

УДК 534.1

## НЕЛИНЕЙНЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ В ГИБКОЙ НАПРАВЛЯЮЩЕЙ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕЙ С УПРУГО-ИНЕРЦИОННЫМ ОСНОВАНИЕМ

© Владимир Иванович Ерофеев, Даниил Александрович Колесов,  
Анна Викторовна Леонтьева

*Институт проблем машиностроения РАН – филиал Федерального государственного бюджетного научного учреждения «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики Российской академии наук» (ИПМ РАН), Нижний Новгород, Россия*  
[erof.vi@yandex.ru](mailto:erof.vi@yandex.ru)

**Аннотация.** В настоящей работе рассматривается динамическая задача для системы, состоящей из одномерной гибкой направляющей (струна), лежащей на упруго-инерционном основании. Система уравнений динамики сводится к одному кубично-нелинейному уравнению четвертого порядка относительно поперечных смещений струны. В зависимости от соотношения масс струны и упруго-инерционного основания, эволюционное уравнение имеет три предельных случая: модифицированное уравнение Островского, уравнение Римана с кубической нелинейностью, уравнение ангармонического осциллятора с кубической нелинейностью. В каждом случае изучаются особенности распространения нелинейных периодических волн.

**Ключевые слова:** гибкая направляющая, упруго-инерционное основание, поперечная волна, эволюционное уравнение.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 14-19-01637).

## NONLINEAR PERIODIC WAVES IN A FLEXIBLE GUIDE INTERACTING WITH AN ELASTIC-INERTIAL FOUNDATION

© V.I. Erofeev, D.A. Kolesov, A.V. Leonteva

*Mechanical Engineering Research Institute of RAS, Nizhny Novgorod, Russia*  
[erof.vi@yandex.ru](mailto:erof.vi@yandex.ru)

**Abstract.** In this paper we consider a dynamic problem for a system consisting of a one-dimensional flexible guide (a string) resting on an elastic-inertial foundation. System of the equations of dynamics is reduced to one fourth-order cubic-nonlinear equation relative to transverse displacements of the string. Depending on the string and the elastic-inertial foundation mass ratio, the evolutionary equation has the following three extreme events: the modified Ostrovsky equation, the Riemann equation with a cubic nonlinearity, the equation for an anharmonic oscillator with a cubic nonlinearity. In each case, the features of the propagation of nonlinear periodic waves are studied.

**Keywords:** flexible guide, elastic-inertial foundation, transverse wave, evolutionary equation.

**Acknowledgements.** The work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 14-19-01637).

Многие элементы машиностроительных конструкций, в частности, несущих движущиеся нагрузки (путевая структура, контактный провод) рассматриваются в виде одномерной системы (струна, балка), взаимодействующей с деформируемым основанием. Для расчета конструкций, лежащих на грунте, в основном, используются три модели основания: 1) винклерова модель; 2) модель упругого полупространства; 3) комбинированная модель упругого основания.

Наиболее приемлемой для практических целей моделью является винклерово основание, поскольку результаты расчета конструкций с использованием этой модели близко соответствуют опытным данным [1].

При исследовании движения нагрузок вдоль одномерных упругих систем основание задается линейно-упругим (основание Винклера) или вязкоупругим, что позволяет учитывать возможность его сопротивления силовому воздействию. При этом основание как динамическая система, как правило, не рассматривается.

А.И. Весницкий [2] предложил математическую модель, обобщающую модель Винклера путем учета инерционности упругого основания, с которым взаимодействует струна, совершающая малые поперечные колебания.

Дисперсионные свойства рассматриваемой системы и особенности генерации в ней волн движущимся источником изучались в работах [3-6].

Распространение поперечных волн конечной амплитуды в струне, лежащей на упруго-инерционном основании, описывается нелинейной системой двух дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - c_v^2 \left( 1 + \frac{3}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\gamma}{\rho_0 S} (u_1 - u_2) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \frac{2\gamma}{\rho_g} u_2 = \frac{\gamma}{\rho_g} u_1, \quad (2)$$

где  $u_1(x, t)$ ,  $u_2(x, t)$  – поперечные отклонения струны и средней линии основания от равновесного положения,  $\rho_0$ ,  $S$  – объемная плотность и площадь поперечного сечения одномерной гибкой нерастяжимой струны,  $\gamma$ ,  $\rho_g$  – жесткость и погонная масса упруго-инерционного основания,  $c_v = \sqrt{N/(\rho_0 S)}$  – скорость распространения поперечных волн в струне в отсутствие упруго-инерционного основания. В начальный момент времени сила натяжения струны равна  $N$  и положение струны совпадает с осью  $x$ .

Первое уравнение системы описывает волны, распространяющиеся вдоль струны, второе – динамику упруго-инерционного основания, взаимодействующего со струной.

Система уравнений (1), (2) сводится к одному уравнению относительно поперечных смещений струны:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} - a_2 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + a_3 \frac{\partial^4 U}{\partial \tau^4} - a_4 \frac{\partial^4 U}{\partial \tau^2 \partial z^2} + a_5 U - a_6 \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - a_7 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left( \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) = 0, \quad (3)$$

где  $U = u_1/u_0$  – безразмерное перемещение,  $z = x/X$ ,  $\tau = t/T$  – безразмерные величины координаты и времени, характерные величины приняты равными

$$T^2 = \frac{\varepsilon \rho_g}{\gamma} \left( 1 + \frac{2\rho_0 S}{\rho_g} \right), \quad X^2 = \frac{2\varepsilon}{\gamma} \rho_0 S c_v^2,$$

$a_i$  ( $i = 2..7$ ) – безразмерные комплексы

$$a_2 = 1, a_3 = \frac{\rho_0 S}{\varepsilon \rho_g \left(1 + \frac{2\rho_0 S}{\rho_g}\right)^2}, a_4 = \frac{1}{2\varepsilon \left(1 + \frac{2\rho_0 S}{\rho_g}\right)},$$

$$a_5 = \varepsilon, a_6 = \frac{3u_0^2 \gamma}{4\varepsilon \rho_0 S c_v^2}, a_7 = \frac{3u_0^2 \gamma}{8\varepsilon^2 \rho_0 S c_v^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{2\rho_0 S}{\rho_g}\right)},$$

причем  $a_7 = \frac{a_4 a_6}{a_2}$ .

Полагая далее нелинейность малой, рассмотрим различные случаи соотношений массы струны  $\rho_0 S$  и погонной массы упруго-инерционного основания  $\rho_g$ .

Если погонная масса струны существенно превосходит погонную массу упруго-инерционного основания ( $\rho_0 S \gg \rho_g$ ), то можно считать, что  $\frac{1}{\left(1 + 2\rho_0 S / \rho_g\right)} \sim \varepsilon^2$ , нелинейность

при этом считаем малой величиной второго порядка  $\frac{3u_0^2 \gamma}{4\rho_0 S c_v^2} \sim \varepsilon^2$ . Ограничиваясь слагаемыми первого порядка малости, уравнение (3) принимает вид

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} - a_2 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - a_4 \frac{\partial^4 U}{\partial \tau^2 \partial z^2} + a_5 U - a_6 \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0. \quad (4)$$

Если погонные массы струны и основания имеют один порядок  $\frac{\rho_0 S}{\rho_g} \sim 1$ , а нелинейность

имеет первый порядок малости  $\frac{3u_0^2 \gamma}{4\rho_0 S c_v^2} \sim \varepsilon$ , то уравнение (3) в нулевом приближении по малому параметру будет иметь вид:

$$a_3 \frac{\partial^4 U}{\partial \tau^4} - a_4 \frac{\partial^4 U}{\partial \tau^2 \partial z^2} - a_7 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left( \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) = 0. \quad (5)$$

После двукратного интегрирования по безразмерному времени (константы интегрирования полагаем нулевыми) уравнение (5) преобразуется к волновому уравнению, содержащему кубическую нелинейность

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} - b_1 \left(1 + b_2 \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right) \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0, \quad (6)$$

где  $b_1 = \frac{a_4}{a_3}$ ,  $b_2 = \frac{a_7}{a_4}$ .

Если масса струны существенно уступает массе упруго-инерционного основания ( $\rho_0 S \ll \rho_g$ ), то будем считать, что  $\frac{\rho_0 S}{\rho_g} \sim \varepsilon^2$ ,  $\frac{3u_0^2 \gamma}{4\rho_0 S c_v^2} \sim \varepsilon^2$ . В этом случае уравнение (3), с учетом

слагаемых до первого порядка малости включительно, примет вид:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} - a_2 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - a_4 \frac{\partial^4 U}{\partial \tau^2 \partial z^2} - a_7 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left( \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) = 0. \quad (7)$$

Перейдем в уравнении (4) в движущуюся систему координат  $\xi = z - \sqrt{a_2} \tau$ ,  $\eta = \varepsilon \tau$ . Получим в первом приближении по  $\varepsilon$  эволюционное уравнение относительно  $W = \frac{\partial U}{\partial \xi}$ :

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial W}{\partial \eta} + b_1 W^2 \frac{\partial W}{\partial \xi} + b_2 \frac{\partial^3 W}{\partial \xi^3} \right) - b_3 W = 0. \quad (8)$$

где коэффициенты уравнения равны  $b_1 = \frac{a_6}{2\varepsilon\sqrt{a_2}}$ ,  $b_2 = \frac{\sqrt{a_2}a_4}{2\varepsilon}$ ,  $b_3 = \frac{a_5}{2\varepsilon\sqrt{a_2}}$ .

Заметим, что это уравнение очень похоже на нелинейное эволюционное уравнение для внутренних волн во вращающемся океане

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial U}{\partial \eta} + \frac{3c_0}{2h} U \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{c_0\beta}{6} \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} \right) = \frac{\Omega^2}{2c_0} U, \quad (9)$$

где  $U$  – возмущение свободной поверхности жидкости,  $h$  – глубина,  $c_0$  – скорость распространения возмущения,  $\beta$  – параметр высокочастотной дисперсии,  $\Omega$  – параметр Кориолиса, характеризующий вращение жидкости.

Впервые уравнение (9) было выведено в 1978 г. Л.А. Островским [7] и называется уравнением Островского. При  $\Omega = 0$  уравнение (9) сводится к уравнению Кортевега – де Вриза (КдВ), но, в отличие от последнего, оно не интегрируется методом обратной задачи рассеяния и не имеет точных солитонных решений.

Как отмечалось в [8], уравнение Островского имеет отношение к широкому кругу нелинейных систем, характеризующихся наличием бездисперсионной полосы в спектре частот, разделяющей области с низко- и высокочастотной дисперсиями. Примерами таких систем могут служить необыкновенные электромагнитные и косые магнитозвуковые волны в замагниченной плазме; возмущения в цепочке атомов, описываемые моделью Френкеля – Конторовой; волны в линиях передачи типа полосового фильтра.

Уравнение (8), в отличие от уравнения Островского (9) содержит не квадратичную, а кубическую нелинейность. Видно, что при  $b_3 = 0$  уравнение (8) сводится к модифицированному уравнению Кортевега – де Вриза (мКдВ), которое, как известно, отличается от уравнения КдВ более высокой степенью нелинейности. Поскольку, классическое уравнение Островского под знаком производной содержит уравнение КдВ, можно, по аналогии с уравнениями КдВ, назвать уравнение (8) модифицированным уравнением Островского. В работе [9] уравнение Бюргерса с кубической нелинейностью называется модифицированным уравнением Бюргерса. Однако понятие "модифицированное" в случае уравнения КдВ имеет несколько иное значение и связано с наличием преобразования Миуры [10], которое переводит решения модифицированного уравнения в решения классического уравнения. Похожих преобразований относительно классических и модифицированных уравнений Бюргерса и Островского пока не найдено.

Известно, что уравнение Островского не имеет точных решений [11], но допускает качественное исследование при равенстве нулю старшей производной [12]. Уравнение (8) также не имеет точных решений. Рассмотрим модифицированное уравнение Островского при  $b_2 = 0$ :

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial W}{\partial \eta} + b_1 W^2 \frac{\partial W}{\partial \xi} \right) - b_3 W = 0. \quad (10)$$

Далее проанализируем стационарные решения уравнения (10), полагая  $\chi = \xi - v\eta$  ( $v > 0$ ). Уравнение фазовых траекторий имеет вид:

$$\left(\frac{dW}{d\chi}\right)^2 = \frac{b_3}{2b_1} + \frac{C_0}{(b_1W^2 - v)^2}, \quad (11)$$

где  $C_0$  – константа интегрирования. Уравнение (11) имеет асимптоты:  $W = \pm\sqrt{\frac{v}{b_1}}$ ,

$\frac{dW}{d\chi} = \pm\sqrt{\frac{b_3}{2b_1}}$ . Фазовые портреты будут качественно отличаться в зависимости от значений

коэффициентов уравнения. Для изучаемой механической системы коэффициенты имеют следующий вид

$$b_1 = \frac{3u_0^2\gamma}{8\varepsilon^2\rho_0Sc_v^2} > 0, \quad b_3 = \frac{1}{2} > 0,$$

соответствующий фазовый портрет изображен на рис. 1. Пунктиром на рисунке отмечены асимптоты. Из рисунка видно, что в системе есть ограниченные движения. Уравнение (8) имеет решение в виде периодической стационарной волны.

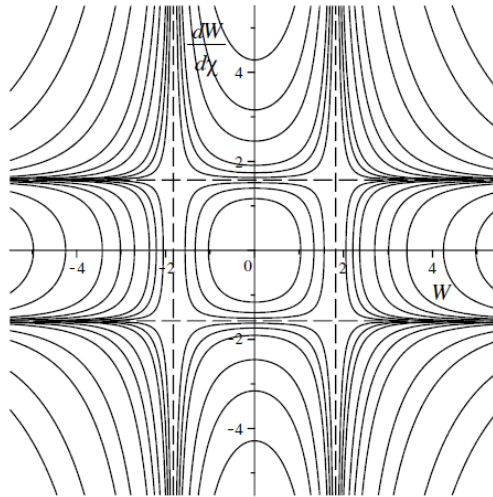


Рис. 1. Фазовый портрет  $\left(W, \frac{dW}{d\chi}\right)$  ( $b_1 > 0, b_3 > 0$ )

Перейдем в уравнении (6) в движущуюся систему координат  $\xi = z - \sqrt{b_1}\tau, \eta = \varepsilon\tau$ . Получим в первом приближении по  $\varepsilon$  эволюционное уравнение относительно  $W = \frac{\partial U}{\partial \xi}$ :

$$\frac{\partial W}{\partial \eta} + dW^2 \frac{\partial W}{\partial \xi} = 0, \quad (12)$$

где  $d = \frac{\sqrt{b_1b_2}}{2\varepsilon} = \frac{3u_0^2\gamma}{8\varepsilon^2\rho_0Sc_v^2} \sqrt{1 + \frac{\rho_g}{2\rho_0S}}$ . Уравнение (12) можно классифицировать как уравнение Римана с кубической нелинейностью.

Уравнение (12) относится к квазилинейным дифференциальным уравнениям с частными производными и может быть решено методом характеристик [13, 14]. Заменой переменной уравнение (12) преобразуется к виду

$$\frac{\partial W}{\partial \eta} + W^2 \frac{\partial W}{\partial \xi} = 0. \quad (13)$$

Если в качестве начального условия задать гауссов импульс

$$W(\xi, 0) = k_1 \exp(-k_2 \xi^2), \quad (14)$$

то решение уравнения (13) и уравнение характеристик принимают вид:

$$W(\xi, \eta) = k_1 \exp(-k_2 (\xi - W^2 \eta)^2), \quad (15)$$

$$\xi = \chi + k_1^2 \exp^2(-k_2 \xi^2) \eta, \quad (16)$$

где  $\chi$  – параметр уравнения, при изменении которого получаем множество характеристических прямых в плоскости  $(\xi, \eta)$ .

Поверхность волны (15) и ее профили в разные моменты времени изображены на рис. 2, 3. Поверхность волны классического уравнения Римана  $V_\eta + VV_\xi = 0$  (уравнение простой волны) с таким же начальным условием (14) и ее профили представлены на рис. 4, 5. Из рисунков видно, что у волны описываемой уравнением (13), как и волны Римана, происходит опрокидывание.

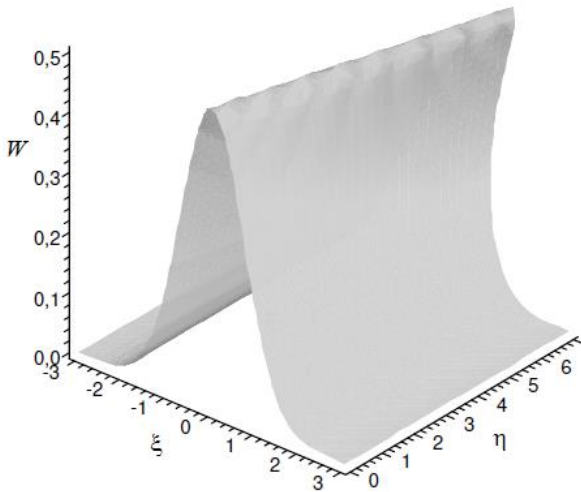


Рис. 2. Поверхность волны  $W(\xi, \eta)$

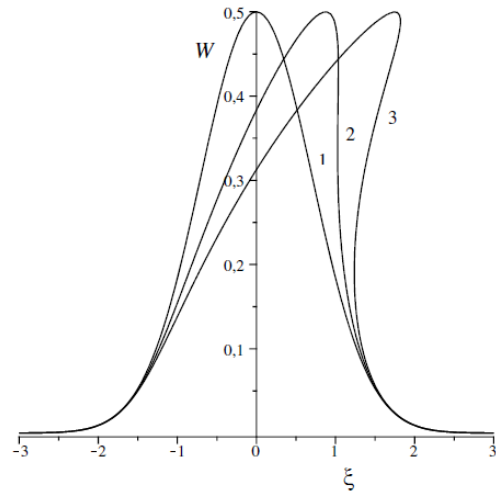


Рис. 3. Профили волны  $W(\xi, \eta_1)$  (1),  $W(\xi, \eta_2)$  (2),  $W(\xi, \eta_3)$  (3) ( $\eta_1 < \eta_2 < \eta_3$ )

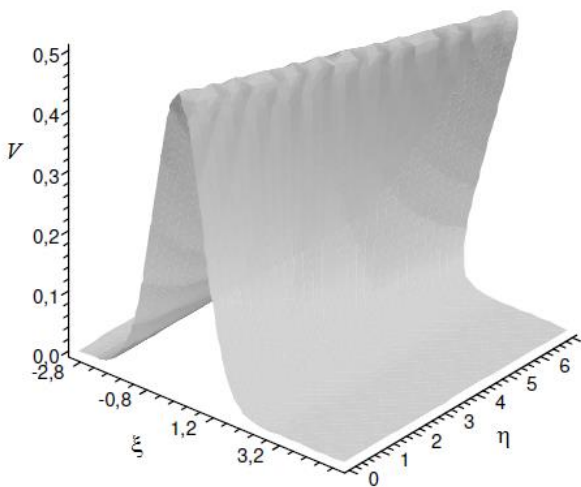


Рис. 4. Поверхность волны Римана

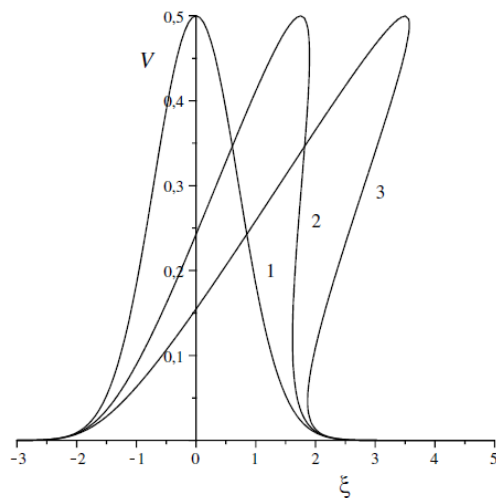


Рис. 5. Профили волны Римана в моменты времени  $\eta_1$  (1),  $\eta_2$  (2),  $\eta_3$  (3)

Момент времени, в который первый раз пересекаются характеристические прямые (16), равен  $t^* = \frac{1}{2k_1^2} \sqrt{\frac{\exp(1)}{k_2}}$ . Отношение времён опрокидывания равно  $t_R^*/t^* = \sqrt{2}k_1$ , где  $t_R^*$  – время опрокидывания волны Римана. Из этого отношения следует, что время опрокидывания волны Римана больше времени опрокидывания волны  $W(\xi, \eta)$  ( $t_R^* > t^*$ ) при  $k_1 > \sqrt{2}/2$ , время опрокидывания волны Римана меньше ( $t_R^* < t^*$ ) – при  $k_1 < \sqrt{2}/2$  и времена опрокидывания волн равны ( $t_R^* = t^*$ ) при  $k_1 = \sqrt{2}/2$ .

Таким образом, показано, что величина амплитуды начального возмущения влияет на момент времени опрокидывания и скорость распространения волны. Если амплитуда волны в начальный момент времени больше (меньше) некоторого критического значения, то опрокидывание волны Римана происходит позднее (раньше) по сравнению с волной, описываемой уравнением Римана с кубической нелинейностью.

Отыскивая решение уравнения (7) в виде бегущей стационарной волны  $U = U(\chi)$ , где  $\chi = z - Vt$ , перейдем к обыкновенному дифференциальному уравнению четвертого порядка

$$2\varepsilon(1 - V^2) \frac{d^2U}{d\chi^2} + V^2 \frac{d^2}{d\chi^2} \left[ \left( 1 + \frac{3u_0^2\gamma}{4\varepsilon\rho_0 S c_v^2} \left( \frac{dU}{d\chi} \right)^2 \right) \frac{d^2U}{d\chi^2} \right] = 0.$$

Это уравнение можно дважды проинтегрировать по  $\chi$ , если константы интегрирования считать равными нулю, то оно преобразуется к виду:

$$\frac{d^2U}{d\chi^2} + d_1U - d_2U \left( \frac{dU}{d\chi} \right)^2 = 0, \tag{17}$$

где  $d_1 = \frac{2\varepsilon(1 - V^2)}{V^2}$ ,  $d_2 = d_1b$ ,  $b = \frac{3u_0^2\gamma}{4\varepsilon\rho_0 S c_v^2} > 0$ , здесь  $V$  – скорость нелинейной волны.

Уравнение (17) описывает колебания ангармонического осциллятора с кубической нелинейностью. Фазовые портреты для случаев  $V > 1$  и  $V < 1$  изображены на рис. 6, 7. На фазовых плоскостях присутствуют прямые разделяющие движения (асимптоты):

$$\frac{dU}{d\chi} = \pm \sqrt{\frac{d_1}{d_2}} \quad (\text{на рисунке отмечены пунктиром}).$$

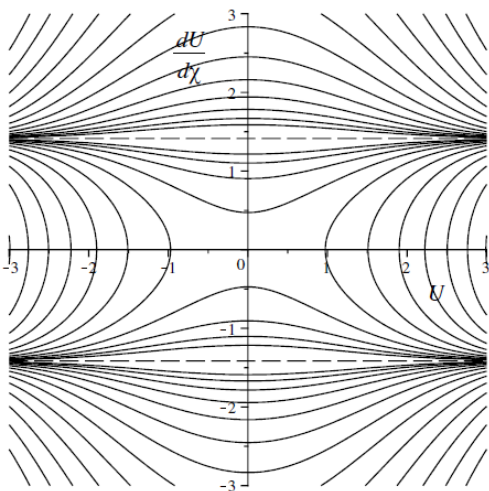


Рис. 6. Фазовый портрет  $\left( U, \frac{dU}{d\chi} \right)$  при  $V > 1$

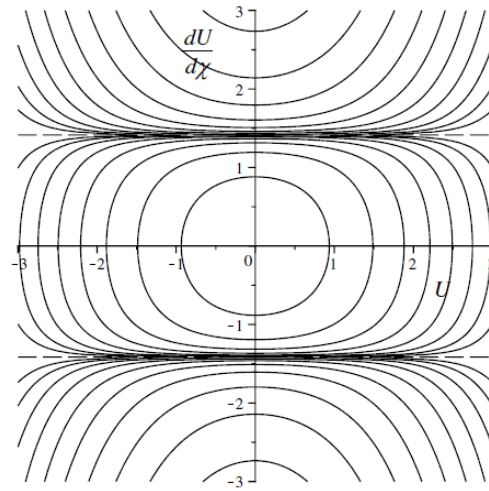


Рис. 7. Фазовый портрет  $\left( U, \frac{dU}{d\chi} \right)$  при  $V < 1$

Из анализа фазовых портретов следует, что в сверхзвуковом случае нелинейные волны не распространяются. В дозвуковом случае существуют только нелинейные периодические (квазигармонические, кноидальные) волны, уединенных волн нет.

### Список литературы

1. Клепиков С.Н. Расчет конструкций на упругом основании. – Киев: Будивэльник, 1967. – 185 с.
2. Весницкий А.И. Волны в системах с движущимися границами и нагрузками. – М.: Физматлит, 2001. – 320 с.
3. Ерофеев В.И., Колесов Д.А., Лисенкова Е.Е. Расчет дисперсионных характеристик струны, лежащей на упруго-инерционном основании // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. – 2013. - № 4 (1). – С.199-203.
4. Ерофеев В.И., Колесов Д.А., Лисенкова Е.Е. Исследование волновых процессов в одномерной системе, лежащей на упруго-инерционном основании, с движущейся нагрузкой // Вестник научно-технического развития. – 2013. - № 6 (70). – С.18-29.
5. Ерофеев В.И., Колесов Д.А., Лисенкова Е.Е. Генерация волн источником, движущимся по деформируемой направляющей, лежащей на упруго-инерционном основании // Машиностроение и инженерное образование. – 2013. - № 4(1). – С.199-203.
6. Ерофеев В.И., Колесов Д.А., Лисенкова Е.Е. Особенности генерации волн источником, движущимся по одномерной гибкой направляющей, лежащей на упруго-инерционном основании // Акустический журнал. - 2016. – Т. 62, № 6. – С. 639-647.
7. Островский Л.А. Нелинейные внутренние волны во вращающемся океане // Океанология. - 1978. – Т. 18, №2. – С. 181-191.
8. Островский Л.А., Степанянц Ю.А. Нелинейные волны во вращающейся жидкости // Нелинейные волны: физика и астрофизика. – М.: Наука, 1993. – С.132-153.
9. Селезов И.Т., Корсунский С.В. Нестационарные и нелинейные волны в электропроводящих средах. – Киев: Наукова думка, 1991. – 200 с.
10. Кудряшов Н.А. Методы нелинейной математической физики: Учебное пособие. – Долгопрудный: Интеллект, 2010. – 368 с.
11. Гандариас М.Л., Брузон М.С. Симметричный анализ и точные решения для некоторых уравнений Островского // Теоретическая и математическая физика. - 2011. – Т. 168, № 1. – С. 49-64.
12. Stepanyants Y.A. On stationary solutions of the reduced Ostrovsky equation: Periodic waves, compactons and compound solitons // Chaos, Solitons and Fractals. - 2006. – Vol. 28. – P. 193-204.
13. Узем Дж. Линейные и нелинейные волны. – М.: Мир, 1977. – 622 с.
14. Рыскин Н.М., Трубецков Д.И. Нелинейные волны. – М.: Ленанд, 2017. – 312 с.

*Дата поступления: 30 апреля 2018 г.*