

УДК 621.01:534.1

## КОЛЕБАНИЯ ЦИКЛОВЫХ МЕХАНИЗМОВ ПРИ УЧЕТЕ НЕЛИНЕЙНОГО КИНЕМАТИЧЕСКОГО ВОЗБУЖДЕНИЯ

© Иосиф Исаакович Вульфсон

*Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования "Санкт-Петербургский государственный университет промышленных технологий и дизайна", СПбГУПТД, Санкт-Петербург, Россия*  
[jvulf@yandex.ru](mailto:jvulf@yandex.ru)

**Аннотация.** В статье приведены результаты анализа условий динамической устойчивости и исследования вынужденных колебаний в приводах машин с цикловыми механизмами при учете нелинейности характеристик, вызванных законами движения рабочих органов. Установлено возникновение многозначности амплитудно-частотной характеристики, в которой фиксированному значению частоты возбуждения соответствует несколько значений амплитуд. Выявлен эффект «затягивания» в рассматриваемом классе систем. Показано, что кинематические нелинейности могут вызвать возникновение достаточно больших амплитуд вынужденных колебаний, что может привести к возможности аварий. Приводятся инженерные рекомендации.

**Ключевые слова:** колебания, цикловые механизмы, нелинейное возбуждение.

## VIBRATIONS OF CYCLIC MECHANISMS ACCOUNTING NONLINEAR KINEMATIC EXCITATION

© Iosif I. Vulfson

*Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education  
Saint Petersburg State University of Industrial Technologies and Design  
Saint-Petersburg, Russia*  
[jvulf@yandex.ru](mailto:jvulf@yandex.ru)

**Abstract.** The article presents the results of an analysis of the conditions of dynamic stability and the study of forced oscillations in the drives of machines with cyclic mechanisms, taking into account the nonlinearity of the characteristics caused by the laws of motion of the working organs. The emergence of a multivalued amplitude-frequency characteristic in which several values of amplitudes correspond to a fixed value of the excitation frequency is established. The effect of "tightening" in the class of systems under consideration is revealed. It is shown that kinematic nonlinearities can cause the appearance of sufficiently large amplitudes of forced oscillations, which can cause the possibility of accidents. The engineering recommendations are given.

**Keywords:** vibrations, cyclic mechanisms, nonlinear excitation.

1. Динамике цикловых механизмов посвящено много публикаций, обзор которых не является целью данной статьи. Поэтому во введении мы ограничимся лишь некоторыми сведениями, облегчающими дальнейшее изложение. Будем понимать под *идеальным механизмом* его кинестатическую модель при абсолютно точном воспроизведении

заданных характеристик, т.е. такой абстрактный механизм, в котором звенья не деформируются, отсутствуют зазоры и погрешности изготовления. Если такой механизм имеет одну степень подвижности, то положение любого звена механизма однозначно определяется в зависимости от угла поворота входного звена  $\varphi_1$ . Для определенности примем, что звено  $n$  совершает вращательное или поступательное движение, описываемое одной координатой  $\Phi_n$ . Тогда

$$\varphi_n = \Pi_n(\varphi_1), \quad (1)$$

где  $\Pi_n$  – функция положения звена  $n$ .

Введем в рассмотрение следующие функции:

$$\Pi_n' = \frac{d\Pi_n}{d\varphi_1}; \quad \Pi_n'' = \frac{d^2\Pi_n}{d\varphi_1^2}; \quad \Pi_n''' = \frac{d^3\Pi_n}{d\varphi_1^3},$$

которые называются соответственно *первой, второй и третьей геометрическими передаточными функциями*, либо аналогами скоростей, ускорений и ускорений второго порядка [1–7]. Если  $\varphi_1$  отвечает угловой координате, то размерность передаточных функций совпадает с размерностью  $\Pi_n$ . Отличительной особенностью цикловых механизмов является нелинейность функции положения, трансформирующей координату на «входе» механизма в координату на «выходе». Одной из важных задач при реализации сложных законов программного движения рабочих органов машин, как известно, является обеспечение высокой точности при выполнении технологических операций, что при постоянно растущих рабочих скоростях требует более глубокого учета динамических факторов. Может возникнуть вопрос, приводит ли нелинейность функции положения к необходимости использования нелинейной математической модели, на базе которой могут быть определены колебания рассматриваемой системы.

Обратимся к нескольким типовым случаям, отвечающим динамической модели привода циклового механизма (рис.1). Здесь приняты следующие условные обозначения:  $c_j$  – коэффициенты жесткости;  $J_j$  – моменты инерции (при поступательном движении моменты инерции следует заменить массами);  $\psi_j$  – коэффициенты рассеяния;  $\Pi$  – функция положения циклового положения. Пусть  $\varphi_1 = \omega t$ , где  $\omega = \text{const}$  угловая скорость на входе вала 1.

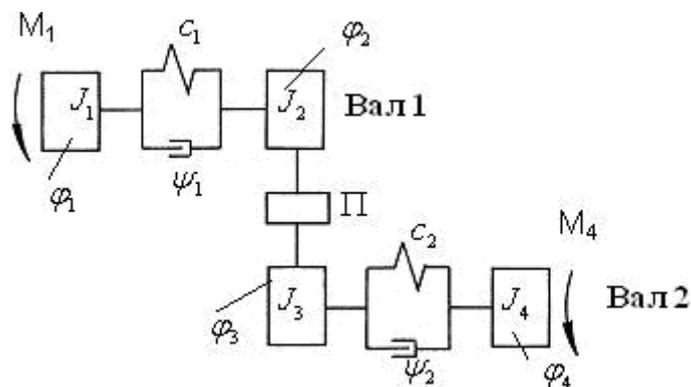


Рис.1. Динамическая модель

**Случай 1**  $c_1 = \infty$ . Тогда  $\varphi_2 = \varphi_1 = \omega t$  и  $\varphi_3 = \Pi(\varphi_2)$ . При этом колебание диска  $J_4$  описывается дифференциальным уравнением

$$J_4 \ddot{q} + b \dot{q} + c_2 q = M_4(t) - J_4 \Pi'' \omega^2. \quad (2)$$

Здесь  $b$  – коэффициент эквивалентного линейного сопротивления (подробнее см. [ 4, 5, 6 ].) Таким образом, в данном случае нелинейная функция, формирующая закон движения рабочего органа, находится лишь в правой части дифференциального уравнения, и проявляет себя как кинематическое возбуждение, не влияющее на частотные характеристики системы.

**Случай 2**  $c_2 = \infty$ . Этому случаю отвечает наиболее простая динамическая модель механизма с нелинейной функцией положения, в которой привод представлен в виде колебательного контура с одной степенью свободы, а выходные звенья приняты абсолютно жёсткими. В этой модели кинематический аналог, роль которого выполняет нелинейная функция  $\varphi_3 = \Pi(\varphi_2)$ , «встроенная» между инерционными элементами  $J_2$  и  $J_3 + J_4$ . Эта модель позволяет в первом приближении выявить динамические ошибки, возникающие из-за крутильных колебаний вала, передаточных механизмов и других элементов привода.

Соответствующее дифференциальное уравнение имеет вид

$$J_2 \ddot{q}_2 + b_1 \dot{q}_2 + c_1 q_2 = [\Pi'(\varphi_2 + q_2)] \{ [-\Pi''(\varphi_2 + q_2)](J_3 + J_4) + M_4(\varphi_*, t) \}. \quad (3)$$

Здесь аргумент передаточных функций зависит не только от  $\varphi_1 = \omega t$ , но и от  $q_2$  – крутильных колебаний вала 1. Таким образом, теперь дифференциальное уравнение (2) в отличие от (1) является нелинейным, так как обобщённая координата входит в качестве аргументов нелинейных функций. Как показано в [ 4,5,6], на интервалах, внутри которых функции  $\Pi(\varphi)$ , и несколько первых производных этих функций по  $\varphi$  не терпят разрывов непрерывности, это уравнение ценой малосущественных в динамическом отношении упрощений может быть приведено к виду линейного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами. Раскладывая на этих интервалах нелинейные функции в ряды Тейлора по степеням малой величины  $q_2$ , имеем

$$\Pi^{(r)}(\varphi_* + q_2) \approx \Pi^{(r)}(\varphi_*) + \Pi^{(r+1)}(\varphi_*) q_2 \quad (4)$$

Эту процедуру назовём *линеаризацией в окрестности программного движения*. Не следует смешивать этот приём с такой линеаризацией, когда на выделенном интервале нелинейная функция заменяется линейной. В данном случае при относительно большой составляющей аргумента  $\varphi_2 \approx \varphi_* = \omega t$  все функции сохранили свои нелинейные свойства, и лишь малые угловые деформации  $q$  вошли в соответствующие выражения линейно.

Указанное упрощение позволяет в дальнейшем пользоваться *принципом суперпозиции*, справедливым лишь для линейных систем. Данные инженерных расчётов свидетельствуют о том, что обычно, за исключением некоторых особых случаев, значения отброшенных членов рядов таковы, что не оправдывают дальнейших уточнений. Именно, анализу таких случаев посвящена данная статья.

2. Как уже отмечалось, для определения переменных коэффициентов дифференциального уравнения ( 2 ) была использована линеаризация передаточных функций механизма в окрестности текущего фазового угла, после чего в общем виде уравнение (3) может быть представлено как

$$G(t) \ddot{q} + P(t) \dot{q} + K(t) q = W(t), \quad (5)$$

где  $G(t) = 1 + f_1^2$ ;  $P(t) = 2k_0(\delta + N_0^{-1}f_1f_2)$ ;  $K(t) = k_0^2[1 + N_0^{-2}(f_2^2 + f_1f_3)]$ ;  $W(t) = Q(t)/J_2 - \omega^2 f_1f_2$ ;  
 $f_r = \Pi^{(r)}(\varphi_*)/\sigma$ ;  $Q(t)$  – обобщенная сила.  $k_0 = \sqrt{c_1/J}$ ;  $N_0 = k_0/\omega$ ;  $\sigma = \sqrt{J_2/J}$ .

(Здесь и ниже индекс при обобщенной координате опущен.)

При разложении коэффициентов уравнения (5) в ряды Фурье, принимая во внимание четность и нечетность входящих функций, имеем

$$G(t) = G_0 + \sum_{i=1}^{\infty} G_i \cos(i\omega t); P(t) = P_0 + \sum_{i=1}^{\infty} P_i \sin(i\omega t); K(t) = K_0 + \sum_{i=1}^{\infty} [K_i^c \cos(i\omega t) + K_i^s \sin(i\omega t)]. \quad (6)$$

Если в рядах (6) не ограничиваться линейными членами, то левая часть уравнения (5) дополнится нелинейной функцией  $\Lambda$ . Для рассматриваемого случая с точностью до третьего порядка малости эта функция описывается следующим образом:

$$\Lambda = (f_2^2 + f_1f_3)(2\omega q\dot{q} + q\dot{q}^2 + q^2\ddot{q}) + f_1f_2(2q\ddot{q} + \dot{q}^2) + 0,5\omega^2 f_3^2 q^3. \quad (7)$$

Воспользуемся одной модификацией метода гармонической линеаризации применительно к полученному нелинейному дифференциальному уравнению с периодически изменяющимися переменными коэффициентами [1, 6]. При разложении периодической функции  $\Lambda$  в ряд Фурье сохраним свободный член и члены, отвечающие гармонике  $j\omega$ .

$$\Lambda \approx \Lambda_0 + \Lambda_j^c \cos j\omega t + \Lambda_j^s \sin j\omega t,$$

Примем, что решение полученного таким образом дифференциального уравнения в резонансной зоне близко к гармоническому  $q^0 = A_0 + A_j \cos j\omega t + B_j \sin j\omega t$  ( $j = 1/2; 1; 3/2; 2; \dots$ ; при анализе вынужденных колебаний сохраняются только целые значения).

После подстановки (7) в скорректированное уравнение (5) и обычной процедуры уравнивания коэффициентов получаем следующую систему нелинейных алгебраических уравнений:

$$\left. \begin{aligned} A_0 K_0 + \Psi_j A_j + 0,5 K_j^s B_j + \Lambda_0(A_0, A_j, B_j) &= Q_0; \\ A_0 K_j^c + [K_0 - j^2 \omega^2 G_0 + \Psi_{2j}] A_j + [j\omega P_0 + 0,5 K_{2j}^s] B_j + \\ + \Lambda_j^c(A_0, A_j, B_j) &= Q_j^c; \\ A_0 K_j^s - [j\omega P_0 - 0,5 K_{2j}^s] A_j + [K_0 - j^2 \omega^2 G_0 - \Psi_{2j}] B_j + \\ + \Lambda_j^s(A_0, A_j, B_j) &= Q_j^s. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Здесь  $\Psi_j = 0,5(K_j^c - j\omega P_j - j^2 \omega^2 G_j)$ ;  $\Psi_{2j} = 0,5(K_{2j}^c - j\omega P_{2j} - j^2 \omega^2 G_{2j})$ .

Решив эту систему уравнений, находим один или несколько корней  $A_0^*, A_j^*, B_j^*$ .

Главный параметрический резонанс имеет место при близости частоты пульсации к удвоенному значению усредненной частоты собственных колебаний, т.е. при  $i\omega \approx 2\sqrt{K_0/G_0}$ .

Описанная выше процедура усреднения на текущем периоде колебаний привела к тому, что система относительно новых переменных не зависит в явном виде от времени. Этой системе соответствуют уравнения в вариациях, позволяющие воспользоваться критерием Гурвица.  $b_{11} + b_{22} < 0$ ;  $b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12} > 0$ , где

$$\left. \begin{aligned} b_{11} &= -j\omega P_0 + 0,5K_{2j}^s + \frac{\partial \Lambda_j^s}{\partial A_j} - \frac{\partial \Lambda_j^s / \partial A_0 - K_j^s}{1 + \partial \Lambda_0 / \partial A_0} \left( \Psi_j + \frac{\partial \Lambda_0}{\partial A_j} \right); \\ b_{12} &= K_0 - j^2 \omega^2 G_0 - \Psi_{2j} + \frac{\partial \Lambda_j^s}{\partial B_j} - \frac{\partial \Lambda_j^s / \partial A_0 + K_j^s}{1 + \partial \Lambda_0 / \partial A_0} \left( \frac{\partial \Lambda_0}{\partial B_j} + 0,5K_j^s \right); \\ b_{21} &= -K_0 + j^2 \omega^2 G_0 + \Psi_{2j} - \frac{\partial \Lambda_j^c}{\partial A_j} + \frac{\partial \Lambda_j^c / \partial A_0 + K_j^c}{1 + \partial \Lambda_0 / \partial A_0} \left( \Psi_j + \frac{\partial \Lambda_0}{\partial A_j} \right); \\ b_{22} &= -j\omega P_0 - 0,5K_{2j}^s - \frac{\partial \Lambda_j^c}{\partial B_j} + \frac{\partial \Lambda_j^c / \partial A_0 + K_j^c}{1 + \partial \Lambda_0 / \partial A_0} \left( \frac{\partial \Lambda_0}{\partial B_j} + 0,5K_j^s \right). \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

3. На основании (5–8) могут быть исследованы колебания при одновременном силовом и параметрическом возбуждении. Анализ некоторых характерных динамических режимов произведем на примере цикловых механизмов с бигармонической функцией положения в зоне  $\omega \approx 0,5\sqrt{K_0/G_0}$  ( $j = 2$ ). Этой зоне обычно соответствует наиболее сильная гармоника возбуждения  $Q(t)$ .

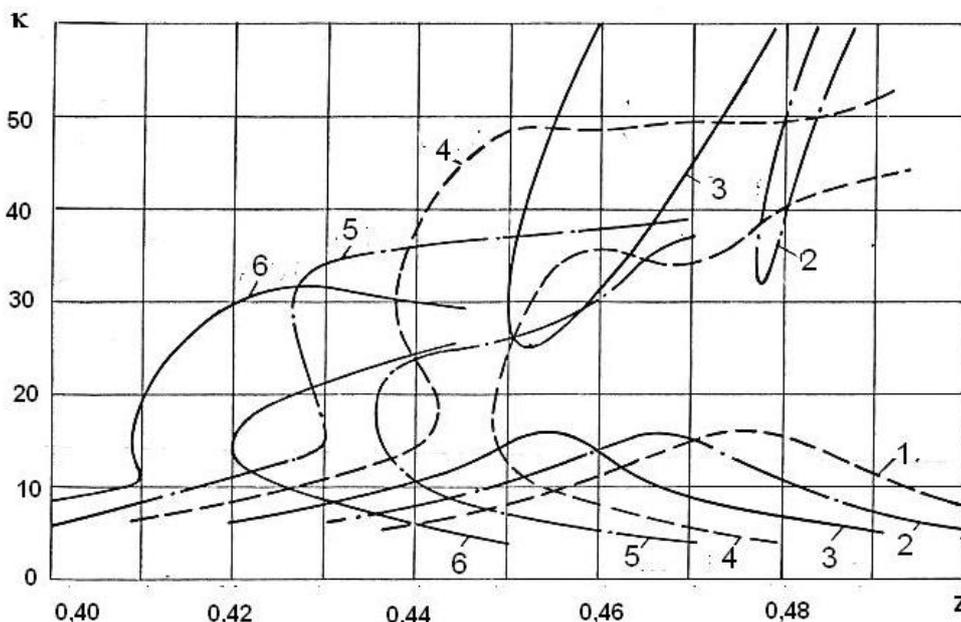
Пусть функция положения  $\Pi(\varphi)$  точно или приближенно описывается следующим образом:

$$\Pi(\varphi) = 0,5\Pi_{\max} [1 - \cos \varphi + 0,25\xi(1 - \cos 2\varphi)]. \quad (10)$$

Зависимость (10) отвечает обширному классу механизмов. Сюда можно отнести аксиальный эксцентриковый механизм, кривошипно-ползунный и кривошипно-коромысловые механизмы, кулачковый механизм с гармоническим законом движения без выстоев и др. Для некоторых рычажных механизмов  $\xi = r/l$ , где  $r, l$  соответственно длина кривошипа и шатуна. На рис.2 приведены графики семейства безразмерных амплитудно-частотных характеристик  $\kappa(z)$ , где  $z = \omega/\sqrt{K_0}$  при варьировании параметром  $\lambda = \Pi'_{\max} / \sqrt{J_2/(J_3 + J_4)}$ . По существу, применительно к нелинейной системе применен прием, который был предложен для линейных систем Релеем [ 8, 9 ]. Граница динамической устойчивости разделяет область затухающих свободных колебаний и зону раскачки, поэтому на самой границе может быть принят стационарным. Анализ устойчивости именно этого режима с позиций исследуемой задачи не представляет интереса.

Как следует из анализа графиков, при малых значениях параметра  $\lambda$  кривые функции  $\kappa(z)$  практически совпадают с соответствующим результатом, полученным для вынужденных колебаний в линейной системе. В частности,  $\kappa_{\max} \approx 1/(2\delta)$ , где  $\delta = \vartheta/(2\pi)$  – коэффициент диссипации;  $\vartheta$  – логарифмический декремент (в рассматриваемом случае принято  $\delta = 0,03$ ). С ростом  $\lambda$  появляются свойственные нелинейным системам дополнительные

периодические режимы при повышенном уровне  $\kappa$ , которым отвечают кривые «пикирующие» сверху на вершину соответствующей резонансной кривой.



**Рис.2** Графики амплитудно-частотных характеристик

1.  $\lambda = 0,45$ ; 2.  $\lambda = 0,55$ ; 3.  $\lambda = 0,65$ ; 4.  $\lambda = 0,75$ ; 5.  $\lambda = 0,85$ ; 6.  $\lambda = 0,95$

Дальнейшее увеличение параметра  $\lambda$  приводит к смыканию обеих кривых, образуя амплитудно-частотную характеристику с несколькими точками перегиба. При этом четко появляется одно из свойств нелинейных систем – «затягивание» резонансной зоны, в результате чего частотный диапазон с большими амплитудами может существенно возрасти. Неустойчивая ветвь резонансной кривой занимает промежуточное положение между двумя устойчивыми ветвями и является границей областей притяжения к одному из крайних устойчивых режимов.

В заключение подчеркнем, что кинематические нелинейности могут вызывать возникновение весьма интенсивных колебаний, при которых не исключена возможность аварий. Устранение подобных режимов достигается коррекцией параметра  $\lambda$ .

### Список литературы

1. Колчин Н.И. Механика машин. Т. 1. -М., Л. : Машгиз, 1971. – 560 с.
2. Бежанов Б.Н., Бушунов В.Т. Производственные машины-автоматы. - М., Л.: Машгиз, 1973. - 365 с.
3. Вульфсон И.И., Коловский М.З. Нелинейные задачи динамика машин.– Л.: Машиностроение, 1968. – 284 с.
4. Вульфсон И.И. Динамические расчеты цикловых механизмов. – Л.: Машиностроение, 1976. – 328 с.
5. Вульфсон И.И. Колебания машин с механизмами циклового действия. – Л.: Машиностроение, 1990. – 309 с.

6. Вульфсон И. И. Динамика цикловых машин. – СПб.: Политехника, 2013. – 425 с.
7. Вульфсон И. И. Нелинейные резонансные колебания привода на частоте амплитудной модуляции высокочастотного возбуждения//Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2005. - №6.– С.17–22.
8. Стретт Дж. В. Теория звука. Т 1. - М.: Гостехиздат, 1955. – 504 с.
9. Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем.

Дата поступления: 14 августа 2018 г.