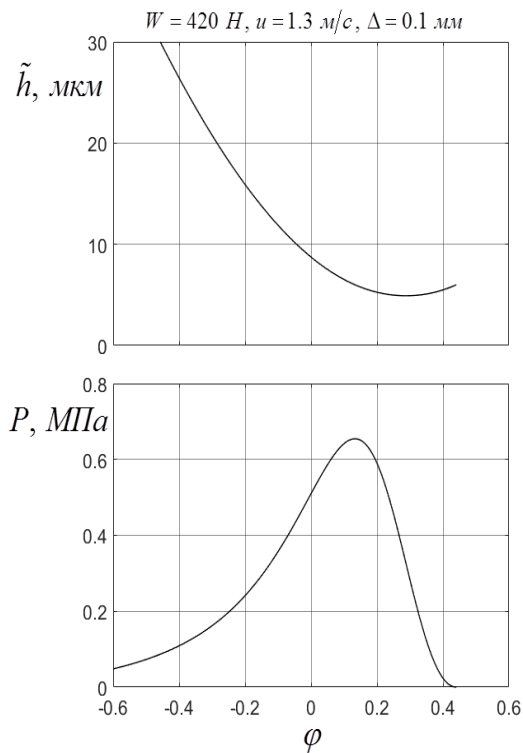




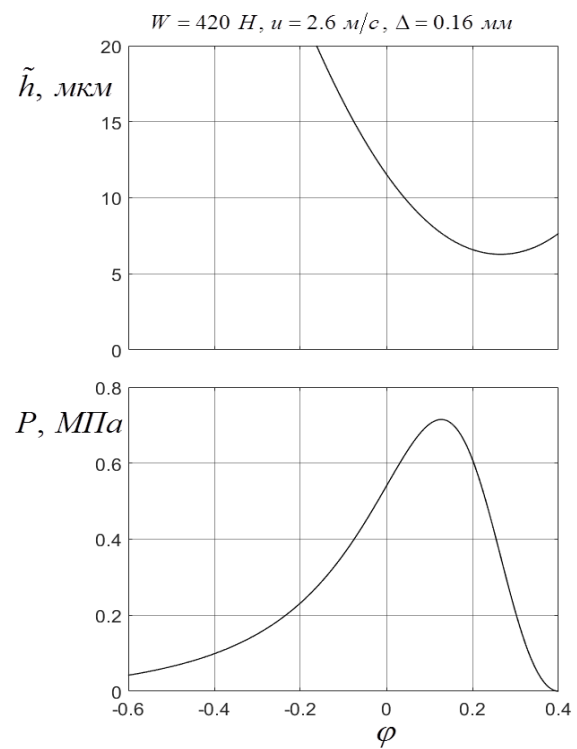
**Рис. 3.** Толщина смазочного слоя и давление в смазочном слое при радиальном зазоре 0.05 мм



**Рис. 5.** Толщина смазочного слоя и давление в смазочном слое при радиальном зазоре 0.16 мм



**Рис. 4.** Толщина смазочного слоя и давление в смазочном слое при радиальном зазоре 0.1 мм



**Рис. 6.** Толщина смазочного слоя и давление в смазочном слое при скорости 2.6 м/сек

**Влияние шероховатости.** Влияние шероховатости на характеристики подшипника иллюстрируют результаты расчетов, приведено на рисунках 6 - 8. На рисунке 6 приведены результаты расчетов для гладких поверхностей, а на рисунках 7 и 8 приведены результаты расчетов при тех же значениях входных параметров, но при разных высотах микронеровностей.

На рисунке 7 приведены результаты расчетов при скорости 2.6 м/сек, радиальном зазоре 0.16 мм и при высоте микронеровностей 1 мкм. Так как давление, развиваемое в смазочном слое, относительно невелико, высота микронеровностей в зазоре остается равной около 1 мкм, то есть уменьшения высоты микронеровностей за счет их деформаций практически не происходит. Пульсации давления при высоте микронеровностей 1 мкм невелики и оно положительно левее точки обрыва смазочного слоя.

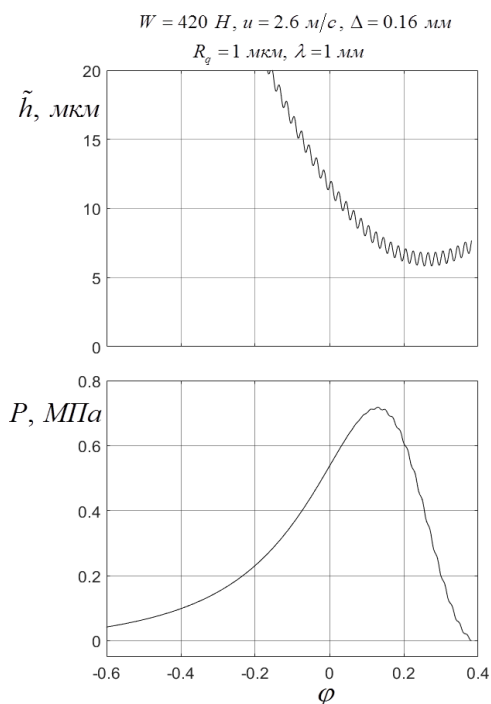
На рисунке 8 приведены результаты расчетов при той же скорости и тем же радиальном зазоре, что и на рисунке 4, но при высоте микронеровностей 2 мкм.

Из приведенных результатов следует, что так же как и при высоте микронеровностей 1 мкм деформации вкладыша практически не изменяют высоту микронеровностей. Пульсации давления возрастают. При этом, в отличие от случая  $\lambda = 1$  мкм пульсации давления приводят к появлению отрицательных давлений в окрестности выходной точки смазочного слоя. При этом не удается получить стационарное решение задачи при более высокой высоте микронеровностей. Данное обстоятельство может приводить к тому, что при высоте микронеровностей более 2 мкм условия для возникновения стационарного смазочного слоя не выполняются и контакт переходит в режим смешанного трения.

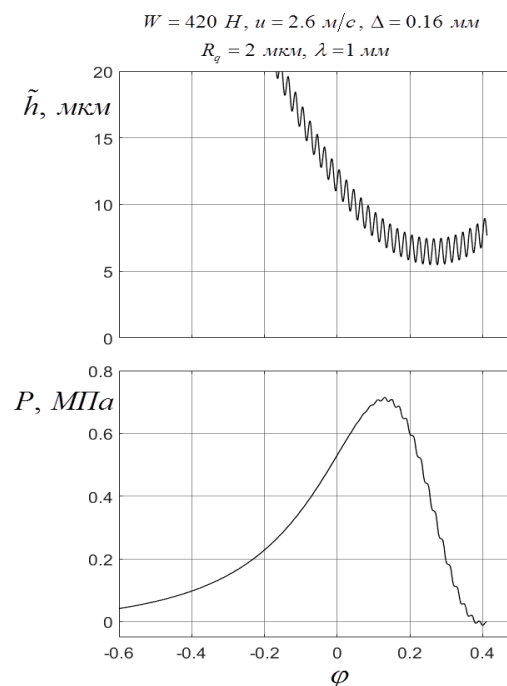
**Влияние нагрузки.** Все приведенные выше результаты получены при нагрузке 420 Н. На рисунке 9 приведены результаты расчетов при нагрузке 1150 Н для случая гладких поверхностей. При такой нагрузке минимальная толщина смазочного слоя равна 1.37 мкм, а максимальное давление в смазочном слое равно 3.5 МПа. Увеличение нагрузки привело к существенному уменьшению минимальной толщины смазочного слоя и к существенному росту максимального давления в смазочном слое.

**Влияние шероховатости при высокой нагрузке.** На рисунке 10 приведены результаты расчетов, полученных при тех же параметрах, что и результаты, приведенные на рис. 9, но при наличии шероховатости и при высоте микронеровностей 0,8 мкм.

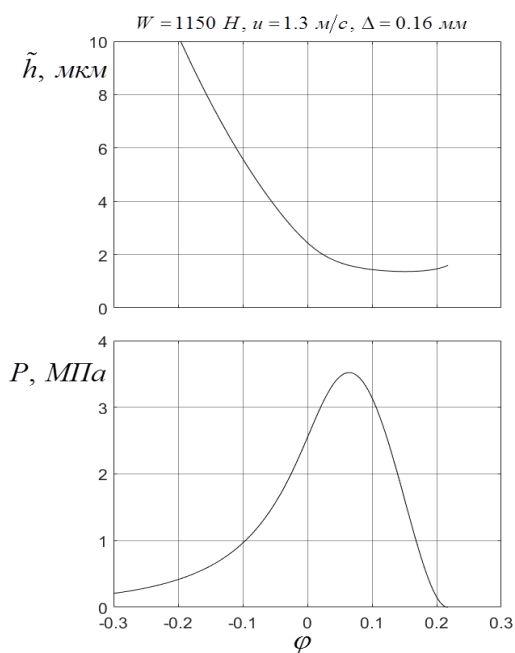
Из приведенных результатов следует, что при нагрузке 1150 Н уже при высоте микронеровностей 0.8 мкм пульсации давления таковы, что появляются отрицательные давления в окрестности выходной граничной точки смазочного слоя. Это может означать, что при такой нагрузке и высотах микронеровностей выше 0.8 мкм стационарный смазочный слой не может существовать и подшипник переходит в режим смешанного трения.



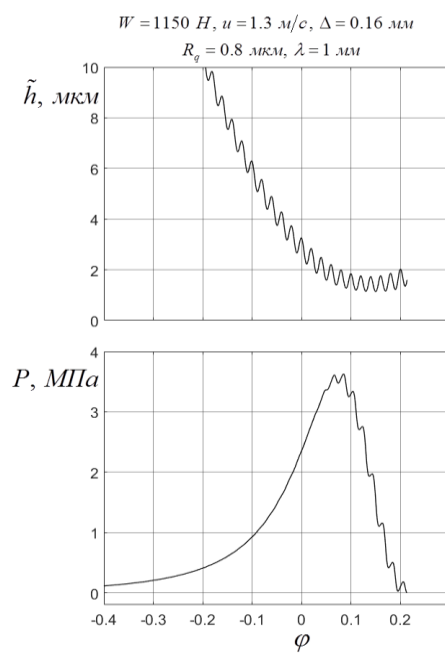
**Рис. 7.** Толщина смазочного слоя и давление в смазочном слое при скорости 2.6 м/сек и высоте микронеровностей 1 мкм



**Рис. 8.** Толщина смазочного слоя и давление в смазочном слое при скорости 2.6 м/сек и высоте микронеровностей 2 мкм



**Рис. 9.** Толщина смазочного слоя и давление в смазочном слое при скорости 1.3 м/сек и при нагрузке 1150 Н.



**Рис. 10.** Толщина смазочного слоя и давление в смазочном слое при скорости 1.3 м/сек, нагрузке 1150 Н и при высоте микронеровностей 0.8 мкм

**Заключение.** Численный анализ влияния эксплуатационных параметров на характеристики водной смазки модельного подшипника скольжения является эффективным инструментом, позволяющим устанавливать влияние эксплуатационных параметров на толщину слоя водной смазки и давления в нем.

Показано, что с ростом радиального зазора минимальная толщина смазочного слоя уменьшается, максимальное давление растет, а область, в которой развивается высокое давление, сужается. Рост скорости при постоянной нагрузке приводит к повышению минимальной толщины смазочного слоя, понижению максимального давления и увеличению размера области, в которой генерируется высокое давление. Анализ влияния шероховатости позволяет сделать вывод, что при высоте микронеровностей более 2 мкм условия для возникновения стационарного смазочного слоя не выполняются и контакт переходит в режим смешанного трения. Увеличение нагрузки приводит к существенному уменьшению минимальной толщины смазочного слоя и к существенному росту максимального давления в смазочном слое.

### Список литературы

1. Усов П.П. Теория гидродинамической смазки шероховатых поверхностей//Трение и износ. – 1986. - том 7. - С. 214-222.
2. Greenwood J.A., and Morales-Espejel G/E/ “The Behavior of Transverse Roughness in EHL Contacts”, Proceeding of the Institution of Mechanical Engineers: Part J. – 1994. – 29. – P. 121-132.
3. Галахов М. А., Усов П. П. Дифференциальные и интегральные уравнения математической теории трения. - М.: Изд-во «Наука», 1990. - 278 с.
4. Roelands C. J. A. Correlation aspects of viscosity-temperature-pressure relationship of lubricating oils: PhD Thesis. — Delft: Delft University of Technology, 1966.
5. Kudish I. I. Elastohydrodynamic lubrication for line and point contacts. Asymptotic and numerical approaches. Boca Raton: CRC Press, 2013.

*Дата поступления: 10 декабря 2018 г.*