

УДК 534.1

ДВИЖЕНИЕ НАГРУЗКИ ПО СТРУНЕ, ЛЕЖАЩЕЙ НА НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

© Владимир Иванович Ерофеев¹, Елена Евгеньевна Лисенкова^{1,2}¹Институт проблем машиностроения Российской академии наук,
Нижний Новгород, Россия²Нижегородский институт управления – филиал РАНХиГС, Нижний Новгород, Россия
erof.vi@yandex.ru

Аннотация. Работа посвящена исследованию волнового сопротивления движению нагрузки по струне, лежащей на нелинейно-упругом основании. В случае жесткого типа нелинейности определены частота непропускания и критические скорости движения нагрузки, при переходе через которые качественно меняется картина волнообразования. При частоте источника, лежащей в полосе непропускания, найдена постоянная составляющая силы волнового сопротивления и исследуется ее зависимость от скорости движения нагрузки.

Ключевые слова: струна на нелинейно-упругом основании, волна, движущаяся нагрузка, волновое сопротивление.

Работа выполнялась при поддержке Российского научного фонда (Грант № 14-19-01637)

MOTION OF LOADING BY STRING WHICH LIE ON NON-LINEARLY- ELASTIC BASE

© V.I. Erofeev¹, E.E. Lissenkova^{1,2}¹Mechanical Engineering Research Institute, Russian Academy of Sciences,
Nizhny Novgorod, Russia²Nizhegorodsky Institute of Management, Nizhny Novgorod, Russia
erof.vi@yandex.ru

Abstract. The work is devoted to the study of the wave resistance of motion of a load along a string lying on a nonlinear elastic foundation. In the case of a hard type of nonlinearity, the frequency of non-transmission and the critical velocities of the load motion are determined, and when passing through these, the pattern of wave formation qualitatively changes. At a frequency of the source lying in the non-transmission band, a constant component of the wave drag force is found and its dependence on the speed of the load is investigated.

Keywords: string on a non-linear elastic foundation, wave, moving load, wave resistance.

Acknowledgements: The work was supported by the Russian Science Foundation, project no 14-19-01637

При исследовании динамического поведения одномерных упругих систем под действием движущихся нагрузок чаще всего в качестве направляющих используют струну или балку, лежащих на линейном винклеровском основании [1–3]. Исключение составляют работы [4,

5], где рассматривалось равномерное движение постоянной нагрузки по струне, лежащей на нелинейно-упругом основании. Анализ задачи в [4, 5] проводился с помощью фазовой плоскости. Было установлено, что в случае жесткой нелинейности упругого основания качественных различий с линейным случаем не наблюдается.

На основе этого, решим задачу о сопротивлении равномерному движению нагрузки вдоль направляющей, лежащей на нелинейном упругом основании, воспользовавшись процедурой, которую обычно применяют для линейных систем.

Пусть действие нагрузки характеризуется вертикальной переменной силой

$P(t) = \frac{1}{2} P_0 \exp(i\Omega t) + \text{к.с.}$ с частотой Ω , амплитудой P_0 (к.с. – комплексно-сопряженная

величина), движущейся с постоянной скоростью V . Движение постоянной нагрузки получается простым вырождением при $\Omega \rightarrow 0$. В качестве модели направляющей выберем струну, поперечные колебания $U(x, t)$ которой описываются плотностью функции Лагранжа

$\lambda = \frac{1}{2} \left(\rho U_t^2 - N U_x^2 - h_0 U^2 - \frac{1}{2} h_1 U^4 \right)$, где ρ и N – погонная плотность и натяжение струны,

параметр нелинейности h_1 является малой добавкой к жесткости основания $h_0 \geq 0$ струны. В зависимости от знака h_1 имеем систему либо с «жестким» ($h_1 > 0$), либо с «мягким» ($h_1 < 0$) типом нелинейности.

Согласно [6], постановка краевой задачи в этом случае будет иметь вид

$$\rho U_{tt} - N U_{xx} + h_0 U + h_1 U^3 = 0 \quad (1)$$

$$U(Vt - 0, t) = U(Vt + 0, t) = U(Vt, t) = U_0(t) \quad (2)$$

$$[N U_x + \rho V U_t]_{Vt+0}^{Vt-0} = P(t) \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} \left[\rho U_t^2 + N U_x^2 - h_0 U^2 - \frac{1}{2} h_1 U^4 + 2 \rho V U_x U_t \right]_{Vt-0}^{Vt+0} = R(t)$$

$$\begin{aligned} |U(x, t)| < W < \infty, \quad x \rightarrow \pm\infty \\ S/h < V \quad \text{при } x < Vt, \quad S/h > V \quad \text{при } x > Vt \end{aligned} \quad (4)$$

Соотношения (2) определяют условия непрерывности, (3) – баланса сил на движущейся границе $x = Vt$, (4) – условия, заданные на бесконечности (что гарантирует отсутствие каких-либо других источников), под $R(t)$ понимается сила, необходимая для поддержания равномерного закона движения, S/h – скорость переноса энергии [6, 7], h – плотность энергии, S – плотность потока энергии. Квадратные скобки означают разность предельных значений, стоящих в них величин.

Считая процесс возбуждения колебаний в струне установившимся, решение задачи (1)-(4) слева ($j=1$) и справа ($j=2$) от нагрузки будем искать в форме

$$U(x, t) = \frac{1}{2} A^j \exp\{i(\omega^j t - k^j x)\} + \text{к.с.} \quad (5)$$

где A^j – комплексная амплитуда,

$$\frac{\partial A^j}{\partial t} / (i\omega^j A^j) \sim \frac{\partial A^j}{\partial x} / (-ik^j A^j) \sim \varepsilon \ll 1,$$

а частоты ω^j и волновые числа k^j определяются из системы уравнений (индекс j опущен)

$$\begin{cases} -\omega^2 + c_0^2 k^2 + \omega_*^2 + \mu_*^2 |A|^2 = 0 \\ \omega - kV = \Omega \end{cases} \quad (6)$$

Здесь $c_0 = \sqrt{N/\rho}$ – скорость распространения волн в струне без учета основания, $\omega_* = \sqrt{h_0/\rho}$ – наименьшая частота колебаний струны, обусловленная наличием линейного упругого основания, $\mu_* = \sqrt{|h_1|/2\rho}$. Первое из уравнений системы (6) представляет собой нелинейное дисперсионное уравнение, которое при $h_1 \rightarrow 0$ вырождается в дисперсионное уравнение для поперечных волн в струне на линейном винклеровском основании, а второе – кинематический инвариант [2, 8].

Учет линейного упругого основания, как известно [1–3], приводит к наличию области непропускания [8, 9], когда волны в системе могут распространяться, начиная с частот $\omega > \omega_*$. В системе с жесткой нелинейностью область непропускания увеличивается, а при мягкой – уменьшается. В дальнейшем будем рассматривать лишь систему с жестким типом нелинейности и ситуацию, когда частота источника лежит в полосе непропускания.

Отметим, что если частота источника лежит в полосе непропускания, то неподвижный источник волн не излучает, но двигаясь с некоторой скоростью $V > V_*$, он начинает их излучать. Такое излучение принято называть тормозным [10], а скорость V_* , при переходе через которую качественно меняется картина волнообразования – критической [1–3].

Для струны на линейно-упругом основании источник частоты $\Omega < \omega_*$ будет излучать волны при скорости $V > V_* = c_0 \sqrt{1 - (\Omega/\omega_*)^2}$ [1, 3].

Для струны, лежащей на нелинейном основании, как показали исследования, критическая скорость зависит не только от частоты, но также от амплитуды вынуждающего воздействия и параметра нелинейности

$$V_{**} = \left\{ c_0^2 \left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_*^2} \right) - \frac{\mu_*^2 P_0^2}{2\omega_*^4 \rho^2} + \frac{\mu_* P_0}{\omega_*^2 \rho} \sqrt{c_0^2 \frac{\Omega^2}{\omega_*^2} + \frac{\mu_*^2 P_0^2}{4\omega_*^4 \rho^2}} \right\}^{1/2}$$

На рис. 1 представлены качественные зависимости скорости от частоты с

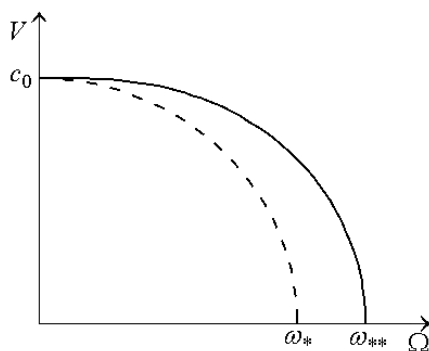


Рис. 1

учетом (сплошная линия) и в отсутствии (пунктирная линия) параметра нелинейности. Видно, что в системе с жестким типом нелинейности упругого основания критическая скорость V_{**} и частота непропускания $\omega_{**} = \sqrt{\omega_*^2 + \frac{\mu_* P_0}{c_0 \rho}}$ выше, чем в пренебрежении

нелинейностью.

Из решения задачи (1)–(4) при $\Omega < \omega_{**}$ следует, что среднее значение силы волнового сопротивления, имеет вид

$$\langle R \rangle = \begin{cases} 0, & V < V_{**} \\ \frac{\Omega V P_0 \sqrt{c_0^2 \Omega^2 - (c_0^2 - V^2) \omega_*^2} - \sqrt{(c_0^2 \Omega^2 - (c_0^2 - V^2) \omega_*^2)^2 - (c_0^2 - V^2) \frac{\mu_*^2 P_0^2}{\rho^2}}}{2\sqrt{2}(c_0^2 - V^2)^{3/2} \mu_*}, & V_{**} < V < c_0 \\ \frac{\rho}{16(V^2 - c_0^2)^2 \mu_*} \left\{ (c_0^2 \Omega^2 + (V^2 - c_0^2) \omega_*^2) \sqrt{(c_0^2 \Omega^2 + (V^2 - c_0^2) \omega_*^2)^2 + (V^2 - c_0^2) \frac{\mu_*^2 P_0^2}{\rho^2}} - \right. \\ \left. - (c_0^2 \Omega^2 + (V^2 - c_0^2) \omega_*^2)^2 + (V^2 - c_0^2) \frac{7\mu_*^2 P_0^2}{2\rho^2} \right\}, & V > c_0 \end{cases}$$

Соответствующая этой формуле зависимость в безразмерных переменных

$\bar{P}_0 = \frac{P_0}{\rho c_0^2}$, $\bar{V} = \frac{V}{c_0}$, $\bar{\Omega} = \frac{\Omega}{\omega_*}$, $\bar{\mu}_* = \frac{\mu_* c_0}{\omega_*^2}$, $\bar{R} = \frac{\langle R \rangle}{\rho c_0^2}$ представлена на рис. 2. График построен при

следующих значениях параметров $\bar{P}_0 = 0.2$, $\bar{\Omega} = 0.6$, $\bar{\mu}_* = 0.1$.

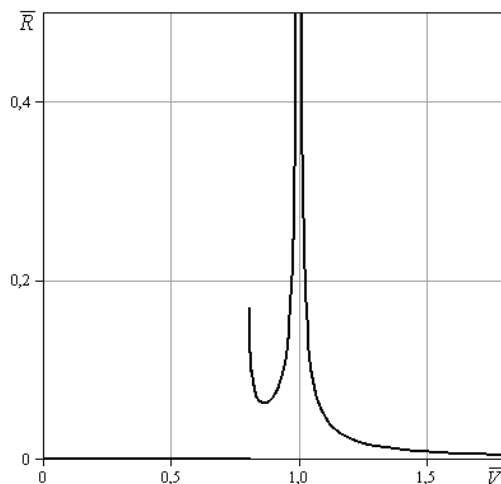


Рис. 2

Движение со скоростями близкими к $c_0 = \sqrt{N/\rho}$ невозможно, поскольку при $V \rightarrow c_0$ сила сопротивления движению $\langle R \rangle \rightarrow \infty$. Согласно расчетам сопротивление движению резко возрастает не только при $V \rightarrow c_0$ ($V/c_0 \rightarrow 1$, $\bar{R} \rightarrow \infty$), но и при стремлении скорости движения нагрузки V к критической. Причем, если в отсутствии нелинейности $\langle R \rangle \rightarrow \infty$ при $V \rightarrow V_*$,

то учет нелинейности упругого основания приводит к тому, что при $V = V_{**}$ сила сопротивления конечна, хотя существует разрыв первого рода (рис. 2).

Можно предположить, что возможна потеря устойчивости равномерного движения, т.е. возбуждение продольных колебаний нагрузки. Дело в том, что давление волн создает тормозное усилие, которое, как показывают расчеты, имеет падающий участок характеристики (рис. 2). На таком участке, согласно канонам теории колебаний [11], динамическое трение отрицательно и может возникнуть автоколебательный режим.

Список литературы

1. Весницкий А.И. Волновые эффекты в упругих системах // Волновая динамика машин. - М.: Наука, 1991. - С. 15-30.
2. Весницкий А.И. Волны в системах с движущимися границами и нагрузками. - М.: Физматлит, 2001. - 320 с.
3. Весницкий А.И. Избранные труды по механике. - Нижний Новгород: Изд-во «Наш дом», 2010. - 248 с.
4. Быченков В.А. Волновое сопротивление движению нагрузок вдоль одномерных упругих систем: дисс. ... физ.-мат. наук. - Горький: ГГУ, 1988. - 134 с.
5. Метрикин А.В. Стационарные волны в нелинейно-упругой системе, взаимодействующей с движущейся нагрузкой // Акустический журнал. - 1994. - Т. 40, № 4. - С. 647 – 650.
6. Весницкий А.И., Каплан Л.Э., Уткин Г.А. Законы изменения энергии и импульса для одномерных систем с движущимися закреплениями и нагрузками // Прикладная математика и механика. - 1983. - Т. 47, № 5. - С. 863-866.
7. Ерофеев В.И., Лисенкова Е.Е. Общие соотношения для волн в одномерных упругих системах // Прикладная математика и механика. - 2013. - Т. 77, № 2. - С. 315-321.
8. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. – М.: Наука, 1984. - 432 с.
9. Победря Б.Е. Механика композитных материалов. - Изд-во Московского университета, 1984. - 335 с.
10. Физический энциклопедический словарь / Гл. ред. А.М. Прохоров. - М.: Сов. энциклопедия, 1983. - 928 с.
11. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. – М., 1959. - 915 с.

Дата поступления: 13 сентября 2018 г.