

УДК 534.1, 621.1

## КОЛЕБАНИЯ ПЛАВАЮЩИХ ЭЛЕМЕНТОВ РОТОРНОЙ СИСТЕМЫ ПРИ ИХ ОБЕГАНИИ ВОКРУГ РОТОРА

© Людмила Яковлевна Банах, Ольга Владимировна Бармина

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки

Институт машиноведения им. А.А. Благонравова Российской академии наук, Москва, Россия

[banl@inbox.ru](mailto:banl@inbox.ru)

**Аннотация.** Рассматриваются колебания роторной системы при вращении ротора внутри легких подвижных элементов, например, внутри плавающих уплотнительных колец, внутри гидростатических подшипников с плавающей втулкой. При этом возникают колебания кольца, во время которых оно вращается вокруг ротора, а в случае постоянного контакта с ним «обегает» ротор в режиме прямой прецессии (колебания типа «хула-хуп»). Исследуются колебания в системе «ротор - плавающее кольцо» с учетом сил, действующих в зазоре между ротором и кольцом: гидродинамических сил в зазоре, а также контактных сил сухого трения. Получено уравнение движения кольца в режиме обегания, найдено его решение в аналитическом виде. Показано, что скорость прямой прецессии кольца при обегании близка к его собственной частоте. Построены траектории движения кольца.

**Ключевые слова:** ротор, плавающее кольцо, режим обегания, прямая прецессия.

## OSCILLATIONS OF FLOATING ELEMENTS IN THE ROTOR SYSTEM WHEN THEY ARE RUNNING AROUND THE ROTOR

© Banakh L.Ya., Barmina O.V.

Blagonravov Mechanical Engineering Research Institute of RAS, Moscow, Russia

[banl@inbox.ru](mailto:banl@inbox.ru)

**Abstract.** The oscillations of the rotor system are considered when the rotor rotates inside lightweight movable elements, for example, inside the floating sealing rings, inside the hydrostatic bearings with floating sleeves. In this case, there are oscillations of the ring, during which it rotates around the rotor, and in the case of constant contact with it, the rotor "runs around" in the regime of forward whirling ("hula-hoop" type oscillations). The oscillations in the "rotor-floating ring" system are studied taking into account the forces acting in the clearance between the rotor and the ring: hydrodynamic forces and also the contact forces of dry friction. The equation of motion of the ring at "running" regime is obtained, its solution is found in an analytical form. It is shown that the speed of the ring forward whirling during its running is close to its natural frequency. The ring motion trajectories constructed.

**Keywords:** rotor, floating ring, running mode, forward whirling.

**Постановка задачи.** В роторных системах нередко возникают такие опасные режимы, как обкатка ротора по неподвижному статору в режиме обратной прецессии, что нередко приводит к аварийным ситуациям. Такие режимы рассматривались в работах [1-7]. Однако не менее опасными могут быть колебания роторной системы при вращении ротора внутри легких подвижных элементов. При постоянном контакте с ними происходит «обегание»

кольца вокруг ротора в режиме прямой прецессии (типа хула-хуп) [2,8-10]. В [11] исследована кинематика таких режимов, возникающих при вращении неуравновешенного ротора внутри плавающего кольца, но без учета силовых факторов, действующих в системе; найдена скорость вращения кольца и его прецессии. В данной статье проводится динамический анализ таких режимов с учетом динамических нагрузок, а именно (рис.1а):

- гидродинамических сил, возникающих в зазоре между ротором и уплотнениями, так как ротор, как правило, вращается в упруго-вязкой среде;

- силы сухого трения в случае контакта кольца с ротором.

Гидродинамические силы включают в себя следующие составляющие:

гидростатическую силу  $\mathbf{P}_1$ , демпфирующую силу  $\mathbf{P}_2$ , циркуляционную силу  $\mathbf{P}^* = -\frac{\omega}{2}\mathbf{P}_2(\omega)$ .

Гидростатическая сила зависит от скорости вращения среды и в нашем случае определяется разностью между скоростями вращения ротора и кольца. Эту силу можно определить из уравнения Рейнольдса. Коэффициент гидростатической жесткости зависит от степени турбулентности течения среды в зазоре и от перепада давления  $\Delta U = U_1 - U_2$  на уплотнительном кольце [12]. Перепад давления пропорционален квадрату частоты вращения

ротора:  $\Delta U = \Delta U_n \frac{\omega^2}{\omega_n^2}$ , поэтому зависимость гидродинамических коэффициентов от угловой

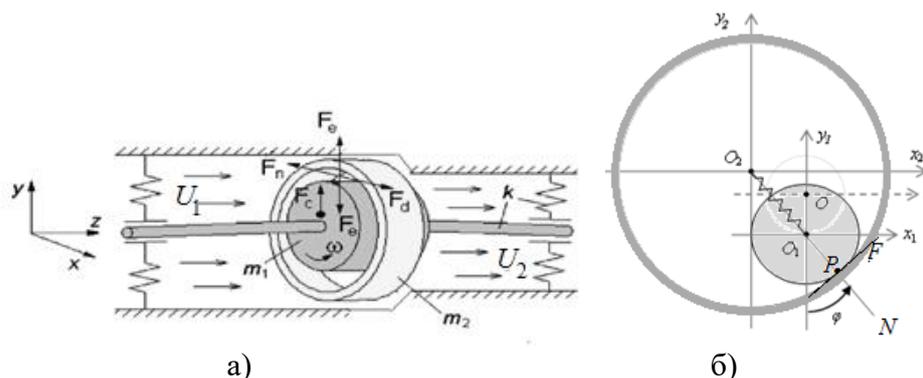
скорости можно принять следующей:

$$P_{10} = P_{1n} \frac{\omega^2}{\omega_n^2}, P_{20} = P_{2n} \frac{\omega}{\omega_n}, P_a = P_{an} \frac{\omega^2}{\omega_n^2}, \quad P = P'_n \frac{\omega^2}{\omega_n^2} = P_n \omega^2, \quad P_n = \frac{P'_n}{\omega_n^2} \quad (1)$$

$P_{1n}, P_{2n}, P_{an}$  - гидродинамические коэффициенты при номинальной скорости вращения.

Гидродинамические силы в линейном приближении пропорциональны относительному смещению и относительной скорости вращения между ротором и кольцом.

При контакте ротора с кольцом в точке Р возникает также сила сухого трения  $F = f N$ , где  $N$  - нормальная реакция, что приводит к проскальзыванию кольца при его вращении вокруг ротора.



**Рис.1.** Вращение ротора внутри плавающего уплотнительного кольца:

а) общий вид системы «ротор - плавающее уплотнительное кольцо», б) динамическая расчетная модель режима обегания плавающего уплотнительного кольца по ротору

**Динамическая модель системы. Уравнение движения.** Динамическая модель для анализа колебаний в системе «ротор-кольцо» представлена на рис.1б:  $O_1$  –геометрический центр ротора,  $O_2$  - геометрический центр кольца,  $O$  – центр вращения. Гидростатическая сила представлена в виде пружины  $O_1O_2$ , кольцо предполагается достаточно жестким. Для вывода уравнений движения запишем векторное равенство, описывающее положение центра кольца (рис.1б):

$$\mathbf{O}_1\mathbf{O}_2 = \mathbf{OO}_1 + \mathbf{OO}_2$$

$$z_{O_2} = x_{O_2} + iy_{O_2} = \delta_0 e^{i\varphi} + ae^{-i\omega t}$$

$$\dot{z}_{O_2} = i\dot{\varphi}\delta_0 e^{i\varphi} - i\omega a e^{-i\omega t}, \quad \ddot{z}_{O_2} = -i\ddot{\varphi}\delta_0 e^{i\varphi} - \dot{\varphi}^2 \delta_0 e^{i\varphi} + \omega^2 a e^{-i\omega t} \quad (2)$$

$a$  - величина дисбаланса,  $\varphi$  - угол между прямой  $O_1O_2$  и вертикалью, он описывает смещение от вертикали относительного перемещения оси «центр ротора - центр кольца»,  $\delta_0 = R - r$  - величина зазора,  $R$  - радиус кольца,  $r$  - радиус ротора. Из (2) имеем:

$$Re(\ddot{z}_{O_2} e^{-i\varphi}) = \ddot{\varphi}\delta_0 + a\omega^2 \sin(\omega t - \varphi), \quad Im(\ddot{z}_{O_2} e^{-i\varphi}) = -\dot{\varphi}^2 \delta_0 - \omega^2 a \cos(\omega t - \varphi)$$

Уравнения движения с учетом гидростатической силы, гидродинамического демпфирования и силы сухого трения примут вид:

$$m\delta_0 \ddot{\varphi} + p_{20} \dot{\varphi} = -ma\omega^2 \sin(\omega t - \varphi) + f(m\delta_0 \dot{\varphi}^2 - p_{10} \delta_0 + ma\omega^2 \cos(\omega t - \varphi)) \quad (3)$$

$$N = m\dot{\varphi}^2 \delta_0 + ma\omega^2 \cos(\omega t - \varphi) - p_{10} \delta_0 \quad (4)$$

$f$  - коэффициент сухого трения между ротором и кольцом,  $m$  - масса кольца,  $N$  - нормальное давление.

Условие безотрывного движения:  $N > 0$ . Как следует из (4), безотрывное движение может возникнуть только при достижении определенного соотношения между скоростью вращения и скоростью прецессии:

$$a/\delta_0 + p_{1n}/m < \dot{\varphi}^2 / \omega^2,$$

$\omega_0^2 = p_{10}/m = p_{1n}\omega^2/m$  - собственная частота кольца, обусловленная действием гидростатической силы. При отсутствии контакта ротора с кольцом в уравнении (3) пропадает член с коэффициентом  $f$ , описывающий, сухое трение.

Уравнения движения (3) отличаются от уравнений, описывающих режим обкатки [2,3] только знаком при  $\varphi$ , поэтому используем для их решения методы, примененные в [2].

### Определение скорости прецессии кольца.

В уравнении (3) первый член правой части входит с малым коэффициентом трения  $f$ , однако второй член, несмотря на то, что  $a$  мало, может и не быть малым, так как отношение  $a/\delta_0$ , вообще говоря, не мало. Поэтому уравнение (3) существенно-нелинейное. Но, тем не менее, его удастся свести к уравнению с малым параметром при нелинейных членах с помощью ряда замен переменных.

Обозначим:  $\omega t = \tau$ ,  $\psi = \varphi + \gamma$ ,  $\gamma$  - угол трения,  $tg \gamma = f$ . Так как  $\gamma = const$ , то  $\dot{\varphi} = \dot{\psi}$ . Положим далее

$$\tau - \psi = u, \quad \frac{d\psi}{d\tau} = \frac{du}{d\tau} - 1, \quad \frac{d^2\psi}{d\tau^2} = \frac{d^2u}{d\tau^2},$$

Тогда уравнение (3) примет вид:

$$\frac{d^2u}{d\tau^2} + p_2 \left( \frac{du}{d\tau} - 1 \right) = f \left( \left( \frac{du}{d\tau} - 1 \right)^2 - \frac{p_{10}}{m\omega^2} \right) - \frac{a}{\delta} \sin u, \quad \delta = \delta_0 \sqrt{1 + f^2}, \quad p_2 = \frac{p_{20}}{m\delta\omega}$$

Полагая  $\frac{du}{d\tau} = w$ , получим:  $\frac{d^2u}{d\tau^2} = w \frac{dw}{du} = \frac{1}{2} \frac{d(w^2)}{du}$ , откуда

$$\frac{1}{2} \frac{d(w^2)}{du} + p_2(w-1) = f\left((w-1)^2 - \frac{P_{10}}{m\omega^2}\right) - \frac{a}{\delta} \sin u \quad (5)$$

Обозначая  $w^2 = s$ , получим из (5):

$$\frac{ds}{du} + 2p_2(\sqrt{s}-1) - 2f\left((\sqrt{s}-1)^2 - \frac{P_{10}}{m\omega^2}\right) = -2\frac{a}{\delta} \sin u \quad (6)$$

Уравнение (6) теперь квазилинейное, так как нелинейные члены, относящиеся к новой переменной  $s$ , входят в (6) с малыми коэффициентами  $p_2, f$ . Поэтому его можно решать методом малого параметра, полагая решение в виде:

$$s = s_0(u) + 2\mu s_1(u) + (2\mu)^2 s_2(u) + \dots, \quad \mu = \max(p_2, f) \quad (7)$$

Порождающее решение:

$$s_0(u) = 2\frac{a}{\delta} \cos u + K, \quad (8)$$

постоянная  $K$  определяется из условий периодичности первого приближения  $s_1(u)$ . Так как  $s = (1 + \psi^2) > 0$ , то для существования решения  $s(u)$  необходимо иметь:

$$K > 2\frac{a}{\delta} \quad (9)$$

Подставляя (7), (8) в (6) и приравнивая члены при первых степенях  $\mu$ , получим уравнение для  $s_1(u)$ :

$$\begin{aligned} \frac{ds_1(u)}{du} &= -(\sqrt{s_0(u)} - 1) + \left[ (\sqrt{s_0(u)} - 1)^2 - \frac{P_1}{m\omega^2} \right] = \\ &= 2\frac{a}{\delta} \cos u + K - 3\sqrt{2\frac{a}{\delta} \cos u + K} + 2 - \frac{P_1}{m\omega^2} \end{aligned}$$

Интегрируя, находим:

$$s_1(u) = 2\frac{a}{\delta} \sin u + (K + 2 - \frac{P_1}{m\omega^2})u - 3 \int \sqrt{2\frac{a}{\delta} \cos u + K} du + L \quad (10)$$

$L$  – произвольная постоянная, которую можно найти из условия периодичности второго приближения. Интеграл в правой части (10) сводится к эллиптическому. Действительно:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{2\frac{a}{\delta} \cos u + K} du &= \int \sqrt{K + 2\frac{a}{\delta} (1 - \sin^2 \frac{u}{2})} du = \\ &= \sqrt{K + 2\frac{a}{\delta}} \int \sqrt{1 - \frac{4a/\delta}{K + 2a/\delta} \sin^2 u} du = 2\sqrt{K + 2\frac{a}{\delta}} \int \sqrt{1 - k^2 \sin^2 q} dq, \end{aligned} \quad (11)$$

$$q = \frac{u}{2}, \quad k^2 = \frac{4a/\delta}{K + 2a/\delta} < 1 \quad \text{так как } K > 2\frac{a}{\delta}$$

$\int \sqrt{1 - k^2 \sin^2 q} dq = E(q, k)$  - эллиптический интеграл II рода. Условия периодичности  $s_1(u)$  найдем, разлагая  $E(q, k)$  в ряды [13]:

$$E(q, k) = E_1 q + E_2 \sin 2q + E_3 \sin 4q + \dots = E_1 \frac{u}{2} + E_2 \sin u - E_3 \sin 2u + \dots$$

$$E_1 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{k^4}{3} - \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \frac{k^6}{5} - \dots = (1 - 0.25k^2 - 0.0469k^4 - 0.0195k^6)$$

$$E_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(i+1) \dots (i+n)}{(i+n+1) \dots (i+2n)} \left( \frac{1 \cdot 3 \dots (2i+2n+1)}{2 \cdot 4 \dots (2i+2n)} \right)^2 \frac{k^{2(i+n)}}{2i+2n-1}$$

Откуда:

$$s_1(u) \cong 2\frac{a}{\delta} \sin u + \left(K + 2 - \frac{p_1}{m\omega^2}\right) u - 6\sqrt{K + 2\frac{a}{\delta}} \left(E_1 \frac{u}{2} + E_2 \sin u - E_3 \sin 2u\right)$$

Из условия периодичности  $s_1(u)$ , ограничиваясь двумя первыми членами в разложении  $E_1$ , получим уравнение для определения постоянной  $K$ :

$$\left(K + 2 - \frac{p_1}{m\omega^2}\right)^2 \approx 9K, \quad (12)$$

Порождающее решение (6) имеет вид:

$$\left(\frac{du}{d\tau}\right)^2 = s_0(u) = 2\frac{a}{\delta} \cos u + K \cdot \frac{du}{d\tau} = \sqrt{2\frac{a}{\delta} \cos u + K} = \frac{d\psi}{d\tau} + 1$$

Интегрируя это уравнение, находим:

$$\tau + C_0 = \int \frac{du}{\sqrt{2\frac{a}{\delta} \cos u + K}} = \int \frac{du}{\sqrt{2\frac{a}{\delta} (1 - 2\sin^2 \frac{u}{2} + K)}} = \frac{2}{\sqrt{K + 2\frac{a}{\delta}}} \int \frac{dq}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 q}} \quad (13)$$

$C_0$  - некоторая постоянная, означающая начало отсчета времени, положим ее равной нулю. Интеграл в правой части - эллиптический интеграл 1-го рода. Разлагая его в ряд [13], получим:

$$\int \frac{dq}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 q}} = P_0 q - P_1 \sin 2q + P_2 \sin 4q - \dots$$

$$P_0 = 1 + 0.25k^2 + 0.1406k^4 + 0.0976k^6, \quad P_1 = 0.125k^2 + 0.0937k^4 + 0.0244k^6$$

Из (13), пренебрегая малыми членами, получим:

$$\frac{2}{\sqrt{K + 2\frac{a}{\delta}}} \left[ (1 + 0.25k^2) \frac{u}{2} - 0.125k^2 \sin u \right] = \tau$$

или

$$\tau = Au + A\varepsilon \sin u, \quad A = \frac{1 + 0.25k^2}{\sqrt{K + 2\frac{a}{\delta}}}, \quad \varepsilon = -\frac{0.25k^2}{1 + 0.25k^2} \quad (14)$$

Величина  $\varepsilon \ll 1$ , поэтому ищем решение (14) в виде:

$$u = B\tau + \alpha B \sin B\tau, \quad \alpha^2 \ll 1$$

Из (14) с точностью до малых второго порядка получим:

$$\tau = AB\tau + AB\alpha \sin B\tau + \varepsilon A \sin(B\tau + \alpha B \sin B\tau) \approx AB\alpha \sin B\tau + \varepsilon A \sin B\tau + AB\tau$$

Откуда:

$$AB = 1, \quad AB\alpha + \varepsilon A = 0$$

$$u = \frac{\tau}{A} - \varepsilon \sin \frac{\tau}{A}$$

$$\frac{du}{d\tau} = 1 + \frac{d\psi}{d\tau} = \frac{1}{A} - \frac{\varepsilon}{A} \cos \frac{\tau}{A}$$

Отсюда искомая относительная скорость вращения кольца вокруг ротора:

$$\dot{\varphi} = \omega \left( \frac{1}{A} - 1 \right) - \frac{\varepsilon \omega}{A} \cos \frac{\omega t}{A}, \quad (15)$$

Как следует из (15), эта скорость – периодическая функция, представляющая собой наложение малых колебаний с периодом  $2\pi A/\omega$  на среднюю скорость  $\dot{\varphi}^*$ :

$$\dot{\varphi}^* = \omega \left( \frac{1}{A} - 1 \right), \quad A = \frac{K + 3a/\delta}{(K + 2a/\delta)^{3/2}} > 1. \quad (16)$$

Рассмотрим более подробно следующие основные режимы движения кольца:

1. Постоянный контакт с ротором, малое гидродинамическое демпфирование (идеальная жидкость):  $f \neq 0, p_2 = 0$ . Из (12):

$$\left( K + 1 - \frac{p_1}{m\omega^2} \right)^2 = 4 \left( K + 2\frac{a}{\delta} \right) E_1 \approx 4 \left( K + 2\frac{a}{\delta} \right) \frac{K}{K + 2\frac{a}{\delta}} \quad (17)$$

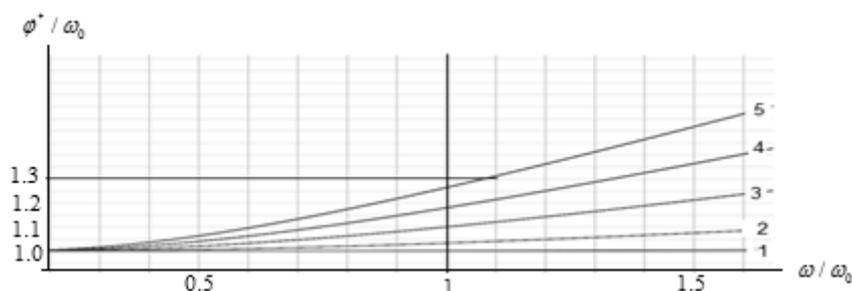
$$K = \left( 1 \pm \frac{p}{m\omega^2} \right)^2$$

Поскольку  $s_0(u) = (\dot{\varphi} + 1)_0^2$ , то в (17) необходимо брать знак «+», чтобы было  $\dot{\varphi} > 0$  при  $a=0$ , так как при  $a=0$ :  $\dot{\varphi} + 1 = \sqrt{K}$ .

Покажем, что, при установившейся обкатке скорость центра кольца (скорость обегания) близка к критической скорости ротора, и, как следует из (16), зависит от отношения  $a/\delta$  (Рис. 2). Как видно из рис.2, при достаточно широком диапазоне изменения величины  $0.1 < a/\delta < 2$  при изменении скорости вращения в диапазоне  $0.2 < \omega/\omega_0 < 1.3$  скорость

обегания близка к критической скорости кольца при данной скорости вращения  $\omega_0 = \sqrt{p/m}$ :  
 $1 < \dot{\varphi}^* / \omega_0 < 1.25$ :

$$\dot{\varphi}^* \cong \omega_0. \quad (18)$$



**Рис.2.** Скорость обегания кольца в зависимости от величины  $a/\delta$ : 1-0.1, 2-0.5, 3-1, 4-1.5, 5-2.

В этом случае нормальная реакция  $N$  колеблется вблизи нуля. Действительно из (4) и (18):

$$N = m\dot{\varphi}^2 \delta + ma\omega^2 \cos(\omega t - \varphi) - p\delta = ma\omega^2 \cos(\omega t - \varphi)$$

Следовательно, происходят постоянные микро-отрывы кольца от ротора. С увеличением скорости вращения амплитуда колебаний нормальной реакции  $ma\omega^2$  возрастает, и режим обегания сменяется виброударным режимом.

Прецессия центра кольца является прямой. Кроме того, в отличие от режима обкатки, отношение средней скорости прецессии  $\dot{\varphi}^*$  к скорости вращения  $n = \omega / \dot{\varphi}^*$ , как следует из (2), (18), - постоянная величина, она определяется собственной частотой кольца на номинальной скорости вращения:

$$n = \sqrt{p'_n / \omega_n^2 m}.$$

Это условие очень важно для работы роторной системы. Действительно, в [14] показано, что при условии:

$$\sqrt{p'_n / m} \approx 1.1\omega_n, \quad (19)$$

происходит широкополосное гидродинамическое гашение колебаний ротора с помощью плавающего кольца.

2. Отсутствие контакта кольца с ротором ( $f = 0, p_2 \neq 0$ ). Тогда из (12):

$$K = 1, \quad A = \frac{1 + 3a/\delta}{(1 + 2a/\delta)^{3/2}}$$

$$\dot{\varphi}^* = \omega \left( \frac{(1 + 2a/\delta)^{3/2}}{1 + 3a/\delta} - 1 \right)$$

Таким образом, средняя скорость вращения центра кольца при отсутствии его контакта с ротором зависит от скорости вращения ротора и от отношения величин эксцентриситета ротора и зазора.

**Траектории кольца при «обегании».** Заметим вначале, что угловая скорость  $\dot{\varphi}^*$  (18), а также и соответствующий угол, описывают положение центра кольца относительно центра

ротора. Чтобы получить траектории точек кольца в абсолютном движении относительно центра вращения системы, необходимо еще учесть траекторию центра ротора, которая по предположению является окружностью с амплитудой  $a_1$  и частотой вращения  $\omega$ . Тогда траектория кольца в установившемся режиме ( $\varphi = \varphi^* = \text{const}$ ) примет вид:

$$x = (R - r) \sin \varphi^* t - a_1 \sin \omega t$$

$$y = (R - r) \cos \varphi^* t - a_1 \cos \omega t, \quad a_1 = a / (1 - (\omega / \omega_0)^2)$$

Вид траектории определяется соотношениями  $a/\delta$  и  $\omega/\omega_0$ . Полагая  $a/\delta \approx 1$  и учитывая (18), получим следующую траекторию для точек кольца вдали от резонанса (рис. 3).

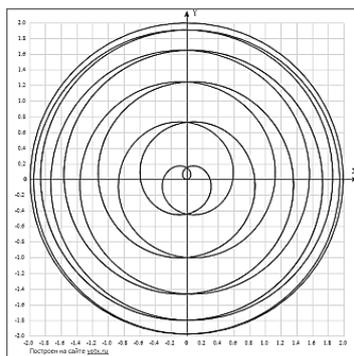


Рис. 3. Траектория точек кольца вдали от резонанса:  $\omega < \omega_0$ ,  $a/\delta \approx 1$ .

Траектория точек кольца – эпитрохоида, что означает прямую совпадение направления скорости прецессии ротора и кольца. Траектория образована последовательно закручивающимися и раскручивающимися спиральными кривыми.

### Выводы

- При постоянном контакте ротора с легкими подвижными элементами роторной системы, например, с плавающим уплотнительным кольцом, возникает режим обегания кольца по ротору (типа хула-хуп).
- Скорость прецессии кольца близка к собственной частоте кольца, обусловленной действием гидростатических сил, действующих в зазоре между ротором и кольцом. При этом отношение скорости прецессии кольца к скорости вращения ротора остается постоянным при изменении скорости вращения.

### Список литературы

1. Banakh L. Ya. Contact problems in rotor systems.//Vibroengineering. Procedia. - October 2016. - ISSN 2345-0533. - Vol.8. P.90-96.
2. Rozhdestvensky Yu, Boyarshinova A. and etc. Dynamics Analysis of Rotor with Floating Rings Package Bearing//8-th IFToMM Int.Conf. on Rotor Dynamics. - 2010. – Seoul, Korea.
3. Блехман И.И. Вибрационная механика. - М.: Наука, 1994. - 398 с.
4. Банах Л.Я. Некоторые явления, возникающие при движении вала в подшипнике с зазором//Машиноведение. – 1965. - №1. - С.70- 79.
5. Shatochin V.F. Vibrations of turbo-generator rotors with rolling of rotor to stator. Modeling techniques and software tools. - Lap Lambert Academic Publishing, 2016. - 308 p.

6. Костюк А.Г., Шатохин В.Ф., Волоховская О.А. Особенности движения ротора с задеванием о статор. //Теплоэнергетика. 2013г. № 9. С. 21-27.
7. Волоховская О.А., Бармина О.В. Анализ процесса переходных колебаний ротора при задевании о статор. //Проблемы машиностроения и надежности машин. - 2015. - №3. - С. 15-23.
8. Банах Л.Я., Бармина О.В. Устойчивость вращения ротора с плавающими уплотнительными кольцами// Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2015. - №1. - С.9-15.
9. Никифоров А.Н. Обобщенная математическая модель ротора Джеффкота-Лавалья с учетом проскальзывания при контактах и несоосности со статором//Вестник научно-технического развития. – 2012. - №5(57). - С.41-56.
10. Belyakov A.O. and Seyranian A.P. The hula-hoop problem. //Doklady AN, Physics. - 2010. - Vol. 55, No. 2. - P. 99-104.
11. Банах Л.Я., Бармина О.В., Кельнер М.С. Кинематика движений в роторной системе при постоянном контакте ротора с плавающими элементами //Проблемы машиностроения и надежности машин (в печати)
12. Марцинковский В.А. Бесконтактные уплотнения роторных машин. – М.: Машиностроение, 1982. - 200 с.
13. Журавский А.М. Справочник по эллиптическим функциям. - Изд. АН СССР, 1949.
14. Банах Л.Я., Никифоров А.Н., Воздействие аэрогидродинамических сил на быстровращающиеся роторные системы// Механика твердого тела. – 2006. - №4. - С.130-139

*Дата поступления: 20 марта 2018 г.*