

УДК 534.1

ПОПЕРЕЧНЫЕ ВОЛНЫ В ГИБКОЙ НАПРАВЛЯЮЩЕЙ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕЙ С НЕЛИНЕЙНО-ВЯЗКИМ ОСНОВАНИЕМ

© Владимир Иванович Ерофеев^{1,2}, Максим Игоревич Корсаков²,
Анна Викторовна Леонтьева^{1,2}

¹Институт проблем машиностроения РАН – филиал Федерального государственного бюджетного научного учреждения «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики Российской академии наук» (ИПМ РАН), Нижний Новгород, Россия

²Нижегородский государственный университет им. Н.И.Лобачевского,
Нижний Новгород, Россия

erof.vi@yandex.ru

Аннотация. В настоящей работе рассматривается динамическая задача для системы, состоящей из одномерной гибкой направляющей (струна), лежащей на нелинейно-вязком основании. Построены дисперсионные характеристики поперечных волн, а также их зависимости от параметра, отвечающего за нелинейную вязкость основания. Выявлены условия, при которых в системе могут существовать стационарные ударные волны (кинки), получены аналитические решения, описывающие такие волны.

Ключевые слова: гибкая направляющая, нелинейно-вязкое основание, поперечная волна, дисперсионные характеристики, стационарная ударная волна.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 14-19-01637).

CROSS WAVES IN A FLEXIBLE GUIDE INTERACTING WITH A NONLINEARLY VISCOUS FOUNDATION

© V.I. Erofeev^{1,2}, M.I. Korsakov², A.V. Leonteva^{1,2}

¹Mechanical Engineering Research Institute of RAS, Nizhny Novgorod, Russia

²Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Nizhny Novgorod, Russia

erof.vi@yandex.ru

Abstract. In this paper we consider a dynamic problem for a system consisting of a one-dimensional flexible guide (a string) resting on a nonlinearly viscous foundation. Dispersion characteristics of transverse waves are constructed, as well as their dependence on the parameter responsible for the nonlinear viscosity of the base. The conditions under which stationary shock waves (kinks) can exist in the system are found, and analytical solutions describing such waves are obtained.

Keywords: flexible guide, nonlinearly viscous foundation, transverse wave, dispersion characteristics, stationary shock wave.

Acknowledgements. The work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 14-19-01637).

Многие элементы машиностроительных конструкций, в частности, несущих движущиеся нагрузки (путевая структура, контактный провод) рассматриваются в виде одномерной распределенной системы (струна, балка), взаимодействующей с деформируемым основанием [1-5]. Основание задается линейно-упругим (основания Винклера [1, 2], Пастернака [6]), упруго-инерционным [7-11] или вязко-упругим [5], что позволяет учитывать различные особенности его сопротивления силовому воздействию.

В публикуемой работе изучаются особенности распространения поперечных волн в струне, лежащей на нелинейно-вязком основании.

Уравнение динамики. Рассмотрим уравнение поперечных колебаний струны, лежащей на нелинейно-вязком основании:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \nu_1 \frac{\partial u}{\partial t} + \nu_2 u^2 \frac{\partial u}{\partial t} = 0. \quad (1)$$

Здесь $u(x, t)$ – поперечное перемещение струны; $c = \sqrt{\frac{N}{\rho}}$ – скорость, с которой распространялась бы поперечная волна, если бы струна не взаимодействовала с вязким основанием; N – натяжение; ρ – плотность струны; ν_1, ν_2 – коэффициенты, характеризующие вязкие свойства основания.

В безразмерных переменных $\tau = t\nu_1, y = \frac{x\nu_1}{c}$ уравнение (1) запишет в виде:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial V}{\partial \tau} + \gamma V^2 \frac{\partial V}{\partial \tau} = 0 \quad (2)$$

где

$V = \frac{u}{U}, \gamma = \frac{\nu_2}{\nu_1} U^2$, U – величина перемещения, начиная с которой возникает необходимость учета растяжимости струны.

Дисперсионные характеристики. Решение уравнения (2) будем искать в виде бегущей гармонической волны

$$V = Ae^{i(\omega\tau - ky)} + A^*e^{-i(\omega\tau - ky)}. \quad (3)$$

Здесь $A = ae^{i\varphi}$ – комплексная амплитуда волны; a – действительная амплитуда; $\omega\tau - ky = \Phi(y, \tau)$ – фаза волны; $\omega = \frac{2\pi}{T}$ – частота волны; T – период волны; $k = \frac{2\pi}{\Lambda}$ – волновое число; Λ – длина волны.

Для диспергирующих систем с кубической нелинейностью эффект самовоздействия обычно преобладает над эффектом генерации высших гармоник и последним можно пренебречь [12]. Поэтому считаем, что

$$V^3 \sim A^2 A^* e^{i(\omega\tau - ky)} = |A|^2 A e^{i(\omega\tau - ky)} \quad (4)$$

Согласно (2), (3) и (4) частота и волновое число поперечной волны, распространяющейся в струне, лежащей на нелинейно-вязком основании, связаны соотношением

$$-\omega^2 + k^2 + i\omega(1 + \gamma|A|^2) = 0, \quad (5)$$

из которого следует, что волновое число должно быть комплексным:

$$k = k' + ik'' \quad (6)$$

Комплексная величина волнового числа означает, что волна имеет постоянную распространения k' и затухает по экспоненциальному закону с показателем k'' . Подставляя (6) в комплексное дисперсионное уравнение (5) и выделяя его действительную и мнимую части, приходим к системе алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \omega^2 - k'^2 + k''^2 = 0 \\ \omega + \gamma\omega|A|^2 + 2k'k'' = 0 \end{cases}, \quad (7)$$

откуда находим частотную зависимость постоянной распространения:

$$k' = \omega \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{\omega^2}(1 + \gamma|A|^2)^2}}{2}} \quad (8)$$

и частотную зависимость коэффициента затухания:

$$k'' = \omega \frac{1 + \gamma|A|^2}{2k'} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1 + \gamma|A|^2}{\sqrt{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{\omega^2}(1 + \gamma|A|^2)^2}}} \quad (9)$$

Соотношение (8) позволяет найти зависимость частоты волны от постоянной ее распространения $\omega(k')$:

$$\omega = \sqrt{\frac{4k'^4}{4k'^2 + (1 + \gamma|A|^2)^2}} \quad (10)$$

и вычислить фазовую скорость:

$$v_\phi = \frac{\omega}{k'} = \sqrt{\frac{4k'^2}{4k'^2 + (1 + \gamma|A|^2)^2}}. \quad (11)$$

На рис. 1 представлена частотная зависимость постоянной распространения k' , а на рис. 2 – частотная зависимость затухания k'' поперечной волны при изменении $\gamma|A|^2$ от 10 до 10^4 . Заметим, что на рис.1-4 кривой 1 соответствует значение $\gamma|A|^2 = 10$; кривой 2 – значение $\gamma|A|^2 = 10^2$; кривой 3 – значение $\gamma|A|^2 = 10^3$; кривой 4 – значение $\gamma|A|^2 = 10^4$.

Из графиков видно, что при увеличении параметра, отвечающего за вязкость, постоянная распространения увеличивается. То же самое происходит и с затуханием.

На рис. 3 представлена зависимость фазовой скорости v_ϕ поперечной волны от постоянной распространения k' при изменении $\gamma|A|^2$ от 10 до 10^4 .

Из графиков видно, что фазовая скорость уменьшается с увеличением параметра $\gamma|A|^2$.

Соотношения (8) и (9) позволяют вычислить частотную зависимость отношения k' к k'' :

$$\frac{k'}{k''} = \frac{\omega \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{\omega^2}(1 + \gamma|A|^2)^2} \right)}{(1 + \gamma|A|^2)}, \quad (12)$$

которая позволяет определить, какой, преимущественно, является волна: распространяющейся или затухающей. Неравенству $\frac{\text{Re}(k)}{\text{Im}(k)} > 1$ соответствуют области частот,

где процесс распространения волны преобладает над процессом ее затухания.

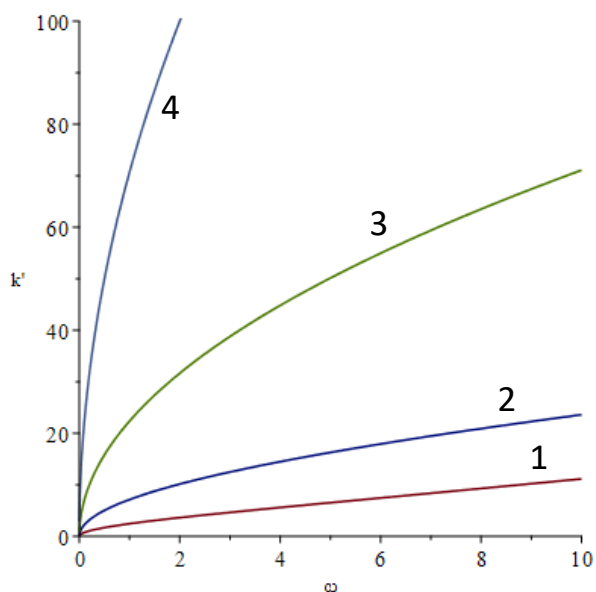


Рис. 1. ($k'(\omega)$).

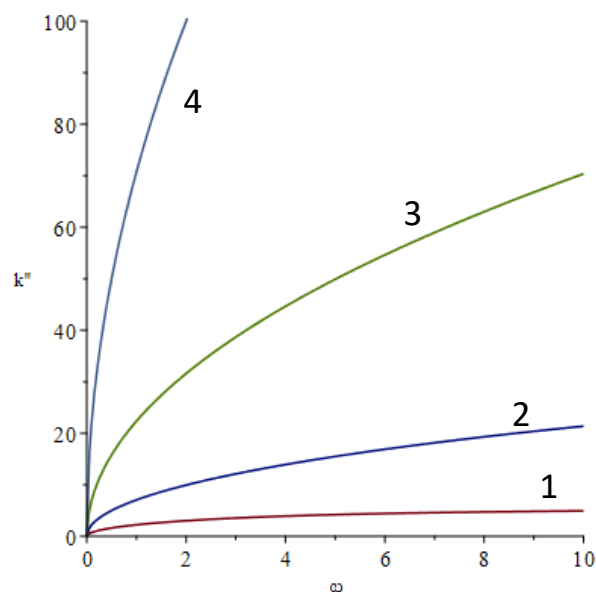


Рис. 2. ($k''(\omega)$).

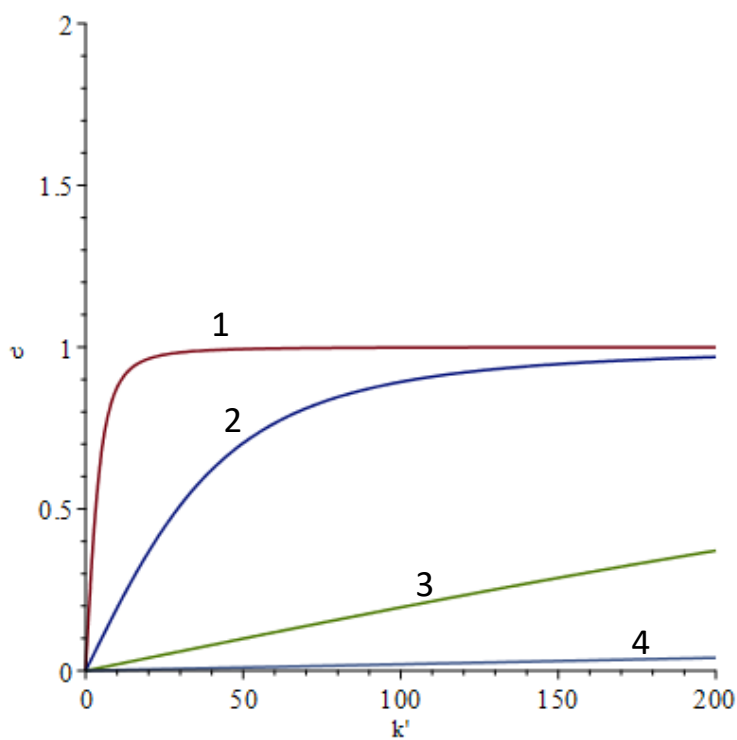
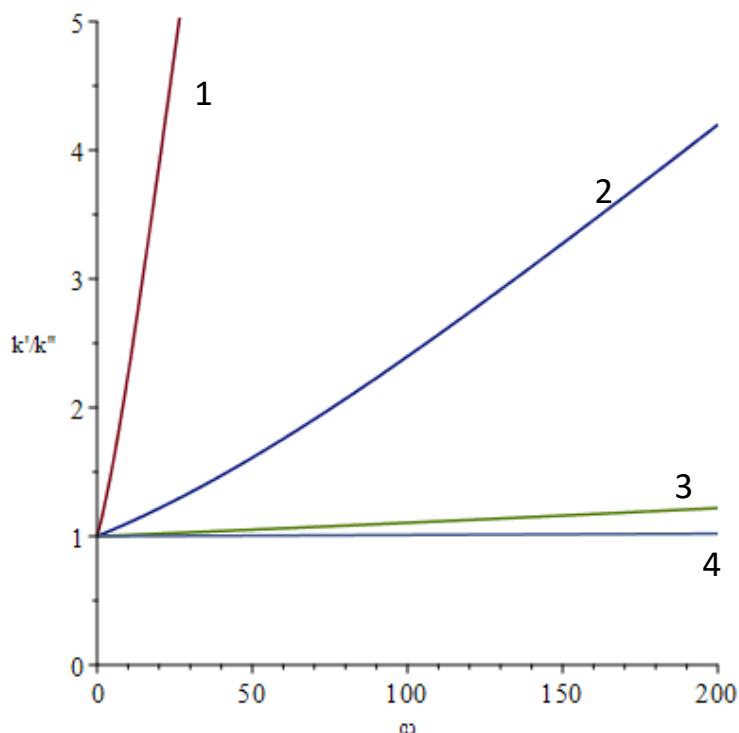


Рис. 3. Зависимость фазовой скорости от действительной части волнового числа.

На рис. 4 представлена частотная зависимость отношения k' к k'' при изменении $\gamma|A|^2$ от 10 до 10^4 .

Из рисунка видно, что с увеличением параметра $\gamma|A|^2$ волна остаётся распространяющейся во всем исследованном частотном диапазоне.


 Рис. 4. Частотная зависимость отношения k' к k''

Нелинейные стационарные волны. Рассмотрим стационарную волну $V = V(\xi)$, где $\xi = y - vt$ – бегущая координата, v – скорость стационарной волны. Уравнение (2) принимает вид:

$$(v^2 - 1) \frac{d^2 V}{d\xi^2} - v \frac{dV}{d\xi} - \gamma v V^2 \frac{dV}{d\xi} = 0. \quad (13)$$

Интегрируя (13) один раз по бегущей переменной, получаем уравнение первого порядка с кубической нелинейностью

$$\frac{dV}{d\xi} + a_1 V + a_2 V^3 = 0, \quad (14)$$

где $a_1 = -\frac{v}{(v^2 - 1)}$, $a_2 = -\frac{\gamma v}{3(v^2 - 1)} = \frac{\gamma a_1}{3}$, константу интегрирования положили равной нулю.

Учитывая в (14) граничные условия

$$V(\xi) = \begin{cases} V_1, & \xi \rightarrow +\infty \\ V_2, & \xi \rightarrow -\infty \end{cases} \quad (V_2 > V_1), \quad (15)$$

находим соотношение, связывающее коэффициенты уравнения

$$a_1 = -(V_1^2 + V_1 V_2 + V_2^2) a_2. \quad (16)$$

Из (16) следует, что для существования стационарной ударной волны, удовлетворяющей выбранным граничным условиям (15), a_1 и a_2 должны быть разных знаков, т.е. $\gamma < 0$.

Решение уравнения (14), с учетом (16), в неявном виде:

$$\frac{1}{a_2(V_2 - V_1)} \left(\frac{\ln(V - V_1)}{2V_1 + V_2} - \frac{\ln(V_2 - V)}{2V_2 + V_1} \right) - \frac{\ln|V + V_1 + V_2|}{a_2(2V_1 + V_2)(2V_2 + V_1)} = \xi + C_1. \quad (17)$$

Из (17) видно, что функция $V(\xi)$ имеет асимптоты $V^{(1)} = V_1$, $V^{(2)} = V_2$, $V^{(3)} = -(V_1 + V_2)$, а на граничные условия должны быть наложены ограничения $2V_1 + V_2 \neq 0$, $V_1 + 2V_2 \neq 0$.

В зависимости от выбора граничных условий (15), решение (17) позволяет найти кинки с монотонным убыванием или возрастанием. Графики зависимости (17) изображены на рис. 5, 6.

Если V_1, V_2 одного знака, то кинк с монотонным убыванием существует при положительных значениях V_1, V_2 и отрицательных значениях a_2 или при отрицательных значениях V_1, V_2 и положительных значениях a_2 (рис. 5).

Если V_1, V_2 разных знаков и выполняется одно из неравенств

$$-(V_1 + V_2) < V_1 \text{ или } -(V_1 + V_2) > V_2,$$

то на графике монотонно убывающие кинки получаем при $a_2 < 0$ (когда выполнено первое неравенство) (рис. 6, красный) или при $a_2 > 0$ (когда выполнено второе неравенство) (рис. 6, синий).

Для всех остальных вариантов V_1, V_2 монотонных решений, удовлетворяющих (4), не существует.

Чем больше $|a_2|$, тем меньше ширина фронта волны.

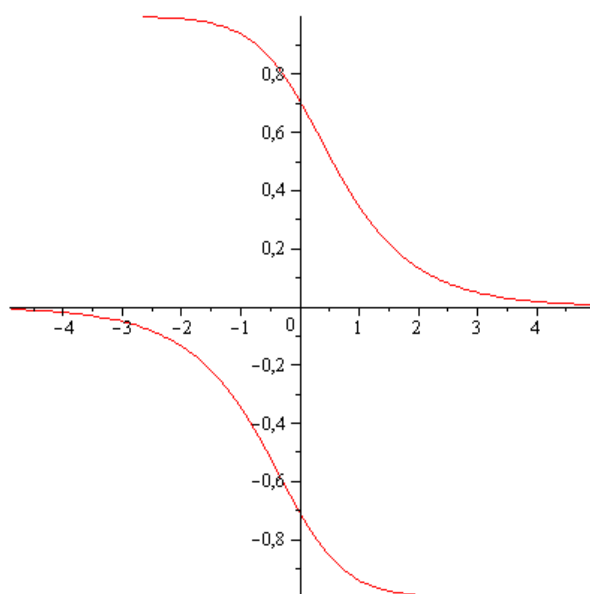


Рис. 5. Зависимости $V(\xi)$, $V_1V_2 \geq 0$

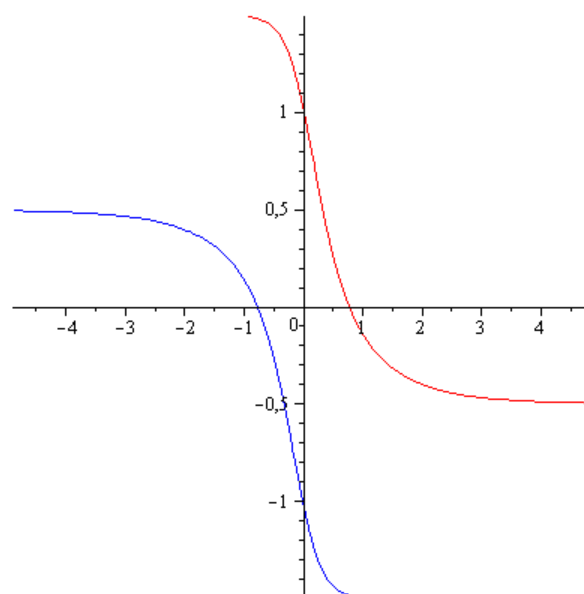


Рис. 6. Зависимости $V(\xi)$, $V_1V_2 < 0$

Уравнение (14) с помощью замены $V = \sqrt{U}$ сводится к уравнению

$$U' + 2a_1U + 2a_2U^2 = 0, \quad (18)$$

решение которого имеет целый положительный полюс равный единице. Методы поиска точных решений нелинейных дифференциальных уравнений, основанные на решениях известных уравнений, имеют наиболее полное описание в работах Н.А. Кудряшова [13, 14]. Учитывая внешнее сходство с уравнением Риккати, находим решение уравнения (18):

$$U(\xi) = \frac{1}{2a_2} (|a_1| \operatorname{th}(|a_1|\xi) - a_1). \quad (19)$$

Возвращаясь к исходной переменной V , получаем решение уравнения (14)

$$V(\xi) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{a_1}{a_2} (\operatorname{sign}(a_1) \operatorname{th}(|a_1|\xi) - 1)}. \quad (20)$$

На рис. 7 представлены профили перемещения (20) (красный), первые градиенты перемещения (синий), вторые градиенты перемещения (зеленый).

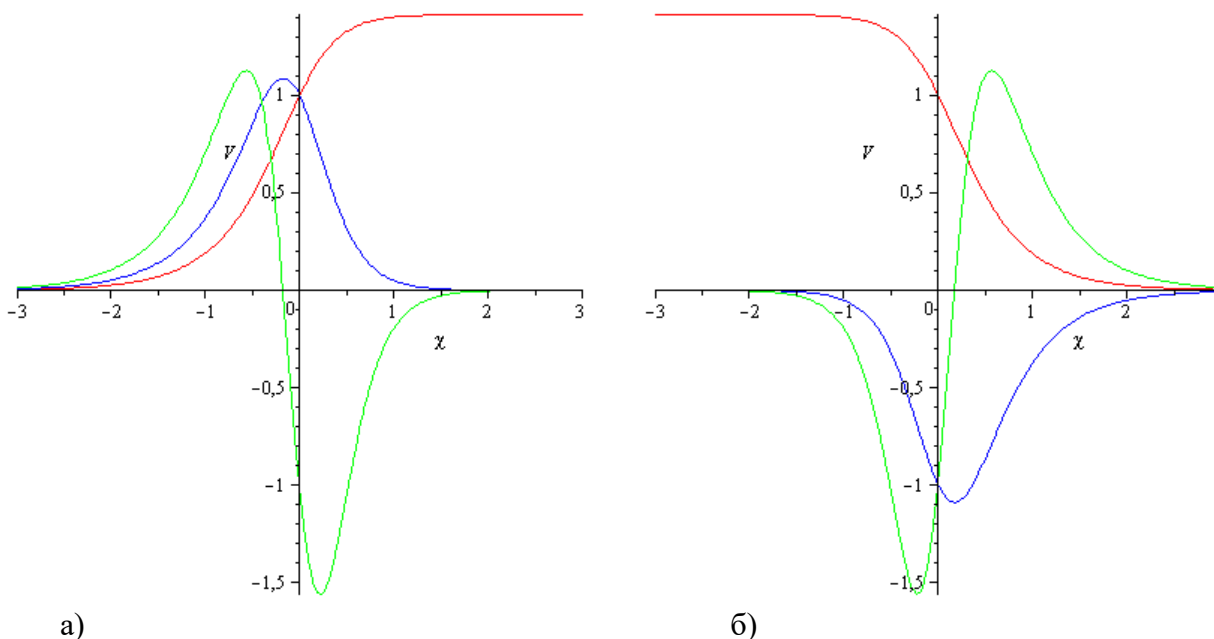


Рис. 7. Профили перемещения (20) (красный), первые градиенты перемещения (синий), вторые градиенты перемещения (зеленый); а) $a_2 > 0$, $a_1 < 0$; б) $a_1 > 0$, $a_2 < 0$.

На рисунке изображены несимметричные кинки с монотонным возрастанием (в сверхзвуковом случае) и монотонным убыванием (в дозвуковом случае) соответственно.

Список литературы:

1. Клепиков С.Н. Расчет конструкций на упругом основании. – Киев: Будивэльник, 1967. – 185 с.
2. Весницкий А.И. Волны в системах с движущимися границами и нагрузками. – М.: Физматлит, 2001. – 320 с.
3. Весницкий А.И. Избранные труды по механике. - Нижний Новгород: Изд-во «Наш дом», 2010. - 248 с.
4. Иванченко И.И. Динамика транспортных сооружений: высокоскоростные подвижные, сейсмические и ударные нагрузки. - М.: Наука, 2011. - 574 с.
5. Метрикин А.В., Веричев С.Н., Вострухов А.В. Фундаментальные задачи высокоскоростного наземного транспорта. - Saarbrücken, Germany: LAP Lambert Academic Publishing, 2014. - 208 с.
6. Пастернак П.Л. Основы нового метода расчета фундаментов на упругом основании при помощи двух коэффициентов постели. - М.: Гос.изд-во лит. по строительству и архитектуре, 1954. - 56 с.

7. Ерофеев В.И., Колесов Д.А., Лисенкова Е.Е. Расчет дисперсионных характеристик струны, лежащей на упруго-инерционном основании // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. – 2013. - № 4 (1). – С.199-203.
8. Ерофеев В.И., Колесов Д.А., Лисенкова Е.Е. Исследование волновых процессов в одномерной системе, лежащей на упруго-инерционном основании, с движущейся нагрузкой // Вестник научно-технического развития. – 2013. - № 6 (70). – С.18-29.
9. Ерофеев В.И., Колесов Д.А., Лисенкова Е.Е. Генерация волн источником, движущимся по деформируемой направляющей, лежащей на упруго-инерционном основании // Машиностроение и инженерное образование. – 2013. - № 4(1). – С.199-203.
10. Ерофеев В.И., Колесов Д.А., Лисенкова Е.Е. Особенности генерации волн источником, движущимся по одномерной гибкой направляющей, лежащей на упруго-инерционном основании // Акустический журнал. - 2016. – Т. 62, № 6. – С. 639-647.
11. Ерофеев В.И., Колесов Д.А., Леонтьева А.В. Нелинейные периодические волны в гибкой направляющей, взаимодействующей с упруго-инерционным основанием // Вестник научно-технического развития. – 2018. - № 5 (129). – С.11-18.
12. Рыскин Н.М., Трубецков Д.И. Нелинейные волны. – М.: Ленанд, 2017. – 312 с.
13. Кудряшов Н.А. Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений. - Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. - 360 с.
14. Кудряшов Н.А. Методы нелинейной математической физики: Учебное пособие. – Долгопрудный: Интеллект, 2010. – 368 с.

Дата поступления: 19 августа 2018 г.