Bulletin of Science and Technical Development
www.vntr.ru № 9 (133), 2018

DOI: 10.18411/vntr2018-133-2

УДК 534.1

РАСЧЁТ АВТОРЕЗОНАНСНОЙ ВИБРОУДАРНОЙ СИСТЕМЫ С ФЛУКТУИРУЮЩЕЙ СОБСТВЕННОЙ ЧАСТОТОЙ

© Виталий Львович Крупенин[1,2], Георгий Константинович Корендясев[1]
[1]ИМАШ РАН, Москва, Россия
[2]Московский Политехнический Университет, Москва, Россия
krupeninster@gmail.com

Аннотация. *Рассмотрена самовозбуждающаяся автоколебательная виброударная система, содержащая ударный осциллятор и механизм, обеспечивающий существование авторезонансных виброударных режимов движения. Предполагается, что собственная частота соответствующего линейного осциллятора флуктуирует и представляет собой широкополосный случайный процесс. Решается задача об оценке указанной флуктуации на динамику системы. Предлагается методика расчёта и анализа такой системы к квазиизохронном приближении, в предположении малости зазора. Используется метод усреднения в виброударных системах и один из методов Р.Л. Стратоновича. Определяются необходимые параметры режима движения.*
Ключевые слова: *случайный виброударный процесс, периодическая функция Грина, авторезонанс, фаза удара, импульс удара, флуктуционная поправка, спектральная плотность.*

Работа выполнялась при поддержке РФФИ (проект 18-08-00168).

CALCULATION OF THE AUTORESONANCE VIBROIMPACT SYSTEM WITH FLUCTUING OWN FREQUENCY

© Vitaly Krupenin[1,2], George Korendyasev[1]
[1]IMASH RAN, Moscow, Russia
[2]Moscow Polytechnic University, Moscow, Russia
krupeninster@gmail.com

Abstract. *A self-excited self-oscillating vibro-impact system containing a shock oscillator and a mechanism ensuring the existence of autoresonant vibro-impact regimes of motion is considered. It is assumed that the eigenfrequency of the corresponding linear oscillator fluctuates and is a broadband random process. The problem of estimating this fluctuation on the dynamics of the system is solved. A technique is proposed for calculating and analyzing such a system for a quasi-isochronous approximation, if the gap is small. The method of averaging in vibro-impact systems and one of the methods of R.L. Stratonovich are used. The necessary parameters of the driving mode are determined.*
Keywords: *random vibro-impact process, periodic Green's function, autoresonance, impact phase, impact pulse, fluctuation correction, spectral density.*

Acknowledgements. *The work was supported by RFBR (project 18-08-00168).*

1. Постановка задачи. Рассмотрим *авторезонансное устройство*, схема которого показана на рис.1 [1-3]. Ударный осциллятор совершает колебания с соударениями, взаимодействуя с неподвижным ограничителем *2*, на котором смонтирован датчик импульсов удара (J), формирующий электрический сигнал пропорциональный величине J. Этот сигнал преобразуется в некоторую функцию $\varepsilon A(J)$, которая после перемножения с сигналом $\dot{x}$, поступающим с датчика скорости *1*, подается на возбудитель колебаний *4*.

Предполагая близость системы к консервативной изохронной системе запишем уравнение движения в виде

$$\ddot{x}+\Omega^2 x+\Phi(x,\dot{x})=\varepsilon^2[A(J)+\Phi_0(x,\dot{x})-2b\dot{x}]. \qquad (1)$$

Здесь $\Phi(x,\dot{x})$ и $\Phi_0(x,\dot{x})$ упругая и диссипативная составляющие силы ударного взаимодействия, b- коэффициент диссипации, ε - малый параметр. Порядок правой части выбран $O(\varepsilon^2)$ в связи с тем, что дальше будут случайные силы учитываться $\sim\varepsilon$.

Указанная квазиизохронность выражается предположением, что величина зазора (натяга) $\Delta_0=\varepsilon^2\Delta;\ \Delta=O(1)$. Примем для определенности $A(J) = A_0J^{-1}$, $A_0 > 0$.

Диссипация энергии при ударах учитывается с помощью гипотезы Ньютона о коэффициенте восстановления [1, 2]. Пусть удар происходит в некоторый произвольный момент времени $t=t_\alpha$ тогда $\dot{x}(t_\alpha-0)=-R\dot{x}(t_\alpha+0);\ 0<R\le 1$. Тогда диссипативная составляющая силы удара $\Phi_0\sim(1-R)$. Для каждого удара можно записать [5, 6]: $[\Phi-\Phi_0]|_{t=t_\alpha}=J\delta(t-t_\alpha);\ J=(1+R)\,|\,\dot{x}(t_\alpha-0)\,|$. Здесь соответственно обозначено: J - импульс удара; $\delta(t)$ - δ-функция; t_α - момент некоторого $\alpha-$го удара. Если удары следуют Т-периодически, то сила удара есть $J\delta^T(t-\varphi)$, где $\delta^T(t)-$Т-периодическая последовательность δ -функций, φ -произвольный момент удара.

Перейдем к новым фазовым переменным «импульс-фаза» [1, 2, 4]: $(x,\dot{x})\to(J,\psi)$ в соответствии с формулами

$$x=-J\chi[\psi,\omega(J)],\ \dot{x}=-J\omega(J)\chi_\psi[\psi,\omega(J)], \qquad (2)$$

где принято во внимание, что при $\varepsilon=0$ решение задачи имеет хорошо известный и изученный вид:

$$\begin{aligned}&x(t)=-J\chi(t-\varphi);\ \chi(t)=\frac{1}{2\Omega}\frac{\cos(\Omega t-\frac{T}{2})}{\sin(\frac{\Omega T}{2})},\ 0<t\le T,\ J=-2\Omega\Delta_0\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}\Omega T\ge 0;\\&\chi(t)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\exp(ik\omega t)}{\Omega^2-k^2\omega^2}.\end{aligned} \qquad (3)$$

При этом $\chi(t)$ - периодическая функция Грина (ПФГ) – реакция линейного осциллятора на Т-периодическое воздействие в виде δ -функций ($\delta^T(t)$). В силу своей квазиизохроности колебания происходят вблизи частоты 2Ω [1].

После преобразований можно прийти к системе с быстрой фазой. Усредняя по ней, примем во внимание, вычисленное в работе [5] и, кроме того, также и то обстоятельство, что диссипация при ударах должна учитываться членом $\sim-\varepsilon^2 rJ\delta^T(\psi),\ r=1-R$. Будем иметь в результате (см. также далее):

$$\dot J=-\varepsilon[\varepsilon(\mathrm{r}\,\pi^{-1}\Omega+b)J-\tfrac{1}{2}\varepsilon A_0];\;\; \dot\psi=2\Omega(1-2\varepsilon^2\Omega\Delta J^{-1}\pi^{-1}) \qquad (4)$$

Легко видеть, что здесь существует единственный стационарный режим

$$J\equiv J_0=A_0[2(r\pi^{-1}\Omega+b)]^{-1}, \qquad (5)$$

Общее решение первого из двух выписанных уравнений (4)

$$J(t)=J_0\{1-\exp[-\varepsilon^2[(r\pi^{-1}\Omega+b)]\}+J(0)\exp[-\varepsilon^2[(r\pi^{-1}\Omega+b)]\}$$

свидетельствует об устойчивости стационарного решения J_0 и самовозбуждаемости системы. Декремент колебаний $\gamma=\varepsilon^2[(r\pi^{-1}\Omega+b)]$.
Частота авторезонансного режима

$$\omega_0=2\Omega[1-4\varepsilon^2\Delta(r\pi^{-1}\Omega+b)\Omega\pi^{-1}A_0^{-1}]. \qquad (6)$$

Наша цель рассмотреть и изучить поведение системы в случае, когда частота системы изменяется случайным образом и уравнение движения (1) трансформируется так:

$$\ddot x+\Omega^2[1+\varepsilon\xi(t)]x+\Phi(x,\dot x)=\varepsilon^2[A_0J^{-1}+\Phi_0(x,\dot x)-2b\dot x], \qquad (7)$$

где функция $\xi(t)$ - описывает случайный центрированный стационарный случайный процесс, удовлетворяющий условиям сильного перемешивания. В прикладных задачах условие сильно перемешивания может означать требование достаточно малого времени корреляции. В нашем случае это сводится к предположению о существовании экспоненциальной оценки на корреляционную функцию:

$$\left|K_\xi(\tau)\right|=N_0\exp(-\phi\tau),\; N_0,\phi=\mathrm{const}>0.$$

2. Метод решения. Воспользуемся методом Р.Л. Стратоновича [6], заключающемся на вычислении флуктуационной поправки к решению усредненного уравнения. Формализация метода была проделана Р.З. Хасьминским в работе [7].
Рассмотрим стохастическую систему

$$\dot{\mathbf y}=\varepsilon\mathbf Y(\mathbf y,t)+\varepsilon^2\mathbf Y_1(\mathbf y,t),\;\; \mathrm M\mathbf Y=0,\mathbf y\in\mathbf R^n,$$

причём функции $\mathbf Y$ и $\mathbf Y_1$ - случайные процессы, удовлетворяющие условию сильного перемешивания и ещё ряду требований. Обозначим усредненные векторные моменты этих процессов так:

$$\begin{aligned}
\mathbf Y_0(\mathbf y)&=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_\tau^{\tau+T}\mathrm M\mathbf Y_1(\mathbf y,t)dt,\\
b_{qk}(\mathbf y)&=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_\tau^{\tau+T}ds\int_\tau^{\tau+T}\mathrm M[\mathrm Y^{(q)}(\mathbf y,\mathrm s)\,\mathrm Y^{(k)}(\mathbf y,t)]dt,\\
\mathbf K_0(\mathbf y)&=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_\tau^{\tau+T}ds\int_{\tau-T}^{s}\mathrm M[\mathrm Y'_{\mathbf y}(\mathbf y,\mathrm s)\,\mathrm Y(\mathbf y,t)]dt.
\end{aligned} \qquad (8)$$

При этом предполагается равномерность предельных переходов по τ и $\mathbf y$. Через $\mathrm Y^{(q)}(\mathbf y,\mathrm s)$ обозначена q-z компонента процесса.

Тогда на отрезке $0 \le \varepsilon^2 t < \tau_0$ процесс $\mathbf{y}(\tau),\ \tau = \varepsilon^2 t,$ являющейся решением исходной системы при $\varepsilon \to 0$ аппроксимируется решением стохастического уравнения Ито вида

$$d\mathbf{y}^0(\tau) = \mathbf{B}[\mathbf{y}^0(\tau)]d\tau + \boldsymbol{\sigma}[\mathbf{y}^0(\tau)]d\mathbf{w}(\tau),$$

где $\mathbf{w}(\tau)$ - n-мерный винеровский процесс, $\mathbf{B}(\mathbf{y}) = \mathbf{K}_0(\mathbf{y}) + \mathbf{Y}_0(\mathbf{y}),\quad \boldsymbol{\sigma}[\mathbf{y}(\tau)]\boldsymbol{\sigma}*[\mathbf{y}(\tau)] = b_{qk}(\mathbf{y});$ звёздочка обозначает транспонирование.

Коэффициент сноса $\mathbf{B}(\mathbf{y})$ определяет детерминированную часть уравнения. Эта часть получается в результате усреднения исходной системы. Флуктуационную поправку определяет коэффициент диффузии $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{y})$.

3. Применение методики для решения исходной задачи. Вернёмся к уравнению движения (7). Приведём его в переменных «импульс-фаза» к стандартной форме.

$$\dot{J} = -\varepsilon\{\varepsilon\, \mathrm{r}\, J\delta^T(t-\varphi) + 4[2\varepsilon bJ\,\dot{\chi}(t-\varphi) + J\Omega^2\chi(t-\varphi)\xi(t) - \varepsilon A_0\dot{\chi}(t-\varphi) - \varepsilon\Omega^2\Delta]\dot{\chi}(t-\varphi)\},$$
$$\dot{\varphi} = -4\varepsilon J^{-1}[2\varepsilon bJ\,\dot{\chi}(t-\varphi) - \varepsilon A_0\dot{\chi}(t-\varphi) + J\Omega^2\chi(t-\varphi)\xi(t) - \varepsilon\Omega^2\Delta]\chi(t-\varphi).$$

Необходимо отметить, что первый член в первом уравнение отвечает «домножению дельта-функции на разрыв», так как при $t-\varphi = kT$ (k-целое число) функция $\dot{\chi}(t-\varphi)$ имеет скачок [1, 2]. Такая запись, поэтому может пониматься только как некоторый формальный символ, учитывающий мгновенную потерю энергии при ударе. В дальнейшем усреднение устранит некорректность. Относящиеся к этому замечанию вопросы обсуждаются в книгах [1, 2, 4, 8].
В соответствии с п.2 можно ввести обозначения:

$$Y^{(1)} = -4J\Omega^2 f_1(t-\varphi)\xi(t),\ Y^{(2)} = -4\Omega^2 f_2(t-\varphi)\xi(t),$$
$$Y_1^{(1)} = -4[2bJf_2(t-\varphi) - \Omega^2\Delta\dot{\chi}(t-\varphi)\xi(t) - A_0 f_2(t-\varphi)] - rJ\delta^T(t-\varphi),$$
$$Y_1^{(2)} = -4J^{-1}[2bJf_1(t-\varphi) - \Omega^2\Delta\chi(t-\varphi) - A_0 f_1(t-\varphi)].$$

В силу формулы (3) и сделанного замечания о частоте колебаний в квазиизохронном случае, можем получить:

$$f_1(t) = \chi(t)\dot{\chi}(t) = \tfrac{1}{8\Omega}\sin 2\Omega t,\quad 0 \le t < \tfrac{\pi}{\Omega},$$
$$f_2(t) = \chi^2(t) = \tfrac{1}{8}(1+\cos 2\Omega t),\quad 0 \le t < \tfrac{\pi}{\Omega}.$$

Учитывая периодичность, при посредстве формул (8), определяем коэффициенты сноса и диффузии. После вычислений, в предположении, что время корреляции мало, можно найти

$$b_{11} = \tfrac{1}{4} J^2\Omega^2 S_\xi(2\Omega)\pi,\quad b_{12} = 0,$$
$$K_0^{(1)} = \tfrac{3}{8} J\Omega^2 S_\xi(2\Omega)\pi,\quad Y_0^{(1)} = -(r\pi^{-1}\Omega + b)J + \tfrac{1}{2}A_0.$$

Причем здесь $S_\xi(\omega)$ - спектральная плотность процесса.

Теперь отсюда и при помощи уравнения Ито, данного в п. 2, находим уравнение для нахождения импульса:

$$dJ^0 \big/ d\tau = [3\!/\!_8\,\Omega^2 S_\xi(2\Omega)\pi - (r\pi^{-1}\Omega + b)]J^0 + 1\!/\!_2\,A_0 + 1\!/\!_2\,\Omega J^0 \xi_0(t)\sqrt{S_\xi(2\Omega)\pi}, \tag{9}$$

где $\xi_0(t)$ -стандартный белый шум единичной интенсивности.

Уравнение (9) может быть исследовано методами диффузионных марковских процессов [9]. Соответствующее уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова (ФПК) примет здесь вид:

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{d(J^0)^2}[b_{11}(J^0)p(J^0)] = \frac{d}{dJ^0}\{[B(J^0) + \frac{1}{2}b_{11}(J^0)b'_{11}(J^0)]p(J^0)\}, \tag{10}$$

где

$$B(J^0) = 3\!/\!_8\,\Omega^2 S_\xi(2\Omega)\pi - (r\pi^{-1}\Omega + b)]J^0$$

- первый член в уравнении для нахождения импульса (9), $p(J^0)$ - плотность вероятности, относительно которой и записывается уравнение ФПК.

Граничные условия: $p(0) = p(\infty) = 0,\ J^0 \geq 0$.

В предположении нулевого потока вероятности через границы [6] находим

$$p(J^0) = \frac{\text{const}}{1\!/\!_2\,\Omega J^0\sqrt{S_\xi(2\Omega)\pi}}\exp[2\int\frac{B(J^0)}{b_{11}(J^0)}dJ^0].$$

Подставляя сюда значения $B(J^0)$ и $b_{11}(J^0)$, после выполнения интегрирования, получаем

$$p(J^0) = \frac{\text{const}}{1\!/\!_2\,\Omega\sqrt{S_\xi(2\Omega)\pi}}(J^0)^{\alpha-1}\exp(-\frac{\beta}{J^0}), \tag{11}$$

причём здесь обозначено

$$\alpha = \frac{3\!/\!_8\,\Omega^2 S_\xi(2\Omega) - (r\pi^{-1}\Omega + b)\pi^{-1}}{1\!/\!_2\,\Omega^2 S_\xi(2\Omega)},\ \ \beta = \frac{\pi^{-1}A_0}{1\!/\!_4\,\Omega^2 S_\xi(2\Omega)} > 0.$$

Из (11) видно, что при $J^0 \to 0$: $p(J^0) \to 0$ для любого значения α. Таким образом одно из двух граничных условий выполняется всегда.

Если величина $\alpha < 0$, то величина $\alpha - 1 < 0$ заведомо. Следовательно, если $J^0 \to \infty$ $p(J^0) \to 0$ и второе граничное условие выполняется также.

Условие $\alpha < 0$, в свою очередь, заведомо выполняется если

$$r\pi^{-1}\Omega + b > 3\!/\!_8\,\Omega^2 S_\xi(2\Omega), \tag{12}$$

то есть, если запас демпфирования достаточен для обеспечения устойчивости системы в среднем.

В условии (12) значение спектральной плотности выбирается на частоте главного линейного параметрического резонанса. Это говорит о том, что в выбираемом приближении система наилучшим образом воспринимает внешнюю энергию, переносимую широкополосной флуктуацией как раз на этой частоте.

В формулу (11) входит постоянная нормировки. Её можно найти, если учесть, что $0 < J^0 \le \infty$ и [10]

$$\int_0^\infty (J^0)^{\alpha-1} \exp(-\frac{\beta}{J^0}) dJ^0 = \beta^\alpha \Gamma(-\alpha), \quad \alpha < 0,$$

где $\Gamma(x)$ - Γ - функция Эйлера. Таким образом

$$p(J^0) = \beta^{-\alpha} [\Gamma(-\alpha)]^{-1} (J^0)^{\alpha-1} \exp(-\frac{\beta}{J^0}). \tag{13}$$

Вычисленная плотность вероятности (13) и определяет с точностью до бесконечно малых высокого порядка случайный процесс $J^0(t)$.

Моменты этого процесса

$$m_J^{(n)} = \int_0^\infty (J^0)^n p(J^0) dJ^0 = \beta^n \frac{\Gamma[-(\alpha+n)]}{\Gamma(-\alpha)}$$

определены, когда $\alpha + n < 0$. Это приводит к требованию, усиливающему условие устойчивости

$$r\pi^{-1}\Omega + b > \frac{3+n}{8} \Omega^2 S_\xi(2\Omega).$$

Определим моду процесса. Находя максимум плотности вероятности $p(J^0)$, имеем:

$$J_M^0 = \frac{\beta}{1-\alpha} = \frac{\frac{1}{2} A_0}{(r\pi^{-1}\Omega + b) - \frac{1}{4}\Omega^2 \pi S_\xi(2\Omega)}. \tag{14}$$

Пусть система стремится к детерминированной, и флуктуация стремится к нулю. Тогда $S_\xi \to 0$, а $p(J^0) \to \delta(J^0 - J_M^0)$. Значение J_M^0 совпадает со стационарным значением импульса, получаемым посредством метода усреднения (5).

Это можно увидеть и из уравнения (9), если положить нулю значение S_ξ и приравнять нулю правую часть.

Знание ударного импульса для большинства задач динамики виброударных систем оказывается достаточным. В то же время при помощи формул (2), (3) можно получить приближенное представление закона случайного режима движения в виде

$$x(t) = -J^0(t)\chi(t-\varphi), \ \varphi = \text{const}.$$

Все характеристики случайного процесса $x(t)$ вычисляются с помощью хорошо известных соотношений теории случайных процессов [9].

Список литературы

1. *Бабицкий В.И., Крупенин В.Л.* Колебания в сильно нелинейных системах. - М.: Наука, 1985. - 320 с.
2. *Babitsky V.I., Krupenin V.L.* Vibration of Strongly Nonlinear Discontinuous Systems. - Berlin: Springer-Verlag, 2001. - 420 p.
3. *Крупенин В.Л., Мягкохлеб К.Б.* Об одном классе авторезонансных машин виброударного действия //Доповіді Національної академії наук України. – 2014. - № 3. - С. 64-69.
4. Бурд В.Ш., Крупенин В.Л. Усреднение в квазиконсервативных системах. - М.: Белый Ветер, 2016. - 172 с.
5. Крупенин В.Л. К расчету возмущенных случайными силами авторезонансных виброударных систем // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2013. - №6. - С. 4-8.
6. *Стратонович Р.Л.* Избранные вопросы теории флюктуаций в радиотехнике. - М.: Советское радио, 1961. - 558 с.
7. *Хасьминский Р.*З. Предельная теорема для решения дифференциальных уравнений со случайной правой частью//Теория вероятностей и её применения. – 1966. - т.11, №3. - с. 444-462.
8. *Журавлев В.Ф., Климов Д.М.* Прикладные методы в теории колебаний. - М.: Наука, 1988. - 328 с.
9. *Болотин В.В.* Случайные колебания упругих систем. - М.: Наука, 1979. - 339 с.
10. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. - М.: Наука, 1971. - 1100 с.

Дата поступления: 2 сентября 2018 г.