

УДК 530

## КОЛОННООБРАЗНЫЙ ВИХРЬ МИКРОПОЛЯРНОЙ ЖИДКОСТИ

© Игорь Николаевич Солдатов, Наталья Владимировна Ключева

*Институт проблем машиностроения РАН – филиал Федерального исследовательского центра «Институт прикладной физики Российской академии наук»,  
Нижний Новгород, Россия  
[erfv@newmail.ru](mailto:erfv@newmail.ru)*

**Аннотация.** Рассмотрены волновые движения в закрученной струе вязкой микрополярной жидкости, окруженной потенциальным течением идеальной жидкости. Найден набор точных решений, суперпозиция которых описывает нормальную волну с произвольным азимутальным волновым числом.

**Ключевые слова:** микрополярная жидкость, вязкость, закрученная струя.

*Работа выполнена в рамках государственного задания ИПФ РАН на проведение фундаментальных научных исследований на 2013-2020 г.г. по теме № 0035-2014-0402, № госрегистрации 01201458047.*

## A MICROPOLAR FLUID COLUMNAR VORTEX

© I.N. Soldatov, N.V. Klyueva

*Mechanical Engineering Research Institute, Russian Academy of Sciences,  
Nizhny Novgorod, Russia  
[erfv@newmail.ru](mailto:erfv@newmail.ru)*

**Abstract.** Wave motions in a twisted jet of a viscous micropolar fluid surrounded by a potential flow of an ideal fluid are considered. A set of exact solutions is found whose superposition describes a normal wave with an arbitrary azimuthal wave number.

**Keywords:** micro-polar fluid, viscosity, swirling jet.

**Acknowledgements.** The work was carried out within the Russian state task of the Institute of Applied Physics for conducting fundamental scientific research for 2013-2020 on the topic No. 0035-2014-0402, state registration number 01201458047.

**Введение.** Хорошо известно, что жидкости с полимерными и нанопорошковыми добавками, жидкие кристаллы, физиологические жидкости, например, кровь могут демонстрировать поведение, плохо описываемое классической моделью ньютоновской жидкости. Возможно, возникающие неадекватности описания возникают из-за того, что не учитывается внутренняя микроструктура и микровращения частиц, эту микроструктуру образующих. С целью учета тонких эффектов, связанных с микроструктурой, созданы микроконтинуальные модели [1], одной из которых является модель микрополярной жидкости [1-7].

В работе рассмотрены волновые движения в закрученной струе микрополярной жидкости, окруженной потенциальным течением идеальной жидкости. Иначе говоря, инерционные волны в вихре Рэнкина – колоннообразном вихре с линейным распределением азимутальной скорости в ядре (ядро вихря в невозмущенном состоянии вращается как квазитвердое целое с угловой скоростью  $\Omega$ ) и безвихревым течением вне ядра (левая часть рис. 1). Будем

предполагать, что аксиальная скорость является постоянной в ядре и равна нулю вне ядра, т. е. имеет прямоугольное распределение (рис. 1).

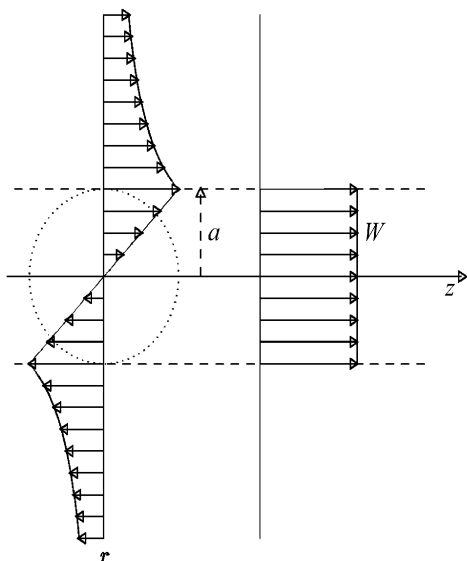


Рис. 1

Исследование вихря Рэнкина (без учета вязкости ядра и осевого течения) проводилось ещё лордом Кельвином (1880г.) [8]. Кельвина интересовали вопросы устойчивости колоннообразных, кольцевых и точечных вихрей, возникшие в связи с предложенной им теорией вихревых атомов (1867г.) [9]. В этой теории мир понимается как некий эфир (аналог идеальной жидкости), в которой взаимодействуют вихри Гельмгольца, подобные атомам, образующим молекулы. Устойчивость вихревых атомов вызвала сильные сомнения. Интерес к вопросам устойчивости вихрей привел Кельвина к рассмотрению инфинитезимальных возмущений цилиндрической поверхности колоннообразного вихря, что, тем самым, положило начало исследованиям волн во вращающейся жидкости. Модель Рэнкина для вращающейся жидкости продолжает оставаться интересным

объектом исследований, что объясняется её простотой и широким кругом приложений, в том числе, технических. Лорд Кельвин в упоминавшейся работе 1880г. показал, что колоннообразный вихрь (вихрь Рэнкина) без осевого течения в идеальной жидкости с квазитвердотельно вращающимся ядром и потенциальным течением вне ядра нейтрально устойчив к инфинитезимальным возмущениям цилиндрической поверхности ядра вихря. Неустойчивость возникает, когда есть достаточно быстрое осевое течение в ядре. Это стало понятно после работ Chandrasekhar S. (1961) и Krishnamoorthy V. (1966). Позднее Moore D.W. и Saffman P.G. (1972) [4], Uberoi с соавт. (1972) [5], Lessen с соавт. (1973) [6]; Drazin, Reid, [7] Saffman P.G., Loicseux et al (1998) [8] были выполнены более детальные исследования волновых движений и неустойчивости вихря. Влияние вязкости жидкости во внутренней области вихря на устойчивость, за исключением очень частных случаев, ранее не рассматривалось. В отличие от ранее проводившихся исследований, в данной работе учитывается не только ньютоновская вязкость, но и микрополярные свойства жидкости ядра. Плотность жидкости ядра и жидкости во внешней области, вообще говоря, различны.

Во многих случаях для струй можно не учитывать вязкость внешней среды при низкой плотности последней, но приходится учитывать вязкость и микроструктурные свойства жидкости самой струи, поскольку они оказывают сильное влияние на динамику струи и изменяют условия устойчивости. Когда учитывается вязкость жидкости, как правило, это очень сильно усложняет дело и часто вынуждает ограничиваться поиском приближенных решений, вводя пограничные слои и т.д. Ниже для закрученной вязкой микрополярной струи будет найден набор точных решений, суперпозиция которых описывает нормальную волну.

**Уравнения движения и граничные условия.** В невозмущенном состоянии микрополярная жидкость образует твердотельно вращающийся с угловой скоростью  $\Omega = const$  круговой цилиндр радиуса  $a$ . Жидкость внутри цилиндрической поверхности равномерно движется со скоростью  $W = const$  в направлении оси вращения. Для более компактного представления решения в случае, когда учитывается вязкость жидкости, удобнее использовать неинерциальную (равномерно вращающуюся) систему отсчёта, связанную с квазитвердотельно вращающимся (в невозмущенном состоянии) ядром вихря. Мы будем использовать вращающуюся цилиндрическую систему координат  $(r, \varphi, z)$  с осью  $z$ ,

направленной вдоль оси вращения. В этой равномерно вращающейся с угловой скоростью  $\Omega$  системе координат в правой части уравнений движения микрополярной жидкости появляются члены, связанные с действием кориолисовой и центробежной сил

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + (v + v_r) \nabla^2 \mathbf{v} + 2v_r \nabla \times \boldsymbol{\omega} + 2\mathbf{v} \times \Omega + \frac{1}{2} \nabla [\Omega \times \mathbf{r}]^2, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1)$$

$$J \left( \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = 4(\beta + \mathcal{G} + \gamma) \nabla \nabla \cdot \boldsymbol{\omega} + 2v_r (\nabla \times \mathbf{v} - 2\boldsymbol{\omega}) - 4\gamma \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{\omega} \quad (2)$$

Здесь  $\mathbf{v} = (u, v, w)^T$  обозначает вектор скорости,  $\boldsymbol{\omega} = (\omega_r, \omega_\phi, \omega_z)^T$  – вектор микровращений,  $\nu$  – коэффициент кинематической ньютоновской сдвиговой вязкости  $\beta, \mathcal{G}, \gamma$  – коэффициенты кинематической вращательной вязкости,  $\nu_r$  – коэффициент вихревой вязкости, характеризующий меру «сцепления» частицы со своим окружением,  $J$  – коэффициент микроинерции (говоря иначе, квадрат характерной длины микроструктуры),  $\rho$  – плотность,  $p$  – давление. Влиянием кориолисовой и центробежной сил на поле микровращений пренебрегаем.

Плотность микрополярной жидкости ядра  $\rho$  отлична от плотности идеальной жидкости  $\rho_l$  внешнего течения  $r > a$ . Кроме того, жидкости предполагаются неэмульгирующими и несмешивающимися между собой.

Течение жидкости во внешней области  $r > a$  описывается уравнениями Эйлера и несжимаемости

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_l} \nabla p, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (3)$$

Для удобства различения течений мы часто будем снабжать не только плотность, но и другие величины, относящиеся к внешнему течению индексом  $l$ .

На границе раздела жидкостей  $S(t, r, \phi, z) = r - a - h(t, \phi, z) = 0$  должны выполняться динамические условия:

$$\mathbf{n} \cdot [\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_l] = -\gamma \mathbf{n} (\nabla_S \cdot \mathbf{n}) + \nabla_S \eta \quad (4)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{m} = 0 \quad (5)$$

где  $\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \rho\nu[\nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^T] + \rho\nu_r[\nabla\mathbf{v} - \boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\omega}]$  – тензор напряжений,  $\mathbf{I}$  – единичная матрица,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  – символ Риччи (тензор третьего порядка),  $\eta$  – поверхностное натяжение,  $\nabla_S = \nabla - \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \nabla)$  – поверхностный градиент,  $-\eta(\nabla_S \cdot \mathbf{n})$  – удвоенная кривизна поверхности,  $\mathbf{n} = \nabla S / |\nabla S|$  – единичный вектор нормали (направлен в сторону жидкости с индексом  $l$ );  $\nabla S = \left( 1, -\frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial \phi}, -\frac{\partial h}{\partial z} \right)$ ,  $\mathbf{m} = 4\rho\mathcal{G}\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}\mathbf{I} + 4\rho\gamma\nabla \boldsymbol{\omega} + 4\rho\beta(\nabla \boldsymbol{\omega})^T$  – тензор моментных напряжений.

Также на границе раздела должны выполняться кинематические условия: компонента скорости, нормальная к границе, должна быть непрерывной при переходе через неё

$$[\mathbf{v} - \mathbf{v}_l] \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (6)$$

совпадая со скоростью перемещения поверхности раздела

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla S = 0 \quad (7)$$

Вместо граничных условий, налагаемых на моментные напряжения, нередко используются условия на вектор микровращений:

$$\varpi = \frac{\alpha}{2} \nabla \times \mathbf{v}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (8)$$

Чаще всего используются условия с  $\alpha = 0$  – условия полной вращательной заторможенности. Ограничимся рассмотрением случая, когда влиянием поверхностного натяжения можно пренебречь. Профили скорости невозмущенного течения  $\mathbf{V} = (U, V, W)^T$ , представляющего равномерное квазитвердое вращение ядра с угловой скоростью  $\Omega$  и наложенной на это вращение постоянной осевой скоростью  $W$ , в выбранной нами вращающейся системе координат имеют вид

$$\begin{aligned} U = 0, \quad V = 0, \quad W = \text{const} \neq 0, \quad r \leq a \\ U_I = 0, \quad V_I = \Omega \frac{a^2}{r} - \Omega r, \quad W_I = 0, \quad r > a. \end{aligned}$$

Давление в невозмущенном течении зависит только от радиальной координаты следующим образом

$$\begin{aligned} P(r) = p_0 + \frac{1}{2} \rho \Omega^2 r^2, \quad r \leq a \\ P_I = p_0 + \frac{1}{2} \rho \Omega^2 a^2 - \frac{1}{2} \rho_I \Omega^2 \left( \frac{a^4}{r^2} - a^2 \right), \quad r > a \end{aligned}$$

где  $p_0$  – давление в центре ядра. В невозмущенном состоянии поле микровращений – нулевое.

Представим движение жидкости как сумму основного  $\mathbf{V} = (U, V, W)^T$ ,  $P$  (невозмущенного) течения и малого возмущения  $\mathbf{v}'$ ,  $\varpi'$ ,  $p'$

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + \mathbf{v}', \quad p = P + p'$$

и линеаризуем уравнения движения (1)-(3)

$$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + W \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{v}' = -\frac{1}{\rho} \nabla p' + (\nu + \nu_r) \nabla^2 \mathbf{v}' + 2\nu_r \nabla \times \varpi' + 2[\mathbf{v}', \Omega], \quad \nabla \cdot \mathbf{v}' = 0, \quad r \leq a \quad (9)$$

$$J \left( \frac{\partial \varpi'}{\partial t} + W \frac{\partial \varpi'}{\partial z} \right) = 4(\beta + \vartheta + \gamma) \nabla \nabla \cdot \varpi' + 2\nu_r (\nabla \times \mathbf{v}' - 2\varpi') - 4\gamma \nabla \times \nabla \times \varpi', \quad r \leq a \quad (10)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}'_I}{\partial t} + \frac{V_I}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{v}'_I - 2 \frac{V_I}{r} v'_I \mathbf{e}_r + \left( \frac{V_I}{r} u'_I + u'_I \frac{\partial V_I}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\varphi = -\frac{1}{\rho_I} \nabla p'_I + 2[\mathbf{v}'_I, \Omega], \quad \nabla \cdot \mathbf{v}'_I = 0, \quad r > a \quad (11)$$

Ниже штрихи опускаем. Линеаризуем также граничные условия и перенесем их с возмущенной поверхности  $r = a + h(\varphi, z, t)$  на свободную поверхность жидкости при стационарном вращении (имеющую своим уравнением  $r = a$ )

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial h}{\partial t} - u + W \frac{\partial h}{\partial z} &= 0, & -u + u_I + W \frac{\partial h}{\partial z} &= 0, \\
 -p - \rho \Omega^2 a h + 2\rho v \frac{\partial u}{\partial r} &= -p_I - \rho_I \Omega^2 a h, \\
 (v + v_r) \left( \frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{a} \right) - v_r \frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - v_r \varpi_z &= 0, \\
 v \left( \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) + v_r \frac{\partial w}{\partial r} + v_r \varpi_\varphi &= 0 \\
 (\vartheta + \beta + \gamma) \frac{\partial \varpi_r}{\partial r} + \vartheta \left( \frac{\varpi_r}{a} + \frac{1}{a} \frac{\partial \varpi_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \varpi_z}{\partial z} \right) &= 0 \\
 \beta \frac{1}{a} \frac{\partial \varpi_r}{\partial \varphi} + \gamma \left( \frac{\partial \varpi_\varphi}{\partial r} - \frac{\varpi_\varphi}{a} \right) &= 0, & \beta \frac{\partial \varpi_r}{\partial z} + \gamma \frac{\partial \varpi_z}{\partial r} &= 0
 \end{aligned} \tag{12}$$

Заметим, что использование условий на микромоменты на границе не является твердо обоснованным. Альтернативными условиями являются условия на микровращения:

$$\begin{aligned}
 \varpi_r &= \frac{\alpha}{2} \left( \frac{1}{a} \frac{\partial w}{\partial \varphi} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\
 \varpi_\varphi &= -\frac{\alpha}{2} \frac{\partial w}{\partial r}, & \varpi_z &= \frac{\alpha}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \right)
 \end{aligned} \tag{13}$$

Граничные условия должны быть дополнены условиями на бесконечности:

$$v_I \rightarrow 0 \text{ при } r \rightarrow \infty,$$

условиями излучения при  $z \rightarrow \infty$  и ограниченности решения при  $r = 0$ . Ниже нас будут интересовать решения в форме бегущей волны  $\sim e^{-i\alpha z + ikz + im\varphi}$ .

**Точные решения.** Во внешней области  $r > a$  решение, описывающее возмущенное течение (11) легко находится. Действительно, система (11), как нетрудно показать, может быть сведена к одному уравнению для азимутальной скорости

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} v_I + 3r \frac{\partial}{\partial r} v_I - (m^2 - 1 + k^2 r^2) v_I = 0,$$

которое допускает следующее решение

$$v_I = \frac{im}{r} [C_6 K_m(|k|r) + C_* I_m(|k|r)] e^{i(kz + m\varphi - \alpha t)} \tag{14}$$

где  $K_m, I_m$  – модифицированные функции Бесселя второго и первого рода,  $k$  – аксиальное, а  $m$  ( $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) – азимутальное волновые числа,  $\omega$  – циклическая частота,  $C_6, C_*$  – константы. Из условия на бесконечности следует, что коэффициент при втором слагаемом в квадратных скобках равен нулю  $C_* = 0$ . Выражения для остальных компонент поля скоростей и давления во внешней области  $r > a$  также легко находятся

$$\begin{aligned}
 u_I &= -\tilde{N}_6 \left( |k| K_{m-1}(|k|r) + \frac{m}{r} K_m(|k|r) \right) e^{i(kz+m\varphi-\alpha t)} \\
 w_I &= ikC_6 K_m(|k|r) e^{i(kz+m\varphi-\alpha t)} \\
 p_I &= -i\rho_I \left[ \omega + m \left( \frac{\Omega a^2}{r^2} - \Omega \right) \right] \tilde{N}_6 K_m(|k|r) e^{i(kz+m\varphi-\alpha t)}
 \end{aligned} \tag{15}$$

Обратимся к течению в ядре вихря. Представим поле микровращений в виде суперпозиции потенциальной  $\varpi^p$  и вихревой частей  $\varpi^v$

$$\varpi = \varpi^p + \varpi^v, \quad \nabla \times \varpi^p = 0, \quad \nabla \cdot \varpi^v = 0. \tag{16}$$

В линеаризованные уравнения для поля скоростей и давления потенциальная часть  $\varpi^p$  не входит, что позволяет разделить задачу на две части, связанные только граничными условиями. Для  $\varpi^p$  из (10) следует уравнение

$$J \left( \frac{\partial \varpi^p}{\partial t} + W \frac{\partial \varpi^p}{\partial z} \right) = 4(\beta + \vartheta + \gamma) \nabla \nabla \cdot \varpi^p - 4v_r \varpi^p$$

откуда находим решение, ограниченное при  $r = 0$ :

$$\begin{aligned}
 \varpi_\varphi^p &= C_7 (\lambda_\gamma I_{m-1}(\lambda_\gamma r) - m I_m(\lambda_\gamma r) / r) e^{i(kz+m\varphi-\alpha t)} \quad (\varpi_\varphi^p = C_7 \lambda_\gamma I_1(\lambda_\gamma r) e^{i(kz+m\varphi-\alpha t)}, \text{ если } m=0) \\
 \varpi_r^p &= C_7 \frac{im}{r} I_m(\lambda_\gamma r) e^{i(kz+m\varphi-\alpha t)}, \quad \varpi_\varphi^p = C_7 ik I_m(\lambda_\gamma r) e^{i(kz+m\varphi-\alpha t)}
 \end{aligned} \tag{17}$$

где  $\lambda_\gamma^2 = k^2 + \frac{v_r}{\beta + \vartheta + \gamma} - i \frac{J(\omega - Wk)}{4(\beta + \vartheta + \gamma)}$ ,  $\text{Im } \lambda_\gamma \geq 0$ .

Получить решение, описывающее вихревую часть течения в ядре, можно способом, указанным в [19]. Способ основан на теореме, утверждающей, что в цилиндрической системе координат достаточно найти решение векторного уравнения

$$\nabla^2 \mathbf{v} + \kappa^2 \mathbf{v} = 0 \tag{18}$$

и это будет решением линеаризованных уравнений (9),(10), описывающих движение микрополярной вращающейся жидкости, если

$$\begin{aligned}
 4(v + v_r) \gamma \kappa^5 - [4(i\omega - ikW) \gamma + (v + v_r)(iJ\omega - ikJW - 2v_r) + 2v_r^2] \kappa^3 - 8ik\Omega \gamma \kappa^2 + \\
 + (i\omega - ikW)(iJ\omega - ikJW - 2v_r) \kappa + 2ik\Omega(iJ\omega - ikJW - 2v_r) = 0
 \end{aligned} \tag{19}$$

где параметр  $\kappa$  называется параметром завихренности. Поскольку, как следует из (19), в общем случае существуют пять различных параметров  $\kappa_j$  ( $j = 1, \dots, 5$ ), то, соответственно, существуют пять различных векторных полей. Суперпозиция этих полей формирует нормальную волну – моду, что, в математической форме, будет записано чуть ниже.

Уравнение (18) в цилиндрической системе координат имеет наиболее простой вид в проекции на ось  $z$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \kappa_j^2 \right) w = 0 \tag{20}$$

Откуда следует, что для решения вида  $w = \hat{w}(r) e^{i(-\alpha t + kz + m\varphi)}$  амплитуда  $\hat{w}(r)$  осевой компоненты вектора скорости должна удовлетворять уравнению Бесселя

$$\frac{d^2 \hat{w}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\hat{w}}{dr} + \left( -\frac{m^2}{r^2} + \lambda_j^2 \right) \hat{w} = 0 \quad (21)$$

где  $\lambda_j^2 = \kappa_j^2 - k^2$ ,  $\text{Im } \lambda_j \geq 0$ .

Решение уравнения Бесселя (21) может быть выражено через функции Ганкеля, точнее, учитывая условие ограниченности решения при  $r = 0$  и  $\text{Im } \lambda_j \geq 0$ , через вторую функцию Ганкеля  $m$ -ого порядка

$$\hat{w}_{m,j}(r) = C_j H_m^{(2)}(\lambda_j r) \quad (22)$$

где нижние индексы  $m$  и  $j$  у амплитуды введены для явного указания азимутального волнового числа и корня уравнения (19),  $C_j$  – произвольная постоянная. Заметим, что радиальная  $u_{m,j}$  и азимутальная  $v$  компоненты вектора скорости  $\mathbf{v}$  связаны с аксиальной скоростью  $w$  следующим образом

$$u_{m,j} = \frac{im\kappa_j}{\lambda_j^2 r} w_{m,j} + \frac{ik}{\lambda_j^2} \frac{\partial w_{m,j}}{\partial r}, \quad v_{m,j} = -\frac{mk}{\lambda_j^2 r} w_{m,j} - \frac{\kappa_j}{\lambda_j^2} \frac{\partial w_{m,j}}{\partial r} \quad (23)$$

**Моды с произвольным азимутальным волновым числом.** Поле скоростей нормальной моды с азимутальным волновым числом  $m$ , формируют пять слагаемых, что, используя (23) с заменой производных, можно записать в виде

$$w_m = \sum_{j=1}^5 (\hat{w}_{m,j}) e^{i\omega t + ikz + im\phi}, \quad u_m = \sum_{j=1}^5 \left( \frac{im(\kappa_j - k)}{\lambda_j^2 r} \hat{w}_{m,j} + \frac{ik}{\lambda_j} \hat{w}_{m-1,j} \right) e^{i\omega t + ikz + im\phi},$$

$$v_m = \sum_{j=1}^5 \left( \frac{m(\kappa_j - k)}{\lambda_j^2 r} \hat{w}_{m,j} - \frac{\kappa_j}{\lambda_j} \hat{w}_{m-1,j} \right) e^{i\omega t + ikz + im\phi}, \quad (24)$$

По полю скоростей (24) находятся выражения для вихревой части микровращений и давления в рассматриваемой моде

$$\omega^v = \sum_{j=1}^5 \frac{v_r \kappa_j}{-iJ(\omega - kW) + 4\gamma\kappa_j^2 + 2v_r} \hat{v}_{m,j} e^{i\omega t + ikz + im\phi}, \quad (25)$$

$$p_m = -2\rho\Omega \sum_{j=1}^5 (\kappa_j^{-1} \hat{w}_{m,j}) e^{i\omega t + ikz + im\phi} \quad (26)$$

Подставим выражения (13), (14), (24), (26) для вектора скорости, давления и (17), (25) для микровращений в граничные условия (12). (Заметим, что с помощью первого уравнения системы (12), можно выразить  $h$  через радиальную скорость  $u$

$$h = -i \frac{u}{\omega + kW},$$

а затем, используя это выражение, исключить  $h$  из второго и третьего уравнений и, тем самым, прийти к системе из восьми уравнений). После подстановки получим однородную систему уравнений относительно  $C_1, \dots, C_8$ , которую запишем в матричном виде

$$\mathbf{A}\mathbf{C} = 0 \quad (27)$$

где  $\mathbf{A} = (a_{ij})$ ,  $i, j = 1, \dots, 8$ ;  $\mathbf{C} = (C_1, \dots, C_8)^T$ .

Удобно перейти к безразмерным переменным  $r' = r/a$ ,  $z' = z/a$ ,  $t' = t\Omega$ ,  $\tau = \omega/\Omega$ ,  $k' = ka$ ,  $\kappa' = \kappa a$ ,  $\lambda' = \lambda a$ ,  $p' = p/(\rho\Omega^2 a^2)$ ,  $\mathbf{v}' = \mathbf{v}/(\Omega a)$ ,  $R = W/\Omega a$  (число Кибеля-Россиби),

$E = \nu / (\Omega a^2)$  (число Экмана)  $\bar{\tau} = \tau + kR$ ,  $\Pi = \frac{\rho_1}{\rho} = \frac{1-A}{1+A}$ ,  $A = \frac{|\rho - \rho_1|}{\rho + \rho_1}$  (число Этвуда),  $N = \nu_r / \nu$ ,

$\Gamma = \gamma \Omega^{-1} J^{-1} a^{-2}$ . Ниже штрихи опускаются.

Наименьший по модулю параметр завихренности связан с крупномасштабным течением в ядре вихря. Следующие по величине модулей параметры связаны с обычными вязкими пограничными слоями, образующимися около границы раздела. Наибольшие по модулю параметры завихренности обязаны своим возникновением вращательной вязкости. Для малых чисел Экмана  $E \ll 1$ , представляющих наибольший интерес для техники, справедливы следующие приближенные простые выражения для параметра завихренности, связанного с крупномасштабным течением, и “погранслойных”  $\kappa$

$$\kappa_1 \approx \frac{2k}{\tau + kR} + i \frac{8k^3}{(\tau + kR)^4} E + O(E^2),$$

$$\kappa_j \approx (-1)^{j+1} \sqrt{\frac{|\tau + kR|}{2E}} \left( -\frac{\tau + kR}{|\tau + kR|} + i \right) - \frac{k}{\tau + kR} + O(\sqrt{E}), \quad (j = 2, 3)$$

Нетривиальные решения у системы (27) существуют только, если

$$\det \mathbf{A} = 0 \tag{28}$$

Это уравнение определяет связь между аксиальным волновым числом  $k$  и частотой  $\tau$  при заданных  $m$  и других параметрах.

На рис. 2 показаны проекции несколько первых ветвей дисперсионной кривой при  $m = 1$ ,  $\Pi = 1.0$ ,  $R = 0$ ,  $E = 10^{-6}$  на вещественную плоскость  $\tau, \text{Re}(k)$ .

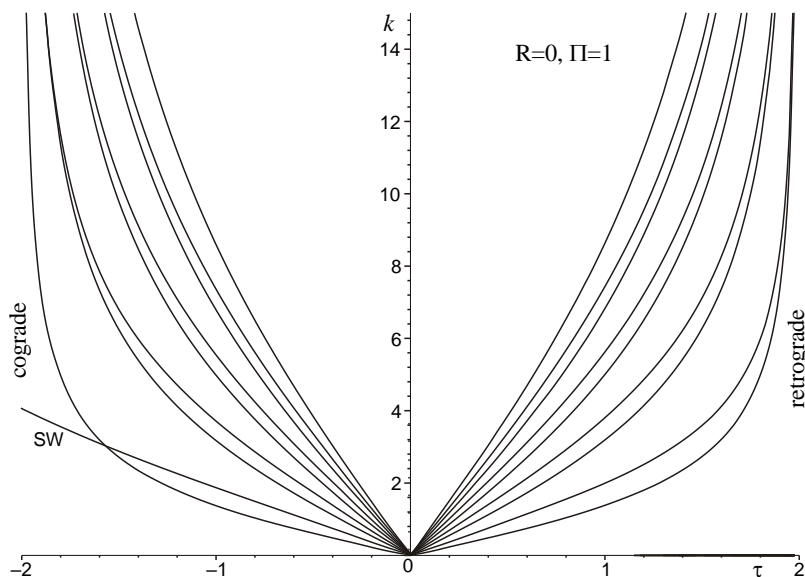


Рис. 2

Имеется бесконечно-счётное число ветвей. Ветка, соответствующая поверхностной моде отмечена символом SW.

**Закключение.** Показано, что предложенный в работе [19] способ построения решений может использоваться для расчета струйных течений завихренной микрополярной жидкости. В отличие от приближенных процедур, связанных с использованием пограничных слоев, нет необходимости вводить в определенной мере искусственные параметры толщины погранслоев и сращивать разложения разного масштаба. Это особенно актуально для микрополярной жидкости, поскольку априори трудно дать оценку толщины пограничных слоев, связанных с волновым движением.



## Список литературы

- [1] Stokes V. K. Theories of Fluids with Microstructure: An Introduction. - Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 1984.
- [2] Аэро Э.Л., Булыгин А.Н., Кувшинский Е.В. Асимметрическая гидромеханика // ПММ. - 1965. - Т. 29, вып. 2. - С. 297–308.
- [3] Eringen A.C. Theory of micropolar fluid // J. Math. and Mech. 16 (1966), 118.
- [4] Петросян Л.Г. Некоторые вопросы механики жидкости с несимметричным тензором напряжений. - Ереван: Изд-во ЕГУ, 1984.
- [5] Allen S.J., Kline K.A. The effect of concentration in fluid suspension // Trans. Soc. Rheol., 12, N. 3 (1968). - 457-468.
- [6] Бессонов Н.М. О корректной постановке граничных условий в гидродинамике моментной жидкости.- СПб: препринт ИПМ РАН, 1993. - N 89. - 26с.
- [7] Lukaszewicz G. Micropolar Fluids: Theory and Applications. - New York: Springer Science+Business Media, LLC, 1999.
- [8] Kelvin, Lord Vibrations of a columnar vortex. //Phil. Mag. 10 (1880). - P. 155-168.
- [9] Kelvin, Lord On Vortex Atoms // Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, VI, (1867). - P. 94-105. Reprinted in Phil. Mag. Vol. XXXIV, 1867. - P. 15-24.
- [10] Lamb H. Hydrodynamics. – Cambridge: Cambridge University Press, 1932.
- [11] Chandrasekhar S Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability. – Oxford: Clarendon Press, 1961.
- [12] Moore D.W., Saffman P.G. // Philos. Trans. R. Soc. London, Ser. A. – 1972. - A272. - P. 403-429.
- [13] Lessen M., Deshpande N.V., Hadji-Ohanes B. Stability of a potential vortex with a non-rotating and rigid-body rotating top-hat jet core. // J. Fluid Mech. - 1973. - Vol. 60. - P. 459–466.
- [14] Maxworthy T., Hopfinger E. J., Redekopp L. G. Wave motions on vortex cores //J. Fluid Mech. - 151 (1985). - P. 141-165.
- [15] Leibovich S., Brown S. N., Patel Y. Bending waves on inviscid columnar vortices //J. Fluid Mech. - 173 (1986). - P.595-624.
- [16] Wu C., Farokhi S., Taghavi R. Spatial instability of a swirling jet – theory and experiment. //AIAA J. - 30 (1992). - P. 1545–1552.
- [17] Marshall J.S., Krishnamoorthy S., On the instantaneous cutting of a columnar vortex with non-zero axial flow //J. Fluid Mech. - 351 (1997). - P. 41-74.
- [18] Loiseleux T., Chomaz J.M., Huerre P. The effect of swirl on jets and wakes: linear instability of the Rankine vortex with axial flow. //Phys. Fluids. - 10 (1998). - P. 1120–1134
- [19] Солдатов И.Н. Гироскопические волны во вращающемся слое жидкости //ПМТФ. - 49. - № 2. (2008). - 15-20.

*Дата поступления: 23 марта 2018 г.*