

УДК 539.3

## ВОЗБУЖДЕНИЕ ВОЛН СОСРЕДОТОЧЕННЫМ ИСТОЧНИКОМ, ДВИЖУЩИМСЯ ВДОЛЬ ГРАНИЦЫ ГРАДИЕНТНО-УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

© Артем Михайлович Антонов, Владимир Иванович Ерофеев

*Институт проблем машиностроения РАН – филиал Федерального государственного бюджетного научного учреждения «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики Российской академии наук» (ИПМ РАН), Нижний Новгород, Россия*

[artem.antonov@autorambler.ru](mailto:artem.antonov@autorambler.ru), [erof.vi@yandex.ru](mailto:erof.vi@yandex.ru)

**Аннотация.** В рамках математической модели градиентно-упругого континуума, т.е. среды, напряженно-деформированное состояние которой описывается тензором деформаций, вторыми градиентами вектора перемещений, несимметричным тензором напряжений и тензором моментных напряжений, рассматривается задача о генерации возмущений движущимся источником. Предполагается, что источник движется с постоянной скоростью вдоль границы полупространства. Задача рассматривается в двумерной постановке, когда все процессы однородны вдоль горизонтальной поперечной координатной оси. Вектор перемещений содержит две компоненты: продольную и вертикальную поперечную. В результате аналитических исследований показано, что движущийся источник будет генерировать волны, распространяющиеся вдоль границы полупространства и экспоненциально убывающие в его глубину. Такая волна, в отличие от классической поверхностной волны Рэлея, обладает дисперсией, поскольку ее фазовая скорость не является постоянной величиной, а зависит от частоты. Амплитуды перемещений изменяются в зависимости от величины нагрузки движущегося источника и его скорости.

**Ключевые слова:** градиентно-упругое полупространство, движущийся источник, поверхностная волна.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 14-19-01637).

## EXCITATION OF THE WAVES BY A FOCUSED SOURCE, MOVING ALONG THE BORDER OF GRADIENT-ELASTIC HALF-SPACE

© A.V. Antonov, V.I. Erofeev

*Mechanical Engineering Research Institute of RAS, Nizhny Novgorod, Russia*

[artem.antonov@autorambler.ru](mailto:artem.antonov@autorambler.ru), [erof.vi@yandex.ru](mailto:erof.vi@yandex.ru)

**Abstract.** Within the mathematical model of the gradient-elastic continuum, i.e. medium, the stress-strain state of which is described by the strain tensor, the second gradients of the displacement vector, the asymmetric stress tensor and the stress tensor, the problem of generating perturbations by a moving source is considered. It is assumed that the source moves at a constant velocity along the boundary of the half-space. The problem is considered in a two-dimensional formulation, when all the processes are homogeneous along the horizontal transverse coordinate axis. The displacement vector contains two components: longitudinal and vertical transverse. As a result of analytical studies it is shown that a moving source will generate waves propagating along the

boundary of a half-space and exponentially decreasing in its depth. Such a wave, unlike the classical Rayleigh surface wave, has dispersion, since its phase velocity is not a constant, but depends on the frequency. The amplitudes of displacements vary depending on the magnitude of the load of the moving source and its speed.

**Keywords:** gradient-elastic half-space, moving source, surface wave.

**Acknowledgements.** The work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 14-19-01637).

**Введение.** В 1885 г. английский ученый лорд Рэлей теоретически показал, что вдоль плоской границы твердого упругого полупространства с вакуумом или достаточно разреженной средой (например, с воздухом) могут распространяться волны, амплитуда которых быстро спадает с глубиной [1]. Эти волны, названные впоследствии поверхностными волнами Рэля, являются основным типом волн, наблюдающимся при землетрясениях. Поэтому они подробно изучаются в сейсмологии [2].

Основные закономерности распространения рэлеевских волн следующие: отсутствие дисперсии, т.е. скорость волны не зависит от ее частоты и является постоянной для каждого материала; эта скорость достигает 0,87-0,96 от скорости объемной сдвиговой волны; вектор перемещений имеет продольную и поперечную составляющие, при этом поперечная составляющая всегда превосходит продольную.

В последние годы широкое применение нашли рэлеевские волны ультразвукового диапазона. При их помощи можно контролировать состояние поверхностного слоя образца (выявление поверхностных и около поверхностных дефектов в образцах из металла, стекла, пластмассы и других материалов - ультразвуковая поверхностная дефектоскопия). Влияние свойств поверхностного слоя образца на скорость и затухание рэлеевских волн позволяет использовать последнее для определения остаточных напряжений поверхностного слоя металла, термических и механических свойств поверхностного слоя образца [3,4].

Наряду с моделью классического континуума в механике деформируемого твердого тела широко применяются модели обобщенных континуумов [5-11].

К числу обобщенных континуумов принадлежит, в частности, градиентно-упругая среда. Появление этой модели относится к началу 20-го века и связано с именами Лёру (1911, 1913) [12,13] и Джеремилло (1929) [14].

К модели градиентно-упругой среды сводится и знаменитая модель континуума Коссера [15], когда в ней жестко зафиксирована зависимость вектора поворота от ротора перемещения (стесненное вращение) [16, 17].

Поверхностные волны Рэля в рамках градиентно-упругой модели практически не изучались. Исключение составляет работа [18], в которой, на основании проведенных исследований, утверждается, что скорость поверхностной волны в градиентно-упругой среде может превосходить скорость объемной сдвиговой волны.

В работе изучаются основные закономерности распространения волны Рэля вдоль границы градиентно-упругого полупространства, в частности, проверяется утверждение, содержащееся в [18]. Рассматривается задача о генерации поверхностной волны источником, движущимся на сверхскоростях вдоль границы градиентно-упругого полупространства, определяется зависимость амплитуды волны, конуса Маха от величины нагрузки источника и скорости его движения.

**1.Основные уравнения градиентной теории упругости.** Деформированное состояние градиентно-упругой среды описывается тензором деформаций и вторыми градиентами вектора перемещений

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right),$$

$$\chi_{klm} = - \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_l \partial x_m}, \quad (1)$$

При рассмотрении адиабатических процессов упругого деформирования необходимо постулировать зависимость внутренней энергии  $U$  от инвариантов мер деформации (1).

Разложим функцию  $U$  в окрестности естественного состояния ( $\varepsilon_{kl} = 0, \chi_{klm} = 0$ ) в ряд Тейлора, пренебрегая величинами третьего порядка. Для изотропного однородного и центрально-симметричного тела получим разложение следующего вида [17]:

$$U = \frac{\lambda}{2} \varepsilon_{kk}^2 + \mu \varepsilon_{ik}^2 + 2\mu L^2 (\chi_{klm}^2 + \tilde{\nu} \chi_{klm} \chi_{lkm}), \quad (2)$$

где  $\lambda$  и  $\mu$  – упругие постоянные Ламе,  $L^2$  – отношение модуля кривизны к модулю сдвига  $\mu$ , имеющая размерность квадрата длины,  $\tilde{\nu}$  – безразмерная константа,  $\rho$  – плотность среды.

В перемещениях векторное уравнение динамики градиентно-упругой среды имеет вид:

$$\rho \ddot{u}_i - (\lambda + \mu) \text{draddiv} \vec{u} - \mu \Delta \vec{u} + 4\mu L^2 \Delta (\Delta \vec{u} + \tilde{\nu} \text{graddiv} \vec{u}) = 0. \quad (3)$$

Легко видеть, что это уравнение содержит четвертый порядок производных по координатам, в отличие от классического уравнения Ламе, описывающего динамику деформируемого твердого тела, содержащего вторые производные по координатам.

**2. Постановка и решение общей задачи распространения волн в градиентно-упругой среде.** Рассмотрим упругое изотропное полупространство  $y \geq 0$  (ограничимся двумерным случаем, когда все процессы однородны по оси  $z$ ). Предположим, что поверхностная волна распространяется в направлении оси  $x$ .

Уравнения динамики, эквивалентные векторному уравнению (3), в двумерном случае запишутся в виде [18]:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (4)$$

Здесь  $u$  – продольная, а  $v$  – поперечная компоненты вектора перемещений.

Будем считать, что на границе  $y=0$  напряжения и моментные напряжения отсутствуют, т.е. граничные условия для системы уравнений (4) имеют вид [18]:

$$\sigma_{yy}|_{y=0} = 0, \quad \sigma_{yx}|_{y=0} = 0, \quad \sigma_{yz}|_{y=0} = 0,$$

$$\mu_y = 0, \quad (5)$$

Причем третье условие тождественно удовлетворяется в силу предположения о независимости деформаций от переменной  $z$ .

Компоненты тензора напряжений, входящие в (4), (5), связаны со смещениями  $u, v$  следующими соотношениями:

$$\sigma_{xx} = \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \sigma_{yy} = \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} &= \mu \left[ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} - L^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] \\ \sigma_{yx} &= \mu \left[ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + L^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

Легко видеть, что  $\sigma_{xy} \neq \sigma_{yx}$ .

Моментные напряжения  $\mu_x$  и  $\mu_y$  выражаются через  $u, v$  следующим образом:

$$\begin{aligned} \mu_x &= 2 \mu L^2 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \mu_y &= 2 \mu L^2 \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (7)$$

Введем скалярный  $\varphi$  и векторный  $\psi$  потенциалы так, что вектор перемещений  $u$  запишется в виде [19]:

$$u = \nabla \varphi + \nabla * \psi \quad (8)$$

Поскольку перемещение не зависит от координаты  $z$ , у векторного потенциала будет отличной от нуля только компонента по оси  $z$ , эту компоненту обозначим через  $\psi$ .

С помощью (8) система (4) приводится к уравнениям

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad (9)$$

$$\Delta(1 - L^2 \Delta) \psi - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0, \quad (10)$$

где  $c_1^2 = \frac{(\lambda+2\mu)}{\rho}$  – квадрат скорости продольной волны,  $c_2^2 = \frac{\mu}{\rho}$  – квадрат скорости поперечной волны.

Их решение будем искать в виде волн, гармонических во времени и распространяющихся в направлении оси  $x$ :

$$\varphi = A e^{\zeta y + i(\omega t - kx)} \quad (11)$$

$$\psi = B e^{\eta y + i(\omega t - kx)}$$

Амплитуды этих волн зависят от координаты  $y$ . Подставляя формулы (11) в (9), (10), получим уравнения для определения  $\zeta$  и  $\eta$ :

$$\zeta^2 + \left( \frac{\omega}{c_1} \right)^2 - k^2 = 0 \quad (12)$$

$$L^2 \eta^4 - (1 + 2L^2 k^2) \eta^2 + \left[ k^2 + L^2 k^4 - \left( \frac{\omega}{c_2} \right)^2 \right] = 0$$

Для того чтобы возмущения убывали от границы внутрь среды и соответствовали поверхностной волне, необходимо определить такие корни уравнений (12), чтобы  $\zeta$  и  $\eta$  были положительными. В результате получим:

$$\zeta = \sqrt{k^2 - \left( \frac{\omega}{c_1} \right)^2}, \quad k^2 > \left( \frac{\omega}{c_1} \right)^2 \quad (13)$$

$$\eta_{1,2} = \sqrt{\frac{(1 + 2L^2k^2) \pm \sqrt{(1 + 2L^2k^2)^2 - 4L^2 \left[ k^2 + L^2k^4 - \left(\frac{\omega}{c_2}\right)^2 \right]}}{2L^2}}$$

Тогда соотношения (11) будет иметь вид:

$$\varphi = Ae^{\zeta y + i(\omega t - kx)} \quad (14)$$

$$\psi = B_1 e^{\eta_1 y + i(\omega t - kx)} + B_2 e^{\eta_2 y + i(\omega t - kx)}$$

Перемещения  $u$  и  $v$ , напряжения  $\sigma_{yx}, \sigma_{yy}$  и моментное напряжение  $\mu_y$  можно представить через потенциалы  $\varphi$  и  $\psi$  по формулам:

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}, v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} &= \lambda \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) + 2\mu \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right) \\ \sigma_{yx} &= \mu \left( 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - L^2 \left( \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} \right) \right) \\ \mu_y &= -2 \mu L^2 \left( \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \right) \end{aligned}$$

Подставляя в (15) выражения (14) и используя граничные условия (5), получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} &= Ae^{\zeta y + i(\omega t - kx)} (\lambda \zeta^2 - \lambda k^2 + 2\mu \zeta^2) + 2B_1 \mu i k \eta_1 e^{\eta_1 y + i(\omega t - kx)} + 2B_2 \mu i k \eta_2 e^{\eta_2 y + i(\omega t - kx)} = 0, \\ \sigma_{yx} &= -2A \mu \zeta i e^{\zeta y + i(\omega t - kx)} + B_1 \mu e^{\eta_1 y + i(\omega t - kx)} (k^2 + \eta_1^2 + 2\eta_1^2 k^2 L^2 - \eta_1^4 L^2 - k^4 L^2) + \\ &B_2 \mu e^{\eta_2 y + i(\omega t - kx)} (k^2 + \eta_2^2 + 2\eta_2^2 k^2 L^2 - \eta_2^4 L^2 - k^4 L^2) = 0, \\ \mu_y &= 2B_1 L^2 \eta_1 \mu e^{\eta_1 y + i(\omega t - kx)} (k^2 - \eta_1^2) + 2B_2 L^2 \eta_2 \mu e^{\eta_2 y + i(\omega t - kx)} (k^2 - \eta_2^2) = 0, \end{aligned} \quad (16)$$

представляющую собой однородную систему алгебраических уравнений для определения  $A, B_1$  и  $B_2$ . Эта система имеет решения, отличные от нуля, если ее определитель обращается в нуль

$$\eta_2 (\lambda \zeta^2 - \lambda k^2 + 2\mu \zeta^2) (k^2 + \eta_1^2 + 2\eta_1^2 k^2 L^2 - \eta_1^4 L^2 - k^4 L^2) (k^2 - \eta_2^2) - \eta_1 (\lambda \zeta^2 - \lambda k^2 + 2\mu \zeta^2) (k^2 + \eta_2^2 + 2\eta_2^2 k^2 L^2 - \eta_2^4 L^2 - k^4 L^2) (k^2 - \eta_1^2) + 2k^2 \zeta \eta_1 \eta_2 (\eta_2^2 - \eta_1^2) = 0 \quad (17)$$

Учитывая  $\zeta = C_R^2 = \frac{\omega^2}{k^2 c_2^2}$ ,  $\alpha = L^2 k^2$ ,  $\beta = \frac{1-2\nu}{2-2\nu}$ , где  $\nu$  - коэффициент Пуассона,  $C_R$  - скорость поверхностной волны, из (17) получим дисперсионное уравнение:

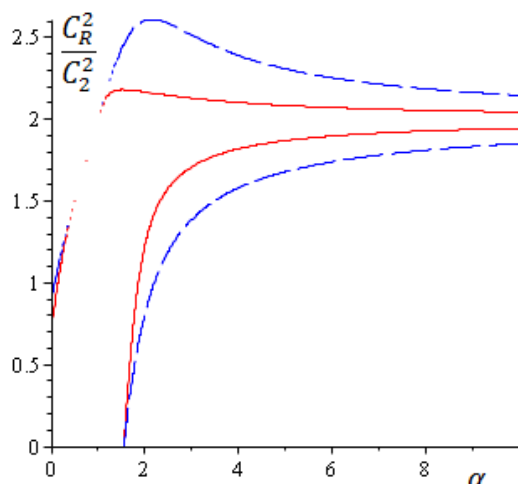
$$\begin{aligned} 16(1 - \beta \zeta)(1 + \alpha - \zeta) [1 + 2\alpha + 2\sqrt{\alpha(1 + \alpha - \zeta)}] &= (2 - \zeta)^2 [(1 - 3\alpha^2)^2 + \alpha(3 - \alpha)(1 + \alpha - \\ &\zeta) + (1 - \alpha^2)(1 + \alpha - \zeta)^2 + \alpha(1 + \alpha - \zeta)^3 + 2(1 - 3\alpha^2)(3 - \alpha)\sqrt{\alpha(1 + \alpha - \zeta)} + 2(1 - \\ &3\alpha^2)(1 - \alpha)(1 + \alpha - \zeta) - 2(1 - 3\alpha^2)(1 + \alpha - \zeta)\sqrt{\alpha(1 + \alpha - \zeta)} + 2(3 - \alpha)(1 - \alpha)(1 + \alpha - \\ &\zeta)\sqrt{\alpha(1 + \alpha - \zeta)} - 2(3 - \alpha)(1 + \alpha - \zeta)^2 \alpha - 2(1 - \alpha)(1 + \alpha - \zeta)^2 \sqrt{\alpha(1 + \alpha - \zeta)}] \end{aligned} \quad (18)$$

При  $L = 0$  или  $\alpha = 0$  из (18) получится уравнение для определения скорости поверхностной волны в классическом случае [16]

$$16(1 - \beta \zeta)(1 - \zeta) = (2 - \zeta)^2 (3 + (1 - \zeta)^2 - 2\zeta). \quad (19)$$

Заметим, что в уравнение (18) входит волновое число  $\alpha$ , поэтому поверхностная волна обладает дисперсией, в отличие от классического случая, в котором поверхностная волна Рэлея дисперсией не обладает.

На рис.1 представлены зависимости квадрата скорости поверхностной волны  $C_R$  от волнового числа  $\alpha$ . Кривые представлены в безразмерной форме: квадрат скорости поверхностной волны отнесен к квадрату скорости сдвиговой волны  $c_2^2$ . Кривые рассчитаны для двух значений коэффициента Пуассона:  $\nu=0.2$  (сплошная кривая) и  $\nu=0.5$  (пунктирная кривая). Из графика видно, что с увеличением волнового числа  $\alpha$ , квадрат скорости поверхностной волны возрастает и, что при  $\alpha \rightarrow \infty$ ,  $\zeta \rightarrow 2$  или  $C_R \rightarrow \sqrt{2}$ .



**Рис.1.** Зависимость квадрата скорости поверхностной волны от волнового числа

Получим выражение для фазовой скорости плоской сдвиговой волны  $V_\phi(\alpha)$  и сравним ее со скоростью поверхностной волны  $C_R(\alpha)$ .

Уравнение для плоской сдвиговой волны, учитывая (10), примет вид:

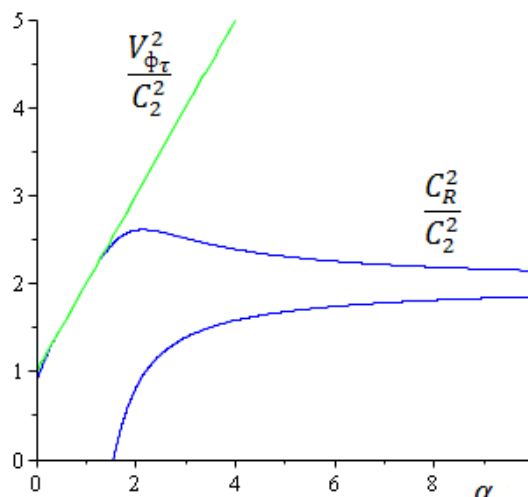
$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - L^2 \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} = \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (20)$$

его решение будем искать в виде:  $\psi = \text{Ve}^{i(\omega t - kx)}$ , отсюда

$$\begin{aligned} \omega^2 &= c_2^2 k^2 (1 + L^2 k^2), \\ v_\phi^2 &= \frac{\omega^2}{k^2} = c_2^2 (1 + L^2 k^2), \quad \frac{v_\phi^2}{c_2^2} = (1 + \alpha) \end{aligned} \quad (21)$$

Из (21) следует, что сдвиговая волна в градиентно-упругой среде обладает дисперсией, ее фазовая скорость не совпадает с  $c_2$  и превосходит ее при любом ненулевом значении волнового числа.

На рис.2 представлены две зависимости: квадрат скорости поверхностной волны  $C_R^2$  и квадрат фазовой скорости сдвиговой волны  $V_\phi^2$ . Кривые представлены в безразмерной форме: обе величины отнесены к квадрату скорости сдвиговой волны  $c_2^2$ . Скорость поверхностной волны рассчитана для значения коэффициента Пуассона  $\nu=0.5$ . Из приведенного графика можно сделать вывод, что скорость поверхностной волны не может превышать фазовую скорость сдвиговой волны, но может достигать ее при определенных значениях волнового числа  $\alpha$ .



**Рис.2.** Зависимости квадрата скорости поверхностной волны и квадрата фазовой скорости сдвиговой волны от волнового числа.

*Вычисление перемещений и напряжений.* Из (14) и (15) следует, что перемещения  $u$  и  $v$  могут быть записаны в виде:

$$u = -iAke^{\zeta y + i(\omega t - kx)} + B_1 \eta_1 e^{\eta_1 y + i(\omega t - kx)} + B_2 \eta_2 e^{\eta_2 y + i(\omega t - kx)} = (-iAke^{\zeta y} + B_1 \eta_1 e^{\eta_1 y} + B_2 \eta_2 e^{\eta_2 y}) e^{i(\omega t - kx)} \quad (22)$$

$$v = A\zeta e^{\zeta y + i(\omega t - kx)} + iB_1 k e^{\eta_1 y + i(\omega t - kx)} + iB_2 k e^{\eta_2 y + i(\omega t - kx)}$$

$$= (A\zeta e^{\zeta y} + iB_1 k e^{\eta_1 y} + iB_2 k e^{\eta_2 y}) e^{i(\omega t - kx)}$$

Система уравнений (16) позволяет выразить постоянные  $B_1$  и  $A$  через  $B_2$ :

$$B_1 = -B_2 \frac{\eta_2}{\eta_1} \left( \frac{k^2 - \eta_2^2}{k^2 - \eta_1^2} \right) \quad (23)$$

$$A = \frac{2iB_2 \eta_2 k \mu}{(\lambda \zeta^2 - \lambda k^2 + 2\mu \zeta^2)} \left( \frac{k^2 - \eta_2^2}{k^2 - \eta_1^2} - 1 \right)$$

Соотношения (23), после взятия вещественных частей (22), позволяют записать перемещения в виде:

$$u = B_2 \eta_2 \left[ \frac{2k^2 \mu}{(\lambda \zeta^2 - \lambda k^2 + 2\mu \zeta^2)} \left( \frac{f^2 - \eta_2^2}{f^2 - \eta_1^2} - 1 \right) e^{-\zeta y} - \frac{f^2 - \eta_2^2}{f^2 - \eta_1^2} e^{-\eta_1 y} + e^{-\eta_2 y} \right] \cos(kx - \omega t) \quad (24)$$

$$v = -B_2 \left[ \frac{2k^2 \mu \eta_2 \zeta}{(\lambda \zeta^2 - \lambda k^2 + 2\mu \zeta^2)} \left( \frac{f^2 - \eta_2^2}{f^2 - \eta_1^2} - 1 \right) e^{-\zeta y} - k \frac{\eta_2}{\eta_1} \left( \frac{f^2 - \eta_2^2}{f^2 - \eta_1^2} \right) e^{-\eta_1 y} + k e^{-\eta_2 y} \right] \sin(kx - \omega t)$$

На рис.3 представлены зависимости амплитуд перемещений  $u$  и  $v$  в поверхностной волне от глубины. Кривые представлены в безразмерной форме: амплитуды смещений отнесены к амплитуде нормального смещения на поверхности  $v|_{y=0}$ . Глубина отложена в долях длины волны. Из графика видно, что смещение, нормальное к поверхности, сначала возрастает, достигая своего максимума приблизительно при  $y=0.1\lambda$ , а затем монотонно убывает с глубиной, тогда как смещение, параллельное поверхности, меняет знак на глубине примерно  $y=0.15\lambda$ .



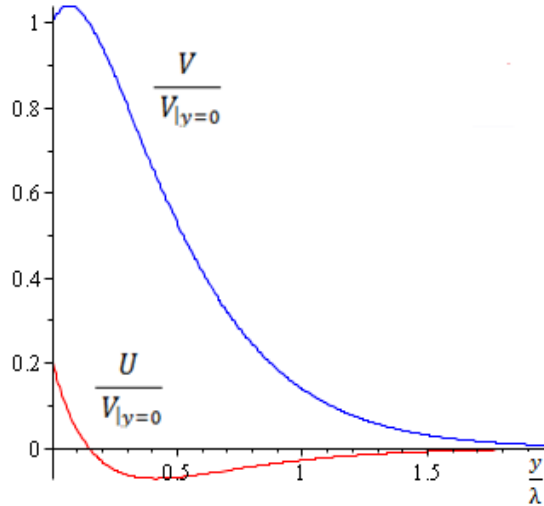


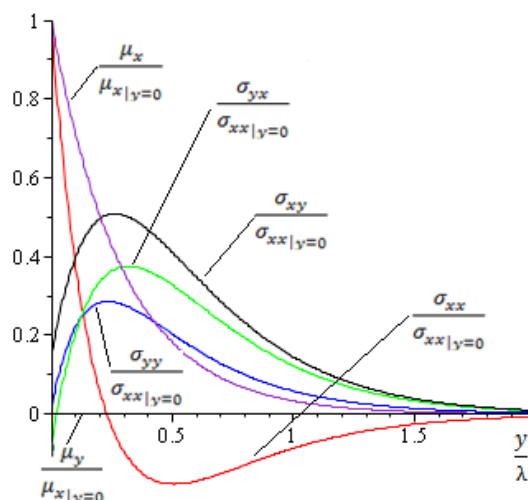
Рис.3. Зависимости амплитуд перемещений в поверхностной волне от глубины.

Напряжения можно представить через потенциалы  $\varphi$  и  $\psi$ , и аналогично вычислению перемещений, выразив постоянные  $B_1$  и  $A$  через  $B_2$ , после взятия вещественных частей, получим:

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} &= B_2 \left[ -2\eta_2 f \mu \left( \frac{f^2 - \eta_2^2}{f^2 - \eta_1^2} - 1 \right) e^{-\zeta y} + 2\eta_2 f \mu \left( \frac{f^2 - \eta_2^2}{f^2 - \eta_1^2} \right) e^{-\eta_1 y} - 2\eta_2 f \mu e^{-\eta_2 y} \right] \sin(kx - \omega t) \\ \sigma_{xx} &= B_2 \left[ 2\eta_2 f \mu \frac{(\lambda \zeta^2 - \lambda k^2 + 2\mu \zeta^2)}{(\lambda \zeta^2 - \lambda k^2 + 2\mu \zeta^2)} \left( \frac{f^2 - \eta_2^2}{f^2 - \eta_1^2} - 1 \right) e^{-\zeta y} + 2\eta_2 f \mu \left( \frac{f^2 - \eta_2^2}{f^2 - \eta_1^2} \right) e^{-\eta_1 y} - 2\eta_2 f \mu e^{-\eta_2 y} \right] \cos(kx - \omega t) \\ \sigma_{yx} &= B_2 \left[ \frac{4\eta_2 f^2 \mu^2}{(\lambda \zeta^2 - \lambda k^2 + 2\mu \zeta^2)} \left( \frac{f^2 - \eta_2^2}{f^2 - \eta_1^2} - 1 \right) e^{-\zeta y} - \mu \frac{\eta_2}{\eta_1} \left( \frac{f^2 - \eta_2^2}{f^2 - \eta_1^2} \right) (k^2 + \eta_1^2 + 2\eta_1^2 k^2 L^2 - \eta_1^4 L^2 - k^4 L^2) e^{-\eta_1 y} + \mu (k^2 + \eta_2^2 + 2\eta_2^2 k^2 L^2 - \eta_2^4 L^2 - k^4 L^2) e^{-\eta_2 y} \right] \cos(kx - \omega t) \\ \sigma_{xy} &= B_2 \left[ \frac{4\eta_2 f^2 \mu^2}{(\lambda \zeta^2 - \lambda k^2 + 2\mu \zeta^2)} \left( \frac{f^2 - \eta_2^2}{f^2 - \eta_1^2} - 1 \right) e^{-\zeta y} - \mu \frac{\eta_2}{\eta_1} \left( \frac{f^2 - \eta_2^2}{f^2 - \eta_1^2} \right) (k^2 + \eta_1^2 - 2\eta_1^2 k^2 L^2 + \eta_1^4 L^2 + k^4 L^2) e^{-\eta_1 y} + \mu (k^2 + \eta_2^2 - 2\eta_2^2 k^2 L^2 + \eta_2^4 L^2 + k^4 L^2) e^{-\eta_2 y} \right] \cos(kx - \omega t) \\ \mu_y &= 2B_2 L^2 \mu \eta_2 (f^2 - \eta_2^2) (e^{-\eta_2 y} - e^{-\eta_1 y}) \cos(kx - \omega t) \\ \mu_x &= 2B_2 L^2 \mu f (f^2 - \eta_2^2) \left( \frac{\eta_2}{\eta_1} e^{-\eta_2 y} + e^{-\eta_1 y} \right) \sin(kx - \omega t) \end{aligned} \quad (25)$$

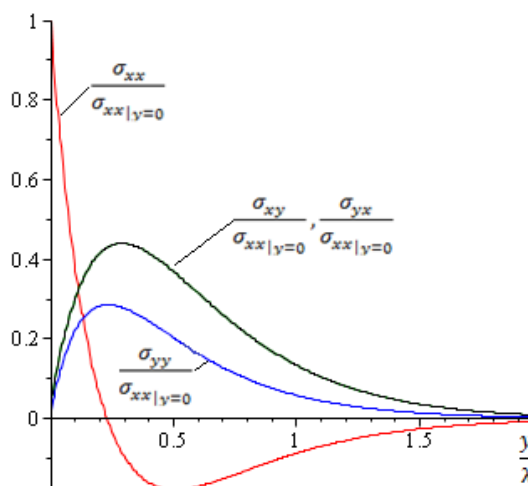
На рис.4 представлены зависимости амплитуд напряжений  $\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{yx}, \sigma_{yy}$  и моментных напряжений  $\mu_x, \mu_y$  в поверхностной волне от глубины. Кривые представлены в безразмерной форме: амплитуды напряжений и моментных напряжений отнесены к амплитуде нормального напряжения на поверхности  $\sigma_{xx}|_{y=0}, \mu_x|_{y=0}$ , соответственно. Глубина отложена в долях длины волны. Из графиков видно, что  $\sigma_{xx}$  меняет знак, тогда как  $\sigma_{yy}$  и  $\sigma_{yx}$  достигают максимума приблизительно при  $y=0.2 \lambda$  и затем экспоненциально убывают с глубиной. Так же из рис.4 видно, что тензор напряжений является несимметричным ( $\sigma_{yx} \neq \sigma_{xy}$ ).





**Рис.4.** Зависимости амплитуд напряжений в поверхностной волне от глубины.

На рис.5 представлены зависимости амплитуд напряжений  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{xy}$ ,  $\sigma_{yx}$ ,  $\sigma_{yy}$  в поверхностной волне от глубины в классическом случае (при  $L = 0$ ). Кривые представлены в безразмерной форме. Из графиков видно, что тензор напряжений стал симметричным, так как совпали амплитуды напряжений  $\sigma_{xy}$ ,  $\sigma_{yx}$  и достигают максимума приблизительно при  $y = 0.2 \lambda$ .



**Рис.5.** Зависимости амплитуд напряжений в поверхностной волне от глубины в классическом случае (при  $L = 0$ ).

Приведенная на рис.3-5 совокупность кривых иллюстрирует, что поверхностная волна локализована в тонком поверхностном слое.

На основании вышеизложенных рассуждений можно сделать вывод, что скорость поверхностной волны, распространяющейся вдоль свободной границы градиентно-упругого полупространства, может превосходить скорость объемной сдвиговой волны, вычисляемую как радикал отношения модуля сдвига к плотности материала. Однако в рассматриваемой среде сдвиговая волна также обладает дисперсией и значение указанной скорости является лишь нижним пределом ее фазовой скорости. Таким образом, в градиентно-упругой среде фазовая скорость поверхностной волны не может превосходить фазовую скорость объемной сдвиговой волны, но, при определенных значениях волнового числа, может достигать ее.

**3. Постановка и решение задачи градиентно-упругой среды с движущимся источником, генерирующим поверхностные волны.** Наряду с вышеизложенной задачей, возникает интерес к вопросу о генерации поверхностных волн источником, движущимся вдоль границы градиентно-упругого полупространства с постоянной скоростью  $D$  превосходящей скорости сдвиговой  $c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$  и продольной  $c_1 = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$  волн.

Уравнения динамики, эквивалентные векторному уравнению, в двумерном случае запишутся в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{x'x'}}{\partial x'} + \frac{\partial \tau_{y'x'}}{\partial y'} &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \tau_{x'y'}}{\partial x'} + \frac{\partial \sigma_{y'y'}}{\partial y'} &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (26)$$

Компоненты тензора напряжений и моментные напряжения  $\mu_{x'}$  и  $\mu_{y'}$ , выражаются через перемещения  $u, v$  следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \sigma_{x'x'} &= \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x'} + \frac{\partial v}{\partial y'} \right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x'} ; & \sigma_{y'y'} &= \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x'} + \frac{\partial v}{\partial y'} \right) + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y'} ; \\ \sigma_{x'y'} &= \mu \left[ \frac{\partial v}{\partial x'} + \frac{\partial u}{\partial y'} - l^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} \right) \left( \frac{\partial v}{\partial x'} - \frac{\partial u}{\partial y'} \right) \right]; \\ \sigma_{y'x'} &= \mu \left[ \frac{\partial v}{\partial x'} + \frac{\partial u}{\partial y'} + l^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} \right) \left( \frac{\partial v}{\partial x'} - \frac{\partial u}{\partial y'} \right) \right]; \\ \mu_{x'} &= 2 \mu l^2 \frac{\partial}{\partial x'} \left( \frac{\partial v}{\partial x'} - \frac{\partial u}{\partial y'} \right); & \mu_{y'} &= 2 \mu l^2 \frac{\partial}{\partial y'} \left( \frac{\partial v}{\partial x'} - \frac{\partial u}{\partial y'} \right). \end{aligned} \quad (27)$$

Принципиальное отличие в постановке задачи будет наблюдаться в процессе задания граничных условий для решения уравнения динамики. В рассматриваемой задаче граничные условия будут иметь следующий вид:

$$\sigma_{y'y'} = -P\delta(x), \quad \sigma_{y'x'} = 0, \quad \mu_{y'} = 0. \quad (28)$$

Прежде чем переходить к решению задачи с движущимся источником на сверхзвуковых скоростях ( $c_1 > c_2 > D$ ), рассмотрим случай движения источника возмущений со скоростью, меньшей скоростей продольной и сдвиговой волн – дозвуковой случай.

Для этого введем подвижную систему координат  $(x, y)$ , в которой покоится источник возмущений и которая связана с неподвижной системой координат известным преобразованием Галилея:

$$x = x' - Dt, \quad y = y'. \quad (29)$$

Соотношения (27), (29) позволяют записать уравнения динамики (4) в перемещениях:

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu - \rho D^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \mu \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + l^2 \Delta \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right] &= 0 \\ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \mu \left[ \left( 1 - \frac{\rho D^2}{\mu} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - l^2 \Delta \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) \right] &= 0 \end{aligned} \quad (30)$$

Решение уравнений (28) будем искать в виде:

$$u = Ae^{kxy} \sin(kx), \quad v = Be^{kxy} \cos(kx). \quad (31)$$

Подставка (31) в (30) приводит к системе алгебраических уравнений относительно  $A$  и  $B$

$$[-\mu l^2 k^2 q^4 + \mu q^2(1 + l^2 k^2) - (\lambda + 2\mu - \rho D^2)] + [\mu l^2 k^2 q^3 + q(\lambda + \mu - \mu l^2 k^2)]B = 0 \quad (32)$$

$$[-\mu l^2 k^2 q^3 - q(\lambda + \mu - \mu l^2 k^2)]A + [(\lambda + 2\mu - \rho D^2)q^2 - (\mu + \mu l^2 k^2 - \rho D^2)]B = 0,$$

имеющей решения, отличные от нуля, при выполнении равенства:

$$(l^2 k^2 - \gamma + \beta_1^2)l^2 k^2 q^6 + (l^2 k^2(1 + l^2 k^2 - \beta_1^2) + \gamma(1 + l^2 k^2)(1 - \gamma\beta_1^2) + 2l^2 k^2(\gamma - l^2 k^2))q^4 + ((1 + l^2 k^2)(1 + l^2 k^2 - \beta_1^2) - (\gamma - \beta_1^2)^2 + (\gamma - l^2 k^2)^2)q^2 + (\gamma - \beta_1^2)(1 + l^2 k^2 - \beta_1^2) = 0. \quad (33)$$

Здесь  $\beta_1^2 = \frac{\rho D^2}{\mu}$  – отношение квадрата скорости движения источника к квадрату скорости сдвиговой волны;  $\gamma = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu}$  – отношение квадрата скорости продольной волны к квадрату скорости сдвиговой волны.

Корни уравнения (33)  $q_1, q_2, q_3$  следует искать при условии  $\text{Re} q_i > 0$ . Продольное и поперечное перемещения будут выражаться в виде сумм:

$$u = \sum_{i=1}^3 \int_0^\infty A_i e^{kq_i y} \sin kx dk, \quad v = \sum_{i=1}^3 \int_0^\infty \alpha_i A_i e^{kq_i y} \cos kx dk \quad (34)$$

Здесь

$$\alpha_i = \frac{\mu l^2 k^2 q_i^4 - \mu q_i^2(1 + l^2 k^2) + (\lambda + 2\mu - \rho D^2)}{\mu l^2 k^2 q_i^3 + (\lambda + \mu - \mu l^2 k^2)q_i}, \quad B_i = \alpha_i A_i \quad (35)$$

Подставим (34) в граничные условия (28), получим систему из трех уравнений для определения  $A_1, A_2, A_3$ .

$$\sum_{i=1}^3 [\lambda + \alpha_i q_i (\lambda + 2\mu)] A_i = -\frac{P}{\pi k}$$

$$\sum_{i=1}^3 [-\alpha_i (1 - l^2 k^2) + q_i (1 - l k^2 \alpha_i q_i) + l k^2 q_i (1 - q_i^2)] A_i = 0 \quad (36)$$

$$\sum_{i=1}^3 q_i (\alpha + q_i) A_i = 0$$

Известно, что влияние моментных напряжений особенно сказывается при коротких волнах [17]. Поэтому введем безразмерный малый параметр  $\varepsilon = 1/lk$ .

С точностью до величин порядка  $\varepsilon^2$  из (33) получим:

$$q_1 = a_{01}\varepsilon, \quad q_2 = \frac{(a_{02} + a_{12}\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad q_3 = \frac{(a_{02} - a_{12}\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad (37)$$

где

$$a_{01} = -\frac{\gamma\sqrt{1-\beta_0^2}}{\sqrt{2}}, \quad a_{02} = -\frac{1+i}{4\sqrt{128}}, \quad a_{12} = \frac{i(1+i)(3-\beta_0^2)\sqrt{2}}{2^4\sqrt{8}}, \quad \beta_0^2 = \frac{\rho D^2}{\lambda + 2\mu} \quad (38)$$

Из (37), (35) и (36) получим следующие соотношения:

$$\alpha_1 = \alpha_{01} + \alpha_{11}\varepsilon, \quad \alpha_2 = q_2, \quad \alpha_3 = q_3, \quad A_1 = -\frac{P}{\pi\lambda k}, \quad A_2 = A_3 = 0$$

$$\alpha_{01} = \frac{(1+\beta_0^2)\gamma^2 - 2\beta_1^2}{\gamma\sqrt{1-\beta_0^2}}, \quad \alpha_{11} = \gamma\sqrt{1-\beta_0^2} \left[ \frac{(1+\beta_0^2)\gamma^2}{2} - \beta_1^2 \right], \quad (39)$$

позволяющие записать перемещения (34) в виде:

$$u = -\frac{P}{\pi\lambda} e^{-\beta_2 y} \int_{k_0}^{\infty} \frac{\sin kx}{k} dk \quad (40)$$

$$v = -\frac{P\alpha_{01}}{\pi\lambda} e^{-\beta_2 y} \int_{k_0}^{\infty} \frac{\cos kx}{k} dk - \frac{P\alpha_{11}k_0}{\pi\lambda} e^{-\beta_2 y} \int_{k_0}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2} dk \quad (41)$$

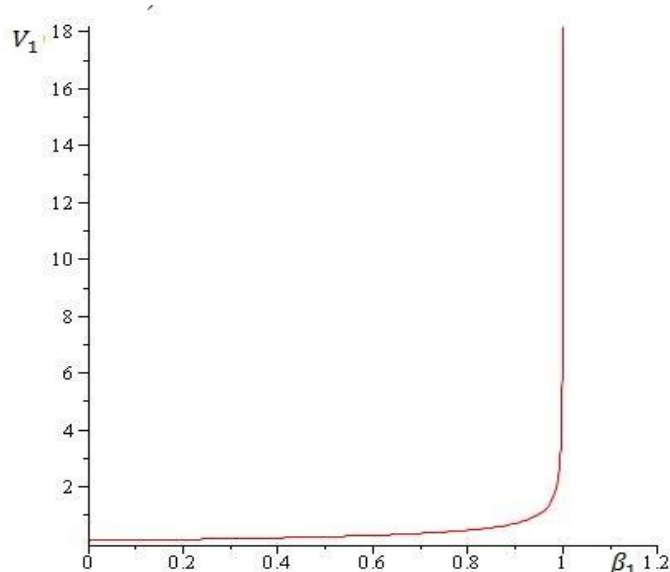
где  $k_0 = 1/l$ ,  $\beta_2 = a_{01}k_0$

Из выражений (40) видно, что амплитуды перемещений будут меняться в зависимости от величины нагрузки движущегося источника  $P$  и его скорости  $D$ .

На рис.6 представлена зависимость нормированной амплитуды поперечного перемещения

$$V_1 = -\frac{v\pi\lambda e^{\beta_2 y}}{P} = \alpha_{01} \int_{k_0}^{\infty} \frac{\cos kx}{k} dk + \alpha_{11}k_0 \int_{k_0}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2} dk \quad (42)$$

от квадрата безразмерной скорости движущегося источника возмущений. Из графического изображения видно, что при приближении скорости движущегося источника к скорости сдвиговой волны,  $V_1$  неограниченно возрастает.



**Рис.6.** Зависимость амплитуды поперечного перемещения от скорости движущегося источника.

На рис.7 представлены зависимости продольного  $U$  и поперечного  $V$  перемещений от глубины. Кривые даны в безразмерной форме: амплитуды смещений отнесены к амплитуде нормального смещения на поверхности  $V_{y=0}$ . Глубина отложена в долях длины волны. Из графического изображения видно, что компоненты смещения экспоненциально убывают с глубиной, причем поперечная составляющая вектора перемещений всегда превосходит продольную, а вращение частиц при распространении поверхностной волны в направлении оси  $x$  происходит по эллиптической траектории.

На основании проведенных исследований можно сделать вывод о том, что источник, движущийся с постоянной дозвуковой скоростью вдоль границы градиентно-упругого полупространства, будет генерировать поверхностные упругие волны. Такие волны, в отличие от классических поверхностных волн Рэлея, обладают дисперсией. Амплитуды перемещений изменяются в зависимости от величины нагрузки движущегося источника, а также его скорости, и неограниченно возрастают при приближении скорости источника к скорости сдвиговой волны.

Далее перейдем к рассмотрению случая, когда скорость движения источника возмущений  $D$  превосходит скорости сдвиговой продольной волн – сверхзвуковой случай.

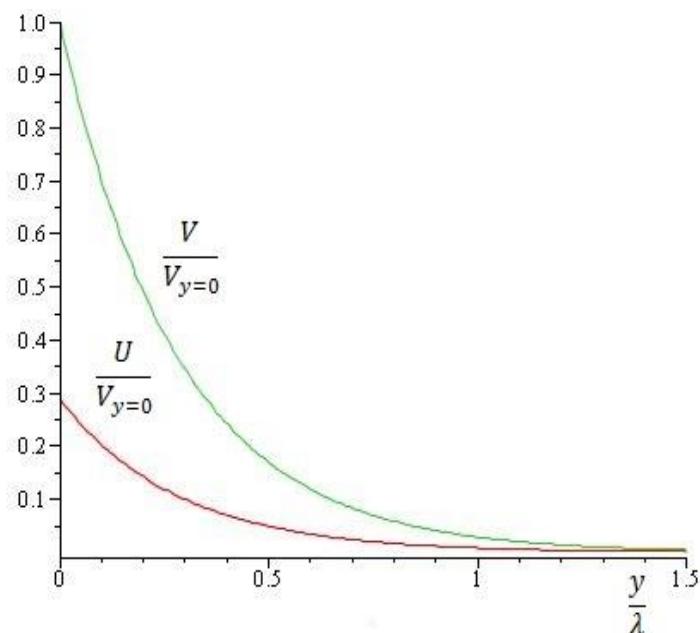


Рис. 7. Зависимости амплитуд перемещений в поверхностной волне от глубины.

Для этого введем потенциалы ( $\varphi, \psi$ ), удовлетворяющие соотношениям:

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x'} - \frac{\partial \psi}{\partial y'}, v = \frac{\partial \varphi}{\partial y'} + \frac{\partial \psi}{\partial x'}, \quad (43)$$

и преобразующие систему уравнений (26) с учетом (27) в систему уравнений

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \varphi = 0 \quad (44)$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} - l^2 \left( \frac{\partial^4}{\partial x'^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x'^2 \partial y'^2} + \frac{\partial^4}{\partial y'^4} \right) - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \psi = 0 \quad (45)$$

Аналогично дозвуковому случаю введем подвижную систему координат ( $x, y$ ), в которой покоится источник возмущений и которая связана с неподвижной системой координат преобразованием Галилея:

$$x = x' - Dt, \quad y = y'. \quad (47)$$

В итоге краевая задача (26), (28) запишется в виде:

$$\left( \lambda_1^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \varphi = 0 \quad (48)$$

$$\left( \lambda_2^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} + l^2 \left( \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right) \right) \psi = 0 \quad (49)$$

$$\left( (\eta_2^2 - 2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right)_{y=0} = -\frac{P}{\mu} \delta(x) \quad (50)$$

$$\left( 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \eta_2^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right)_{y=0} = 0$$

$$\left( \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \right)_{y=0} = 0$$

где  $\eta_\alpha = \frac{D}{c_\alpha}$ ,  $\lambda_1^2 = \sqrt{(\eta_\alpha^2 - 1)}$ ,  $\alpha = 1, 2$ .

Заметим, что третьем уравнении системы (50) присутствует только потенциал сдвиговых волн. Проинтегрируем это выражение по  $dy$ :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \text{const} = 0 \quad (51)$$

Считая постоянную интегрирования равной нулю, выражение (51) подставим во второе уравнение системы (50). Получим следующую систему уравнений:

$$\left( (\eta_2^2 - 2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right)_{y=0} = -\frac{P}{\mu} \delta(x), \quad (52)$$

$$\left( 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + (\eta_2^2 + 2) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right)_{y=0} = 0.$$

Решением дифференциальных уравнений (26), (28) будут интегралы

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A e^{-ia(x-\lambda_1 y)} da, \quad (53)$$

$$\psi(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} B e^{-ia(x-\lambda_2 y)} da,$$

найденные путем применения интегрального преобразования Фурье. Легко проверить, что эти функции удовлетворяют условиям излучения на бесконечности. Применяя преобразования Фурье к граничным условиям (52) и учитывая, что преобразование Фурье для функции  $\delta(x)$  имеет вид:

$$F[\delta(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) B e^{-iax} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

получим следующую систему уравнений:

$$-a(\eta_2^2 - 2)A + 2a^2\lambda_2 B = -\frac{P}{\mu\sqrt{2\pi}} \quad (54)$$

$$2a^2\lambda_1 A - a^2(\eta_2^2 + 2)B = 0$$

Определим значения A и B. Для этого из второго уравнения системы (54) выразим B через A:

$$B = \frac{2\lambda_1}{(\eta_2^2 + 2)} A,$$

откуда находим

$$A = \frac{(\eta_2^2 - 2)P}{\mu a^2 \sqrt{2\pi} [(\eta_2^2 + 2)(\eta_2^2 - 2) + 4\lambda_1 \lambda_2]}, \quad (55)$$

$$B = \frac{2\lambda_1 P}{\mu a^2 \sqrt{2\pi} [(\eta_2^2 + 2)(\eta_2^2 - 2) + 4\lambda_1 \lambda_2]}.$$

Введем следующие переменные:  $\gamma_1 = \eta_2^2 + 2$ ,  $\gamma_2 = \eta_2^2 - 2$

$\Delta = \gamma_1 \gamma_2 + 4\lambda_1 \lambda_2$ , тогда выражения (55) примут следующий вид:

$$A = \frac{\gamma_2 P}{\mu a^2 \sqrt{2\pi} \Delta}, \quad (56)$$

$$B = \frac{2\lambda_1 P}{\mu a^2 \sqrt{2\pi} \Delta}.$$

Вычисление перемещений и напряжений. В соответствии с (53):

$$u = -\frac{iP}{2\pi\mu\Delta} \int_{-\infty}^{\infty} (\gamma_2 e^{i\lambda_1 ay} + 2\lambda_1 \lambda_2 e^{i\lambda_2 ay}) \frac{e^{-iax}}{a} da \quad (57)$$

$$v = \frac{iP}{2\pi\mu\Delta} \int_{-\infty}^{\infty} (\gamma_2 \lambda_1 e^{i\lambda_1 ay} - 2\lambda_1 e^{i\lambda_2 ay}) \frac{e^{-iax}}{a} da$$

Так как перемещения являются действительными функциями, то из (57) следует, что

$$u = -\frac{P}{2\pi\mu\Delta} \left[ \gamma_2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin a(x-\lambda_1 y)}{a} da - 2\lambda_1 \lambda_2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin a(x-\lambda_2 y)}{a} da \right] \quad (58)$$

$$v = \frac{P}{2\pi\mu\Delta} \left[ \gamma_2 \lambda_1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin a(x-\lambda_1 y)}{a} da - 2\lambda_1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin a(x-\lambda_2 y)}{a} da \right]$$

Определим ступенчатую функцию равной нулю для отрицательных значениях  $z$  и единице для положительных. Чтобы область определения функции содержала все точки действительной оси, в нуле функцию определим числом  $\frac{1}{2}$ . Рассматриваемая функция, как известно, носит название функции Хевисайда:

$$H(z) = \begin{cases} 0 & \text{при } z < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{при } z = 0 \\ 1 & \text{при } z > 0 \end{cases} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin az}{a} da \quad (59)$$

Из (58) и (59) получаем выражение для перемещений:

$$u = -\frac{P}{\mu\Delta} [\gamma H(x - \lambda_1 y) - 2\lambda_1 \lambda_2 H(x - \lambda_2 y)] + \text{const} \quad (60)$$

$$v = -\frac{P}{\mu\Delta} [\gamma \lambda_1 H(x - \lambda_1 y) + 2\lambda_1 H(x - \lambda_2 y)] + \text{const}'$$

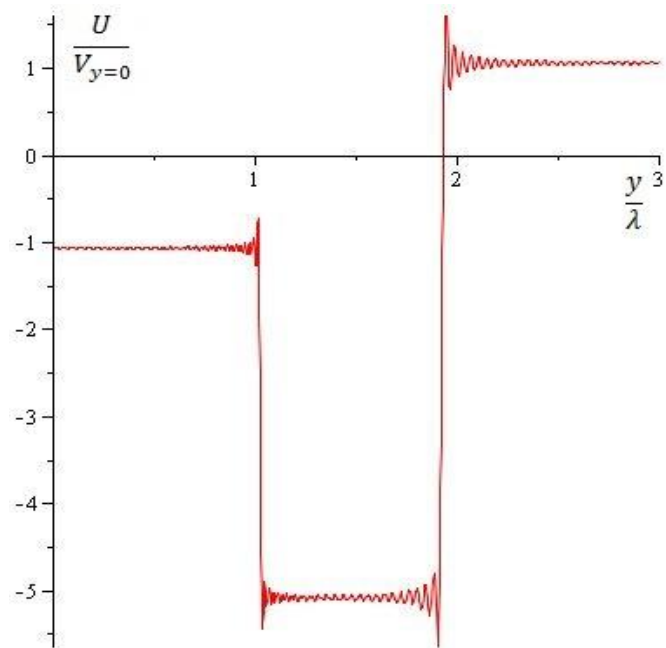
Здесь  $\text{const}$  – постоянная величина, не влияющая на распределение напряжений.

На рис.8 представлены зависимости амплитуд смещения  $U$  (а) и  $V$  (б) в рэлеевской волне от глубины. Кривые даны в безразмерной форме: амплитуды смещений отнесены к амплитуде нормального смещения на поверхности  $V_{y=0}$ . Глубина отложена в долях длины волны. Видно, что при убывании продольной компоненты, поперечная начинает возрастать. В процессе отдаления от поверхностного слоя, наблюдается увеличение амплитуды смещения частиц в волне и только на глубине  $2L-3L$  происходит затухание возмущений.

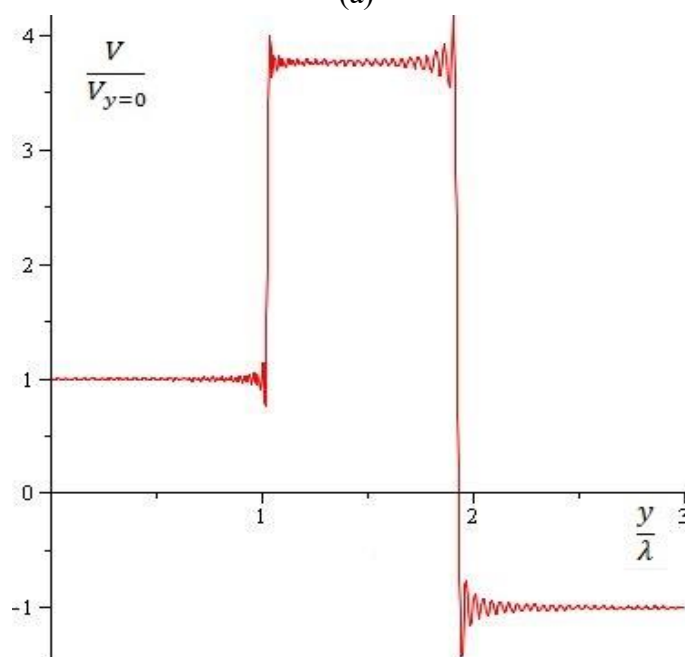
Аналогичным путем определим напряжения:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= -\frac{P}{\Delta} \left[ \gamma \left( 2 + \frac{\lambda}{\mu} \eta_1^2 \right) \delta(x - \lambda_1 y) - 4\lambda_1 \lambda_2 \delta(x - \lambda_2 y) \right] \\ \sigma_{yy} &= -\frac{P}{\Delta} \left[ \gamma \left( 2\lambda_1^2 + \frac{\lambda}{\mu} \eta_1^2 \right) \delta(x - \lambda_1 y) + 4\lambda_1 \lambda_2 \delta(x - \lambda_2 y) \right] \\ \sigma_{yx} &= -\frac{2P}{\Delta} \lambda_1 \gamma [\delta(x - \lambda_1 y) - \delta(x - \lambda_2 y)] \\ \sigma_{xy} &= -\frac{2P}{\Delta} \lambda_1 \gamma [\delta(x - \lambda_1 y) + 2\delta(x - \lambda_2 y)] \\ \mu_x &= -\frac{2aL^2 P}{\Delta} (\lambda_1 + \lambda_1 \lambda_2^2) \delta(x - \lambda_2 y) \\ \mu_y &= -\frac{2aL^2 P}{\Delta} (\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2^3) \delta(x - \lambda_2 y) \end{aligned} \quad (61)$$





(a)



(б)

**Рис. 8.** Зависимости амплитуд перемещений в поверхностной волне от глубины.

Здесь  $\frac{dH(z)}{dz} = \delta(z)$ , где  $\delta(z)$ - функция Дирака. Из (60) и (61) видно, что возмущение, вызванное нормальной нагрузкой, характеризуется двумя волнами Маха:

$$x - \lambda_1 y = 0, x - \lambda_2 y = 0$$

где  $\lambda_\alpha^2 = \sqrt{(\eta_\alpha^2 - 1)}$ ,  $\eta_\alpha = \frac{D}{c_\alpha}$ ,  $\alpha = 1,2$

При движении нормальной нагрузки со сверхзвуковыми скоростями, вслед за источником возмущений образуется коническая поверхность (конус Маха – рис.9), ограничивающая область, в которой сосредоточены возмущения от невозмущенной области упругого

полупространства. Поверхность конуса Маха является огибающей системы волн, порожденных нормальной нагрузкой.

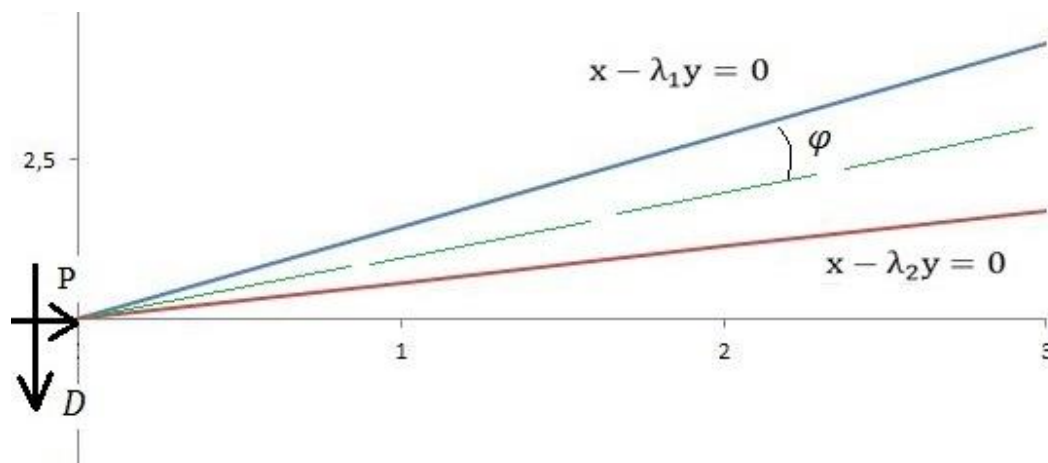


Рис. 9. Конус Маха

Угол  $\varphi$  (угол Маха) - между образующими конуса и его осью определяется как

$$\sin \varphi = \frac{c_\alpha}{D} = \frac{1}{\eta_\alpha}, \alpha = 1, 2 \quad \text{где } \eta_\alpha \text{ — числа Маха}$$

При увеличении скорости движения нормальной нагрузки угол Маха уменьшается, а область сосредоточения возмущений сдвигается к линии приложения нагрузки (рис.10).

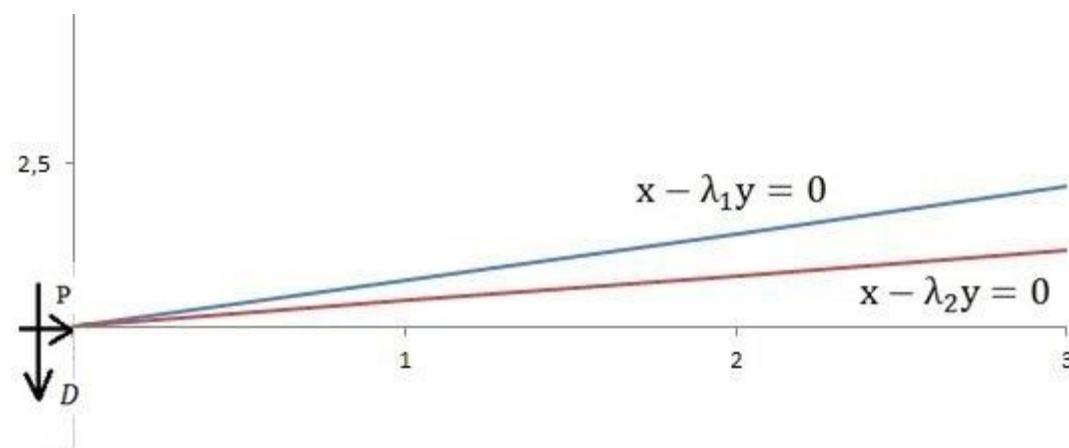


Рис. 10. Поведение конуса Маха при увеличении скорости движения нагрузки

На рис.11 представлена зависимость угла Маха от скорости движения нормальной нагрузки. Из графического изображения видно, что при увеличении скорости источника возмущений, угол между образующими конуса и его осью уменьшается.

В результате проведенного исследования можно сделать вывод о том, что движущийся вдоль границы градиентно-упругого полупространства источник с постоянной скоростью, большей по своей величине скорости сдвиговой упругой волны, будет генерировать поверхностные упругие волны. Причем поперечная составляющая вектора перемещения превосходит продольную только в околоповерхностном слое полупространства, что является отличительной особенностью распространения волн от движущегося источника на больших скоростях.

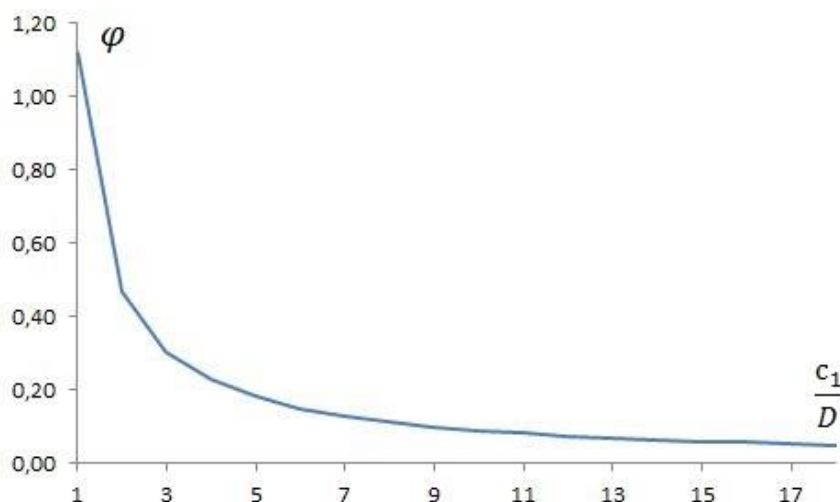


Рис. 11. Зависимость угла Маха от скорости движения нормальной нагрузки

Так же необходимо отметить, что при увеличении глубины ( $2\lambda-3\lambda$ ) распространения волн, происходит затухание возмущений и волновой процесс стабилизируется.

При движении источника возмущений на сверхзвуковых скоростях образуется конус Маха, содержащий в себе область распространения упругих волн. Причем область сосредоточения возмущений напрямую зависит от скорости движения источника возмущений.

В заключение заметим, что при возбуждении свободного края двумерных и трехмерных упругих тел, а также при кромочном контакте различных материалов, наряду с волнами Рэлея, возможно существование изгибных волн рэлеевского типа (волны Коненкова) [19-25]. Для элементов конструкций, материалы которых подчиняются законам градиентной теории упругости, такие волны ждут своих исследователей.

### Список литературы

1. Lord Rayleigh. On Waves Propagated along the Plane Surface of an Elastic Solid // Proceedings of the London Mathematical Society. - 1885. - s1-17(1). – P. 4-11.
2. Аки К., Ричардс П. Количественная сейсмология. Теория и методы. В двух томах. - М.: Мир, 1983. - Т.1.- 518с.,Т.2.- 880с.
3. Неразрушающий контроль: Справочник в 7т. / Под ред. академика РАН В.В.Клюева. Т.3: Ультразвуковой контроль / И.Н.Ермолов, Ю.В. Ланге. - М.: Машиностроение, 2004. - 864с.
4. Углов.А.Л., Ерофеев В.И., Смирнов А.Н. Акустический контроль оборудования при изготовлении и эксплуатации / Отв.ред.академик РАН Ф.М.Митенков. - М.: Наука, 2009. - 280 с.
5. Maugin G.A., Metrikine A.V. (Editors). Mechanics of Generalized Continua: On Hundred Years After the Cosserats. Advances in Mathematics and Mechanics.Vol. 21. - Springer , Berlin, 2010. - 338 p.
6. Altenbach H., Maugin G.A., Erofeev V. (Editors). Mechanics of Generalized Continua. Advanced Structured Matherials. Vol. 7. - Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2011. - 350 p.
7. Altenbach H., Forest S., Krivtsov A. (Editors). Generalized Continua as Models with Multi-scale Effects or Under Multi-field Actions. Advanced Structured Matherials.Vol. 22. - Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2013. - 332 p.
8. Altenbach H., Eremeyev V.A. (Editors). Generalized Continua – from the Theory to Engineering Applications. - Springer, Wien, 2013. - 388 p.

9. Bagdoev A.G., Erofeyev V.I., Shekoyan A.V. Wave Dynamics of Generalized Continua. Advanced Structured Materials. Vol. 24. - Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2016. - 274 p.
10. Altenbach H., Forest S. (Editors). Generalized Continua as Models for Classical and Advanced Materials. Advanced Structured Materials. Vol. 42. - Springer-Verlag, Switzerland, 2016. - 458 p.
11. Maugin G.A. Non-Classical Continuum Mechanics. Advanced Structured Materials. Vol. 51. - Springer, Singapore, 2017. - 260 p.
12. Le Roux J. Etude geometrique de la flexion, dans les deformations infinitesimales d'un milieu continu // Ann. Ecole Norm. Super. - 1911. - 28.523. -579.
13. Le Roux J. Recherches sur la geometrie des deformations finies // Ann. Ecole Norm. Super. - 1913. - 30.193. -245.
14. Jaramillo T.J. A Generalization of the Energy Function of Elasticity Theory. Dissertation. Department of Mathematics. University of Chicago, 1929.
15. Cosserat E. et F. Theorie des Corps Deformables. Paris: Librairie Scientifique A. Hermann et Fils, 1909. - 226 p.
16. Герасимов С.И., Ерофеев В.И., Солдатов И.Н. Волновые процессы в сплошных средах. - Саров: Изд-во РФЯЦ – ВНИИЭФ, 2012. - 260 с.
17. Ерофеев В.И. Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой. - М.: Изд-во МГУ, 1999. - 328 с.
18. Сабодаш П.Ф., Филиппов И.Г. О воздействии подвижной нагрузки на упругое полупространство с учетом моментных напряжений // Прочность и пластичность. - М.: Наука, 1971. - С.317-321.
19. Коненков Ю.К. Об изгибной волне рэлеевского типа // Акустический журнал. - 1960. - Т.6, № 1. - С.124-126.
20. Зильбергейт А.С., Сулова И.Б. Контактные волны изгиба в анизотропных пластинах // Акустический журнал. - 1983. - Т.29, № 2. - С.186-191.
21. Белубекян М.В., Енгибарян И.А. Волны, локализованные вдоль свободной кромки пластины с кубической симметрией // Изв. РАН. Механика твердого тела. - 1996. - № 6. - С.139-143.
22. Захаров Д.Д. Волны Коненкова в анизотропных слоистых пластинах // Акустический журнал. - 2002. - Т.48, № 2. - С.205-208.
23. Вильде М.В., Каплунов Ю.Д., Коссович Л.Ю. Краевые и интерфейсные резонансные явления в упругих телах. - М.: Физматлит, 2010. - 280 с.
24. Каплунов Ю.Д., Приказчиков Д.А. Общие представления для изгибной краевой волны в случае упругой пластины // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия: Естественные науки. - 2011. - № СПЕС. Математическое моделирование. - С.164-170.
25. Приказчиков Д.А., Томашпольский В.Я. Вынужденные краевые колебания предварительно деформированных упругих тел со смешанными граничными условиями на лицевых поверхностях // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия: Естественные науки. - 2011. - № 2. - С.66-77.

*Дата поступления: 16 октября 2018 г.*