

УДК 534.1

## ОПИСАНИЕ ИНТЕНСИВНЫХ ИЗГИБНЫХ ВОЛН В БАЛКЕ ТИМОШЕНКО, ЛЕЖАЩЕЙ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ, С ПОМОЩЬЮ МОДИФИЦИРОВАННОГО ЭВОЛЮЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ВОЛНОВОЙ ДИНАМИКИ

© Анна Викторовна Леонтьева

*Институт проблем машиностроения РАН – филиал Федерального государственного бюджетного научного учреждения «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики Российской академии наук» (ИПМ РАН), Нижний Новгород, Россия*  
[aleonav@mail.ru](mailto:aleonav@mail.ru)

**Аннотация.** В настоящей работе рассматриваются изгибные волны, распространяющиеся в однородной балке, закрепленной на нелинейно-упругом основании. Динамическое поведение балки определяется теорией Тимошенко. Система уравнений, описывающая изгибные колебания балки, сводится к одному нелинейному уравнению четвертого порядка относительно поперечных смещений частиц балки. Показано, что эволюционное уравнение представляет собой модифицированное уравнение Островского с дополнительным кубично-нелинейным слагаемым. Для эволюционного уравнения найдены точные солитонные решения из класса стационарных волн в виде кинка и антикинка.

**Ключевые слова:** изгибная волна, балка Тимошенко, нелинейно-упругое основание, эволюционное уравнение, обобщение модифицированного уравнения Островского.

*Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 14-19-01637).*

## THE DESCRIPTION OF INTENSIVE FLEXURAL WAVES IN A BEAM OF TYMOSHENKO LYING ON THE ELASTIC FOUNDATION BY MEANS OF THE MODIFIED EVOLUTIONARY EQUATION OF NONLINEAR WAVE DYNAMICS

© A.V. Leonteva

*Mechanical Engineering Research Institute of RAS, Nizhny Novgorod, Russia*  
[aleonav@mail.ru](mailto:aleonav@mail.ru)

**Abstract.** In this paper we consider a flexural waves propagating in the uniform beam fixed on the nonlinear-elastic foundation. The dynamic behavior of a beam is defined by Timoshenko's theory. The system of the equations describing flexural fluctuations of a beam comes down to one nonlinear equation of the fourth order of relatively transverse displacements of particles of a beam. It is shown that the evolutionary equation represents the modified Ostrovsky's equation with additional cubic-nonlinear term. For the evolutionary equation exact solitonic solutions from a class of stationary waves in a look a kink and an antikink are found.

**Keywords:** flexural wave, Timoshenko's beam, nonlinear-elastic foundation, evolutionary equation, generalization of the modified Ostrovsky's equation.

**Acknowledgements.** The work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 14-19-01637).

При моделировании процессов взаимодействия транспортных средств и упругих направляющих часто рассматриваются задачи об изгибных колебаниях балки, при учете сдвиговых деформаций и инерции вращения поперечного сечения (модель Тимошенко), лежащей на упругом основании [1–4].

Движение современных высокоскоростных поездов сопровождается интенсивной вибрацией, как самого железнодорожного полотна, так и в окружающем его грунте, что приводит к быстрому изнашиванию железнодорожного полотна и может вызвать сход поезда с рельсов. Поэтому при строительстве железнодорожных магистралей, особенно на мягких почвах, увеличивают жесткость грунта, а это обязывает, в свою очередь, учитывать при расчетах нелинейность упругого основания.

Рассмотрим балку Тимошенко на нелинейно-упругом основании [5, 6]:

$$\rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \kappa \mu F \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \kappa \mu F \frac{\partial \varphi}{\partial x} + h_1 w + h_2 w^3 = 0 \quad (1)$$

$$\rho I_y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - EI_y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \kappa \mu F \left( \varphi - \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0 \quad (2)$$

$w(x, t)$  – поперечное смещение частиц срединной линии стержня,  $\varphi(x, t)$  – угол отклонения сечения стержня от вертикального положения,  $\rho$  – плотность материала стержня,  $F$  – площадь поперечного сечения стержня,  $\kappa$  – поправочный коэффициент, учитывающий отклонение от теории плоских сечений, его величина зависит от способа определения среднего значения для угла сдвига и характера распределения сдвигов по сечению (для стержня прямоугольного сечения  $\kappa = 5/6$ ),  $\mu$  – модуль сдвига,  $h_1, h_2$  – коэффициенты, характеризующие нелинейно-упругое основание,  $I_y$  – осевой момент инерции (для прямоугольного поперечного сечения  $I_y = a^3 b / 12$ ),  $E$  – модуль Юнга.

Система уравнений (1), (2) сводится к одному уравнению относительно поперечного смещения частиц  $w$ :

$$\left( \rho F + \frac{h_1 \rho I_y}{\kappa \mu F} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{E h_1 I_y}{\kappa \mu F} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + EI_y \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \rho I_y \left( 1 + \frac{E}{\kappa \mu} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho^2 I_y}{\kappa \mu} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} + \frac{h_2 \rho I_y}{\kappa \mu F} \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) w^3 + h_1 w + h_2 w^3 = 0 \quad (3)$$

В безразмерных переменных уравнение (3) принимает вид:

$$\begin{aligned} & (1 + a_1) \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} - a_1 \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial z^4} - (1 + a_2) \frac{\partial^4 W}{\partial z^2 \partial \tau^2} + \\ & + a_2 \frac{\partial^4 W}{\partial \tau^4} + a_3 \left( \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) W^3 + \frac{a_1}{a_2} W + \frac{a_3}{a_2} W^3 = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

где  $W = w/w_0$ ,  $z = x/X$ ,  $\tau = t/T$  – безразмерные величины перемещения, координаты и времени, соответственно. Характерные величины приняты равными

$$X^2 = \frac{I_y}{F}, \quad T^2 = \frac{\rho I_y}{E F} = \frac{I_y}{c_0^2 F},$$

( $c_0 = \sqrt{E/\rho}$  – скорость распространения продольных волн в стержне), безразмерные комплексы параметров имеют вид

$$a_1 = \frac{h_1 I_y}{\kappa \mu F^2}, \quad a_2 = \frac{E}{\kappa \mu}, \quad a_3 = \frac{h_2 I_y}{\kappa \mu F^2} w_0^2.$$

Перейдем в уравнении (4) в движущуюся систему координат  $\xi = z - ct$ ,  $\theta = \varepsilon t$ , где  $c$  – скорость волны, заранее неизвестна,  $\varepsilon$  – малый параметр ( $\varepsilon \ll 1$ ). Выбор переменных объясняется тем, что возмущение, распространяясь со скоростью  $c$  вдоль оси  $z$ , медленно эволюционирует во времени из-за нелинейности, дисперсии и диссипации.

Учитывая малость нелинейных и дисперсионных слагаемых, в нулевом приближении находим скорость нелинейной волны

$$c^2 = \frac{a_1}{1 + a_1}.$$

В первом приближении по малому параметру имеем:

$$-2\varepsilon c(1 + a_1) \frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial \theta} + (1 - c^2)(1 - a_2 c^2) \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} - a_3(1 - c^2) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} (W^3) + \frac{a_1}{a_2} W + \frac{a_3}{a_2} W^3 = 0. \quad (5)$$

Перепишем уравнение (5) в более компактном виде:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial W}{\partial \theta} + d_1 W^2 \frac{\partial W}{\partial \xi} + d_2 \frac{\partial^3 W}{\partial \xi^3} \right) - d_3 W - d_4 W^3 = 0, \quad (6)$$

где коэффициенты уравнения равны

$$d_1 = \frac{3a_3}{2\varepsilon c(1 + a_1)^2}, \quad d_2 = \frac{a_1 a_2 - (1 + a_1)}{2\varepsilon c(1 + a_1)^3}, \quad d_3 = \frac{a_1}{2\varepsilon c(1 + a_1)a_2}, \quad d_4 = \frac{a_3}{2\varepsilon c(1 + a_1)a_2}.$$

Уравнение (6) можно классифицировать как модифицированное уравнение Островского [7–10], с дополнительным нелинейным слагаемым. Естественно назвать уравнение (6), без последнего слагаемого, модифицированным уравнением Островского, по аналогии, с известными модифицированным уравнением Кортевега – де Вриза (мКдВ) и модифицированным уравнением Бюргера. Однако понятие "модифицированное" в случае уравнения КдВ имеет несколько иное значение и связано с наличием преобразования Миуры [11], которое переводит решения модифицированного уравнения в решения классического уравнения. Похожих преобразований относительно классических и модифицированных уравнений Бюргера и Островского пока не найдено.

Модифицированное уравнение Островского не имеет точных решений, но допускает качественное исследование при равенстве нулю старшей производной, как и уравнение Островского. Наличие дополнительного кубично-нелинейного слагаемого позволяет найти точные решения уравнения в виде солитонов.

Для стационарных волн  $W(\xi, \theta) = W(\chi)$ ,  $\chi = \xi - \nu\theta$  уравнение (6) запишется так:

$$\left( -\nu W' + d_1 W^2 W' + d_2 W''' \right) - d_3 W - d_4 W^3 = 0, \quad (7)$$

где  $\nu$  имеет смысл скорости нелинейной волны. Считаем, что волна распространяется в положительном направлении оси  $\xi$ .

Будем искать решение уравнения (7) методом простейших уравнений [12], используя в качестве простейшего уравнения – уравнение Риккати с постоянными коэффициентами в виде

$$Y'(\chi) = -Y^2(\chi) + B_0, \quad (8)$$

которое имеет решение

$$Y(\chi) = \sqrt{B_0} \operatorname{th}(\sqrt{B_0} \chi). \quad (9)$$

Решение уравнения (7) имеет полюс первого порядка, и поэтому решение типа уединенных волн будем искать в виде

$$W(\chi) = b_0 Y(\chi) + b_1 \quad (10)$$

где  $Y(\chi)$  – решение (9) уравнения (8).

Подставляя решение (10) в уравнение (7) и учитывая уравнение Риккати, получаем полином относительно  $Y(\chi)$ . Приравнявая нулю выражения при одинаковых степенях  $Y(\chi)$ , получаем систему алгебраических уравнений, из которой находим значения коэффициентов

$$b_0^2 = -\frac{6d_2}{d_1}, \quad b_1 = 0, \quad B_0 = \frac{d_1 d_3}{6d_2 d_4}.$$

Кроме того, находим выражение для скорости нелинейной волны

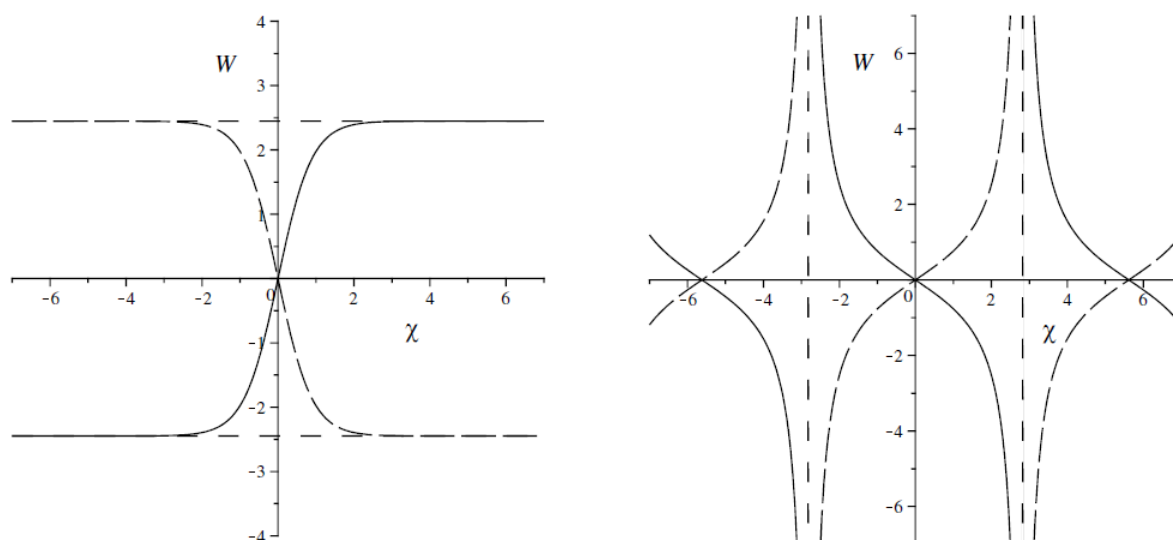
$$v = -\frac{d_1 d_3}{3d_4} + \frac{3d_2 d_4}{d_1}.$$

Учитывая значения найденных коэффициентов, решение (10) принимает вид

$$W(\chi) = \pm \sqrt{-\frac{d_3}{d_4}} \operatorname{th} \left( \sqrt{\frac{d_1 d_3}{6d_2 d_4}} \chi \right) \quad (11)$$

Будем считать, что  $W_1 = W_+$ ,  $W_2 = W_-$  при подстановке  $b_{0+}$  и  $b_{0-}$ , соответственно. Решения  $W_1$ ,  $W_2$  отличаются лишь знаками перед гиперболическим тангенсом.

Очевидно, что для существования действительных решений, коэффициенты  $d_1$  и  $d_2$  должны быть разных знаков. Для существования ограниченных действительных решений, разных знаков должны быть коэффициенты в парах  $d_1, d_2$  и  $d_3, d_4$  (рис. 1). При положительных подкоренных выражениях в (11) решение  $W_1(\chi)$ , как и решение  $W_2(\chi)$ , является уединенной волной и имеет профиль кинка – плавного перепада между двумя значениями функции (рис. 1а). При отрицательных подкоренных выражениях решения  $W_1(\chi)$ ,  $W_2(\chi)$  являются периодическими неограниченными (рис. 1б). Наибольший интерес представляют ограниченные решения.



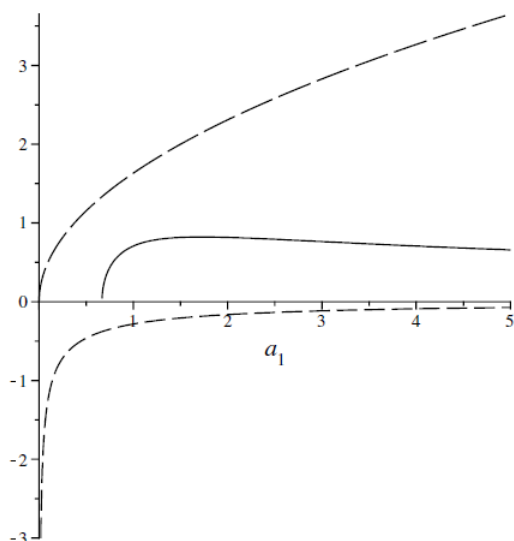
**Рис. 1.** Профили ограниченных и неограниченных решений  $W_1(\chi)$  (сплошная) и  $W_2(\chi)$  (длинный пунктир) при различных значениях  $d_1-d_4$

Решения в виде кинков существуют на плоскости одновременно, причем каждый из кинков является симметричным относительно точки перегиба, совпадающей с началом координат. Один из кинков монотонно возрастающий, другой – монотонно убывающий. Кинки имеют одинаковые амплитуды и ширины:  $A = 2\sqrt{-\frac{d_3}{d_4}}$ ,  $\Delta = \sqrt{\frac{6d_2d_4}{d_1d_3}}$ .

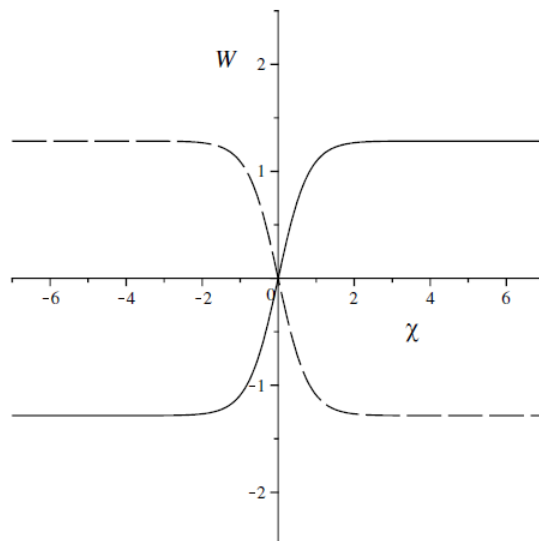
Вернемся к безразмерным параметрам задачи. Выражения для скорости, амплитуды и ширины волны примут вид:

$$v = -\frac{1}{2\varepsilon a_1 a_2} \sqrt{\frac{a_1}{1+a_1}}, \quad A = 2\sqrt{-\frac{a_1}{a_3}}, \quad \Delta = 2\sqrt{\frac{a_1 a_2 - (1+a_1)}{2a_1(1+a_1)}}. \quad (12)$$

Получаем ограничения на параметры  $a_1 > 0$ ,  $a_2 > 1$ ,  $a_3 < 0$ . Графическое представление зависимостей (12) от параметра  $a_1$  и соответствующие профили решений  $W_1$ ,  $W_2$  при фиксированных параметрах изображены на рис. 2, 3.



**Рис. 2.** Зависимости  $A(a_1)$  (длинный пунктир),  $\Delta(a_1)$  (сплошная),  $v(a_1)$  (пунктир) при фиксированных параметрах  $a_2, a_3$



**Рис. 3.** Профили решений  $W_1$  (сплошная),  $W_2$  (длинный пунктир) при фиксированном параметре  $a_1$  ( $a_1 > \frac{1}{a_2 - 1}$ )

При увеличении значения  $a_1$  амплитуда растет, нелинейная скорость падает, причем волна распространяется в отрицательном направлении оси  $\chi$ . Ширина фронта волны сначала увеличивается, затем уменьшается. Максимальная ширина фронта волны достигается в точке  $a_1 = \frac{1 + \sqrt{a_2}}{a_2 - 1}$  и равна  $\Delta = \sqrt{2}(\sqrt{a_2} - 1)$ , минимальная – при  $a_1 \rightarrow +\infty$  или  $a_1 \rightarrow \frac{1}{a_2 - 1}$ . При увеличении  $a_2$  точка максимума на рис. 2 сдвигается влево, максимальное значение ширины фронта волны при этом увеличивается.

Таким образом, в работе показано, что учет нелинейности в упругом основании соответствует более точному описанию изгибных волн и позволяет обнаружить стационарные нелинейные волны солитонного типа в виде кинков.

## Список литературы

1. Весницкий А.И. Волны в системах с движущимися границами и нагрузками. - М.: Наука, Физматлит, 2001. - 320 с.
2. Metrikine A.V., Verichev S.N. Instability of a moving two-mass oscillator on a flexibly supported Timoshenko beam // Archive of Applied Mechanics. - 2001. - V.71. - P.613-624.
3. Verichev S.N. Instability of a vehicle moving on an elastic structure. Delft University Press. The Netherlands. - 2002. - 190 p.
4. Lamb J.L. Critical velocities for rocket sled excitation of rail resonance // Johns Hopkins APL Technical Digest. - 2000. - Vol.21, No 3. - P.448-458.
5. Ерофеев В.И., Лисенкова Е.Е., Семерикова Н.П. Дисперсионные зависимости и самомодуляция изгибных волн в балке Тимошенко, лежащей на упругом основании // Проблемы машиностроения и надежности машин. - 2006. - № 4. - С.27-31.
6. Ерофеев В.И., Кажаяев В.В., Лисенкова Е.Е., Семерикова Н.П. Несинусоидальные изгибные волны в балке Тимошенко, лежащей на нелинейно-упругом основании// Проблемы машиностроения и надежности машин. - 2008. - № 3. - С.30-36.
7. Островский Л.А. Нелинейные внутренние волны во вращающемся океане // Океанология. - 1978. - Т. 18, №2. - С. 181-191.
8. Островский Л.А., Степанянц Ю.А. Нелинейные волны во вращающейся жидкости // Нелинейные волны: физика и астрофизика. - М.: Наука, 1993. - С.132-153.
9. Гандариас М.Л., Брузон М.С. Симметричный анализ и точные решения для некоторых уравнений Островского // Теоретическая и математическая физика. - 2011. - Т. 168, № 1. - С. 49-64.
10. Stepanyants Y.A. On stationary solutions of the reduced Ostrovsky equation: Periodic waves, compactons and compound solitons // Chaos, Solitons and Fractals. - 2006. - Vol. 28. - P. 193-204.
11. Рыскин Н.М., Трубецков Д.И. Нелинейные волны. - М.: Ленанд, 2017. - 312 с.
12. Кудряшов Н.А. Методы нелинейной математической физики: Учебное пособие. - Долгопрудный: Интеллект, 2010. - 368 с.

*Дата поступления: 12 октября 2018 г.*