

УДК 534.1

## ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ МОДЕЛЕЙ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ УДАРНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ВИБРАЦИОННЫХ ПОЛЕЙ

© Виталий Львович Крупенин<sup>1,2</sup><sup>1</sup>ИМАШ РАН, Москва, Россия<sup>2</sup>Московский Политехнический Университет, Москва, Россия[krupeninster@gmail.com](mailto:krupeninster@gmail.com)

**Аннотация.** Обсуждаются способы моделирования виброполей, существующих в машинных конструкциях, при помощи распределенных ударных элементов – систем, учитывающих собственные волновые явления, имеющие место в соударяющихся объектах (ударных парах). Ударные пары различных родов весьма часто оказываются главными факторами, определяющими указанные вибрационные поля. Рассмотрены два типа соответствующих моделей: системы с простой и сложной структурами. Приведены примеры динамических моделей и результаты анализа.

**Ключевые слова:** вибрирующая струна, точечный ограничитель, прямой протяженный ограничитель, вибрирующая стенка, вибропроводящая система, виброударный процесс, ударная пара, периодическая функция Грина, резонанс, фаза удара, импульс удара, спектр.

Работа выполнялась при поддержке РФФИ (проект 18-08-00168).

## TO THE ANALYSIS OF VIBRATIONAL CONDUCTING SYSTEMS WITH INCLUSIVE SHOCK VARIATIONS

© Vitaly Krupenin<sup>1,2</sup><sup>1</sup> IMASH RAN, Moscow, Russia<sup>2</sup> Moscow Polytechnic University, Moscow, Russia[krupeninster@gmail.com](mailto:krupeninster@gmail.com)

**Abstract.** The ways of simulation of vibration fields existing in machine structures, using distributed shock elements - systems that consider their own wave phenomena occurring in colliding objects (shock pairs) are discussed. Shock pairs of various genera very often turn out to be the main factors determining these vibrational fields. Two types of corresponding models are considered: systems with simple and complex structures. Examples of dynamic models and results of analysis are given.

**Keywords:** vibrating string, point limiter, straight extended limiter, vibrating wall, vibro-conducting system, vibro-impact process, impact pair, periodic Green's function, resonance, impact phase, impact pulse, spectrum.

**Acknowledgements.** The work was supported by RFBR (project 18-08-00168).

**Введение.** Моделирование вибрационных полей в машинных конструкциях является важной и актуальной проблемой, поскольку их особенности и структура с одной стороны определяют виброактивность машин или систем машин, а с другой стороны могут также определить и многие аспекты полезного использования вибрационных процессов. Один из

важнейших факторов формирования вибрационного поля - систематические соударения элементов конструкций, генерирующие широкополосные виброударные процессы. Во многих случаях именно виброударные процессы оказываются определяющими факторами, влияющими на структуру вибрационных полей [1, 2].

Описание глобальных виброполей, устанавливающихся в пространственных областях может быть разделено на два раздела.

Во-первых, для многих задач важен учет волновых свойств самих соударяющихся тел. Например, в случаях, когда виброполя определяются, в частности, соударениями каких-либо струн, нитей, балок, цепей, проводов, кабелей, мембран, пластин, панелей, решеток и тому подобных протяженных, плоских или более сложных объектов.

Во-вторых, большое число систем представимо в виде каких-либо несущих упругих, вязкоупругих, упруго-пластичных и тому подобных конструкций с упруго амортизированным оборудованием, содержащим какие-либо ударные пары.

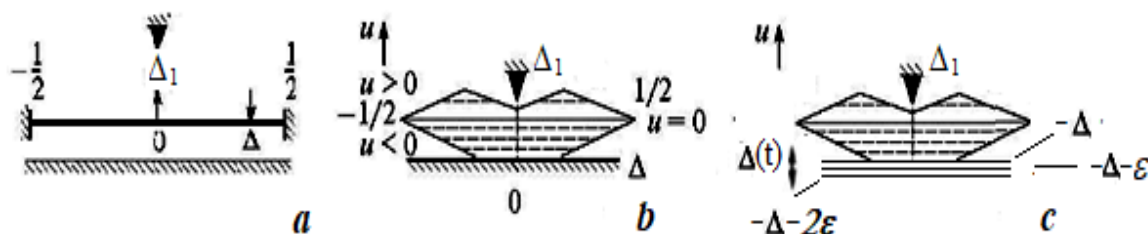
В-первом случае моделирование должно осуществляться посредством описания процесса удара в самих конструкциях. Здесь могут быть использованы модели распределенных сильно нелинейных систем простой структуры [3, 4]. Во-втором случае, может оказаться целесообразным провести некоторую идеализацию («размазывание» оборудования по пространству) и воспользоваться моделями сильно нелинейных сплошных сред сложной структуры [1, 5 - 7].

Отметим, что выделение двух случаев сделано для удобства. Они имеют близкую природу, описываются во многом аналогичными моделями и им присуще проявление сходных динамических эффектов, возможно, главный из которых - возникновение «хлопков» (появление синхронизации ударов в отдаленных точках). Именно системы двух указанных типов и будут рассматриваться в статье.

**1. Струна с двойным ограничителем хода: постановка задачи.** Рассмотрим систему, показанную на рис. 1. Абсолютно гибкая нить (струна), защемленная на концах совершает плоские колебания, ограниченные точечным и плоским препятствиями.

Предполагаем при этом, что плоская стенка вибрирует по закону  $\Delta_0(t) = -\Delta - 2\varepsilon - \varepsilon d(t) < 0$ ;  $\varepsilon$  - малый параметр ( $\Delta_0 > \varepsilon > 0$ ).

Обозначим искомый прогиб (виброполе) как  $u(x, t)$ . Выбрав единицы измерения так, что плотность материала струны и натяжение – единичны, в отсутствии касания ограничителей, будем иметь:  $u_{tt} - u_{xx} = 0$ .



**Рис.1.** Плоские колебания струны в присутствии двойного ограничителя

Пусть  $x \in [-1/2, 1/2]$ ;  $t \in \mathbb{R}$ . Граничные условия и соотношения, описывающие препятствия, запишем в виде

$$u(-1/2, t) = u(1/2, t) = 0; \quad u(x, t) \geq \Delta(t), \quad \Delta < 0; \quad u(0, t) \leq \Delta_1, \quad \Delta_1 > 0. \quad (1)$$

Здесь  $\Delta_1$  – координата точечного ограничителя, расположенного посередине струны. Рассматриваемую задачу можно записать в виде нелинейного уравнения Клейна-Гордона

$$u_{tt} - u_{xx} - \Phi(u) = 0, \quad (2)$$

где обобщенная функция  $\Phi(u)$  – плотность силы взаимодействия струны с препятствиями:  $\Phi(u) = \Phi_{\Delta}(u) + \Phi_{\Delta_1}(u)$  – представима как сумма плотностей сил взаимодействия с прямым и точечным ограничителями (Fig. 1, a).

Введение обобщенных функций необходимо ввиду разрывов, возникающих вследствие ударов [3, 7, 8].

Случай консервативной системы ( $\varepsilon = 0$ ) рассмотрен в статье [4]. Вид плотности силы взаимодействия с точечным ограничителем  $\Phi_{\Delta_1}(u)$  определялся из следующих соображений. При взаимодействии, когда  $x=0$ , в течение некоторого времени существуют выстои струны. При этом во время выстоев на струну при  $u(0, t) = \square \Delta_1$  ( $t \in [t_j, \theta_j]$ ) действует сила реакции точечного препятствия  $r_j(t)$ . Здесь  $t_j$  и  $\theta_j$  – вычисляемые моменты начала и конца выстоя; индекс  $j$ - отвечает некоторому  $j$ -му взаимодействию. Таким образом

$$\Phi_{\Delta_1}(u) = R_j(t) \delta(x) [\eta(t-t_j) - \eta(t-\theta_j)], R_j(t) = u_x(-0, t) - u_x(+0, t) \leq 0; t \in [t_j, \theta_j], \quad (2)$$

где  $\eta(t)$  – единичная функция.

При взаимодействии с плоской частью ограничителя в консервативном случае ( $\varepsilon = 0$ ) принимается континуальный аналог гипотезы Ньютона:

$$u_t(x, t-0) = -u_t(x, t+0), u(x, t) = \Delta. \quad (3)$$

Соотношения (3) определяют обобщенную функцию  $\Phi_{\Delta}(u)$ . При некоем  $n$ -м подходе струны к ограничителю [4]

$$\Phi_{\Delta}(u) = J(x) \delta[t - t_n(x)] \gamma(x; \Delta). \quad (4)$$

Здесь  $J(x)$  – плотность ударного импульса,  $t_n(x)$  – распределение  $n$ -й «фазы» удара, определяемой из уравнения  $u[x, t_n(\xi)] = \Delta < 0$ ;  $\delta(t)$  –  $\delta$ -функция Дирака. Индикаторная функция  $\gamma(x; \Delta) = 0$  при тех  $x$ , когда струна не взаимодействует с плоским ограничителем и  $\gamma(x; \Delta) = 1$ , когда взаимодействует.

Таким образом задачей оказывается изучение решения уравнения (2) с дополнительными условиями (1).

Было показано (см. [4]), в частности, что если ограничиться начальными условиями в определенном смысле подобным тем, что порождают первую стандартную форму собственных колебаний струны в случае движений без ограничителей, когда начальные условия задачи

$$u(x, 0) = 0; u_t(x, 0) = -2V_0 \pi \sin[\pi(x+1/2)],$$

то единственный периодический виброударный процесс, сохраняющий структурную устойчивость т. е. качественно не зависящий от малых изменений параметров будет относиться к классу синхронных хлопков [3, 4] и иметь структуру:

$$u(x, t) = W(J_0; x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} D_{1k}(J_0; x, t) D_{2k}(J_0; x, t), J(\omega) = \omega(2|\Delta| + \Delta_1)(2\pi - \omega)^{-1}. \quad (5)$$

Здесь функция  $W(J_0; x, t)$  отвечает профилю стоячей волны типа «хлопок с двумя зубцами» (рис. 1, b);  $D_{1k}(J_0; x, t)$  и  $D_{2k}(J_0; x, t)$  периодические, с периодом  $2\pi\omega^{-1}$ , весьма громоздкие функции, зависящие от всех параметров системы, фигурирующих в формулах (1), (3) и (4), а так же собственных свойств струны.

Опишем движение при помощи рис. 1, b. Пусть из положения равновесия струна, принимая трапецевидный профиль равномерно, со скоростью  $-\frac{1}{2}J(\omega)$  движется к плоскому

препятствию. В момент времени  $t_1$  верхняя основа трапеции соударяется с препятствием и отражается в соответствии с условием (3).

Затем верхний участок струны начинает двигаться к точечному ограничителю, которого он достигает в некоторый момент  $t_2$ . После чего срединная точка совершает выстой, а профиль приобретает «двухтрапецевидную» форму. После достижения финальной «двухзубцовой» конфигурации процесс идет в обратном порядке.

Отметим также, что вторая формула (5) определяет частоты существования структурно устойчивых периодических стоячих волн данного типа. Эти частоты заполняет отрезок  $[0, 2\pi]$ , причем частота  $\omega \rightarrow 2\pi$  отвечает бесконечно большим энергиям.

## 2. Вынужденные колебания под действием вибрация плоской части ограничителя.

Пусть параметр  $\varepsilon > 0$ . Для достаточно малых его значений будем искать вынужденные колебания в виде хлопка (5), так как данный режим – единственный структурно устойчивый. При рассмотрении хлопков, в принципе, правомерно использование аналога гипотезы Ньютона о коэффициенте восстановления.

Пусть  $0 < R \leq 1$ . Не изменяя условий (1) и (3), положим вместо (2)

$$u_t(x_0, t_0 + 0) = -Ru_t(x_0, t_0 - 0) + (1 + R)\Delta'_0(t_0) \quad (6)$$

Хлопки можно характеризовать парой переменных  $(v_k, t_k)$ , где  $v_k$  — модуль скорости каждой точки отрезка удара перед  $k$ -м соударением, приходящимся на момент  $t_k$ . Между ударами струна линейна (период колебаний равен 2). Поэтому

$$; t_{k+1} = t_k + 1 + 2|\Delta'_0(t_k)|v_{k+1}^{-1}, \quad v_{k+1} = Rv_k + (1 + R)\Delta'(t_k) \quad (7)$$

Функция  $\Delta_0(t)$  - синусоидальная; пользуясь условиями периодичности:  $v_k = v_k \equiv v$ ;  $t_k = kt + \varphi$  ( $\varphi$  - неизвестная фаза), получим из (7):

$$v(1 - R) = (1 + R)\varepsilon\omega \sin \varphi; \quad \frac{1}{2}v(2\pi n - \omega) - \omega(\Delta + \varepsilon) = \varepsilon\omega \cos \varphi \quad (8)$$

Исключив из уравнений (8) фазу и введя обозначения  $\beta \equiv 2\pi - \omega$ ;  $\gamma \equiv \omega(\Delta + \varepsilon)$ ;  $R_0 \equiv (1 + R)(1 - R)^{-1}$ , найдём два значения скорости:

$$v_{1,2} = \{2\beta\gamma \pm \sqrt{[\beta^2\gamma^2 - (4R_0^2 + \beta^2)(\gamma^2 - \varepsilon^2\omega^2)]}\}(4R_0^2 + \beta^2)^{-1} \quad (9)$$

Так что, как и для традиционных виброударных систем имеется два режима движения с ударами. Значения фаз  $\varphi_{1,2} \in [0, \pi]$ . Плотности импульсов  $J_{1,2}(\omega) = 2v_{1,2}$ . Величины взаимодействующих оснований трапеций находится из вида профилей стоячих волн (рис. 1, с):

$$l_{01,2} = 1 - 2(\Delta + \varepsilon + \varepsilon \cos \varphi_{1,2}).$$

Поэтому импульсы ударов

$$I_{1,2}(\omega, \varphi_{1,2}) = 2[1 - 2(\Delta + \varepsilon + \varepsilon \cos \varphi_{1,2})]v_{1,2}.$$

Характер зависимости  $I(\omega)$  показан на рис.2; кривые  $a$  и  $b$  соответствуют отсутствию диссипации ( $R = 1$ :  $\varphi = 0, \pi$ ); кривая  $c$  - значению  $\varphi = \pi/2$ .

В случае  $R < 1$  при возрастании скорости ( $\omega \rightarrow 2\pi$ ):  $\varphi_{1,2} \rightarrow \frac{1}{2}\pi$  (достигается граница условий существования и оба режима сливаются в один).

Подробный анализ найденных точных решений показывает, что данным режимам свойственны нелинейные резонансные эффекты ("затягивания" по частоте и амплитуде, "эффект срыва резонансного режима" и др.), проявляющиеся в традиционных системах с классическими ударными парами [2, 3, 8].

Данное обстоятельство отмечалось и при экспериментировании [2, 8]. Таким образом, динамика трапецевидных стоячих волн сходна с динамикой частиц, соударяющихся с жесткими стенками.

Заметим, что приведенные решения являются точными в рамках принятых предпосылок. Аналогично можно рассмотреть субгармонические режимы  $1:n$ , а также получить другие обобщения.

Для изучения вопроса устойчивости найденных решений система анализировать методом конечных разностей. Неустойчивый режим, отвечающий, как и в традиционном случае меньшему значению импульса отмечен пунктиром на рис. 2.

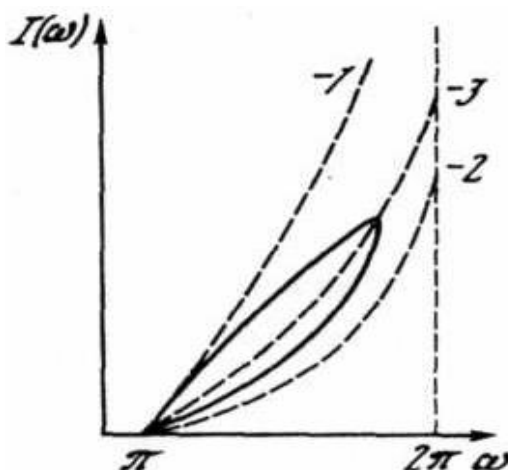


Рис.2. Зависимость импульса от частоты волны

**3. Системы со сложной структурой. Модель общего вида.** Для объектов со сложной структурой делается предположение, что в каждой точке каких-либо пространственных областей помещена ударная пара. Так что вибрационное поле описывается некоторым набором функций перемещений  $\{u_\alpha(x,t)\}$ , причём индекс  $\alpha$  может изменяться на конечном, счётном или даже континуальном множестве [5 - 7], а переменная  $x$  скаляр или вектор.

Приведем построение примера модели сильно нелинейного объекта сложной структуры. Вначале постулируем существование некоторой упруго, упруго-вязкой или какой-либо другой среды, которую будем называть несущей. Несущая среда описывается, например, динамическим уравнением Ламе (Навье-Коши) с дополнительными членами вида:

$$\rho u_{tt} = \mu \Delta u + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot u + B[u] + G\{t, u, [u_\alpha]\} - \Phi[u_\alpha]. \quad (10)$$

Здесь состояние несущей части описывается полем перемещений  $u(x,t)$ ;  $u \in \mathbf{R}^3$ ;  $x \in \mathbf{Z} \subset \mathbf{R}^3$ ;  $t \in \mathbf{R}$ . Обозначено:  $\nabla$  и  $\Delta$  - операторы Гамильтона (набла) и Лапласа;  $\rho$  - плотность несущей части среды;  $\lambda$  и  $\mu$  - её упругие параметры;  $B[\dots]$  - оператор диссипативных потерь в несущей части среде;  $[u_\alpha]$  - набор функций перемещений присоединенных частей среды;  $G\{\dots\}$  - соответствующая силовая характеристика;  $\Phi[u_\alpha]$  - воздействие присоединенных объектов, содержащих ударные элементы.

Граничные условия запишем символически в виде  $\Gamma u = X$ , где  $\Gamma$  - оператор граничных условий,  $X$  - заданный вектор.

При рассмотрении сред сложной структуры такого типа, граничные условия ставятся только для несущей части. Отметим, что здесь для простоты были и будут опущены некоторые атрибуты, связанные с чисто математическими аспектами постановки.

Пусть амортизированное оборудование упруго связано с несущей средой:

$$\Phi[u_\alpha] = c_1(x)[u(x,t) - u_1^I(x,t)] + c_2(x)[u(x,t) - u_1^{II}(x,t)]. \quad (12)$$

Данный способ моделирования предполагает, что с каждой точкой области  $Z$  через упругий элемент соединена ударная пара, определяемая контактирующими линейными подсистемами  $A^{(I)}(x)$  и  $A^{(II)}(x)$ , каждая из которых отвечает полям перемещений  $u_q^{I,II}(x,t)$ ;  $q=1, 2, \dots, N$ . В формуле (12)  $u_1^{I,II}(x,t)$  – точки присоединения подсистем; точки контакта обозначим  $u_n^{I,II}(x,t)$ ,  $n \leq N$ .

Подсистемы  $A^{(I,II)}(x)$  описываются семействами распределенных динамических податливостей:  $L_{qk}^{I,II}(x, i\omega)$ ; индексы  $q, k$  пробегает значения от 1 до  $N$ ;  $i\omega = \partial/\partial t$ .

Будем полагать, что соударения – прямые, центральные и одномерные. Пусть  $u_0 = u_n^{II} - u_n^I$  – сближение точек контакта.

Сила взаимодействия при ударе  $\Phi(u_0, u_{0t}) = \lambda\Phi(u_0) + \Phi_1(u_0, u_{0t})$ ;  $\lambda \gg 1$  – большой параметр. Здесь в правой части первый член определяет её упругую составляющую, а второй – диссипативную.

Функция  $\Phi$  гипотезу, вообще говоря, мгновенного удара. При  $\lambda \rightarrow \infty$  модель удара переходит в ньютоновскую, сила  $\Phi$  записывается через дельта-функции [7].

Для точек подвеса и взаимодействия имеем операторные уравнения:

$$u_1^{I,II} = L_{11}^{I,II}(i\omega)c_{1,2}(x)u \pm L_{n1}^{I,II}(i\omega)\Phi(u_0, u_{0t}) + h_1^{(I,II)}, \quad (13)$$

$$u_n^{I,II} = L_{nn}^{I,II}(i\omega)c_{1,2}(x)u \pm L_{nn}^{I,II}(p)\Phi(u_0, u_{0t}) + h_n^{(I,II)}. \quad (14)$$

Для системы  $A^{(I)}$  в уравнениях (3) и (4) выбирается "плюс"; а для  $A^{(II)}$  – "минус". В (13) и (14) внесены дополнительные внешние силы  $h_{n,1}^{(I,II)}$ .

Особенности взаимодействия несущей и присоединенной частей формируют структуру глобального виброполя. В то же время использование моделей такого типа приводит к потере информации об особенностях поведения отдельных элементов системы, а также об эффектах, которые проявляются только при обращении к дискретным моделям.

**4. Примеры.** На рис. 3 показаны схемы моделей типа, рассмотренных выше. На рис.3. *a* в качестве несущей части выбран продольно колеблющейся стержень, с каждой точкой которого связаны две линейные стационарные подсистемы, образующие ударный элемент [6, 7].

На рис. 3, *b* показана дискретная модель с несущей двумерной средой (струнной решеткой [7]), которая при континуализации переходит в мембрану, а при принятии дополнительных гипотез – в пластину. На этом рисунке обозначена упомянутая выше возможность рассмотрения неньютоновских ударов.

Рис. 3, *c* представляет дискретную цепочку механизмов. Расположенных на вибрирующих основаниях и, наконец на рис. 3, *d* показана весьма специфическая модель вибровода с «внутренними разрывами».

Все приведенные модели описывают механизмы генерирования широкополосных вибрационных процессов, существующих в представительных пространственных областях. Анализ таких систем выполняется при помощи специальных модификаций методов частотно-временного анализа виброударных процессов и модификаций современных численных методов. Вибрационные поля, устанавливающиеся в данных системах, зависят от проявления двух главных физических механизмов.

Амортизированные системы воздействует на несущую часть конструкций во многом аналогично динамическим ударным (или при редких сочетаниях параметров линейным) гасителям вибрационных процессов [1, 3, 5-7].

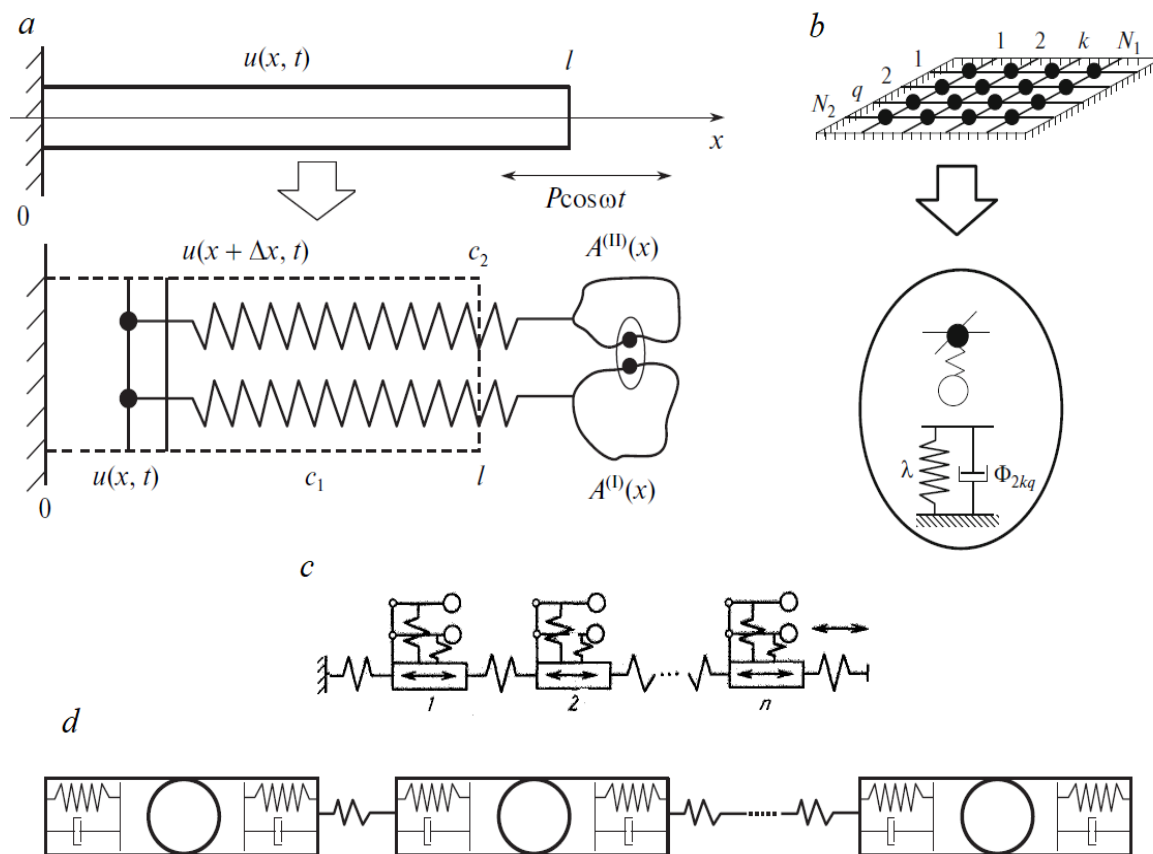


Рис.3. Динамические модели объектов со сложной структурой.

Несущая часть осуществляет фильтрацию и спектральные преобразования проходящей вибрации, а также определяет глобальные резонансные свойства. Указанные механизмы, проявляются в различных точках несущих конструкций по-разному. Это обстоятельство даёт возможность проявиться многочисленным весьма специфическим динамическим эффектам. Назовём основные.

1. Возникновение чередующихся зон прозрачности и непрозрачности для прохождения через конструкцию основного тона вибрации.
2. Проявление эффекта синхронизации интенсивных резонансных режимов с соударениями в определенных пространственных областях. При синхронизации реализуются режимы движения типа различных форм «хлопков». Резонансные режимы сохраняют основные свойства нелинейных резонансов [3, 8] (явления «затягивания» по частоте и амплитуды, эффект «жесткого запуска», явления «срыва», возникновение многозначности амплитудно-частотных характеристик и другие).
3. Возникновение сложных режимов движения: субгармонических, комбинационных, режимов с «дребезгом», хаотических, редкоударных и других.

*Автор считает необходимым отметить, что концепция «синхронных хлопков» появилась в результате длительных обсуждений систем с распределенными ударными элементами с Владимиром Константиновичем Асташевым, которому автор глубоко благодарен.*

## Список литературы

1. *Веприк А.М., Вознюк. А. Д., Крупенин В.Л., Чирков И. М.* Широкополосные виброударные генераторы механических колебаний. - Л.: Машиностроение, 1987. - 80 с.
2. *Асташев В.К., Крупенин В.Л.* Нелинейная динамика ультразвуковых технологических процессов. - М.: МГУП им. Ивана Федорова, 2016. - 372 с.
3. *Асташев В.К., Крупенин В.Л.* Волны в распределенных и дискретных виброударных системах и сильно нелинейных средах // Проблемы машиностроения и надежности машин. - 1998. - №5. - С.13-30.
4. *Крупенин В.Л.* Вибрация струны, расположенной между протяженным и точечным ограничителями// Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2017. - №2. - С.13-22.
5. *Крупенин В.Л.* Модель сильно нелинейной вибропроводящей среды с распределенным ударным элементом// ДАН. - 1995. - Т. 343, №6. - С. 759-763.
6. *Крупенин В.Л.* К описанию процессов прохождения нелинейных волн через машинные конструкции, моделируемые посредством сильно нелинейных сплошных сред сложной структуры (часть 1 и 2 )// Вестник научно-технического развития. – 2011. - № №6, 7. - С.26-33; С.3-16.
7. *Крупенин В.Л.* Об описании сильно нелинейных вибропроводящих и виброгенерирующих сред // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2016. - №4. - С.9-19.
8. *Babitsky V. I., Krupenin V. L.* Vibration of Strongly Nonlinear Discontinuous Systems. - Berlin: Springer-Verlag, 2001. - 414 p.

Дата поступления: 5 октября 2018 г.