Bulletin of Science and Technical Development
www.vntr.ru № 3 (127), 2018

DOI: 10.18411/vntr2018-127-2

УДК 534.1

К ПРОБЛЕМЕ АНАЛИЗА СЛУЧАЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ УДАРНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА ПРИ ОТКАЗЕ ОТ ГИПОТЕЗЫ НЬЮТОНА

© **Виталий Львович Крупенин**[1,2]
[1]*ИМАШ РАН, Москва, Россия*
[2]*Московский Политехнический Университет, Москва, Россия*
krupeninster@gmail.com

Аннотация. *Рассмотрена методика расчета виброударной системы с одной степенью свободы, соударяющейся с нежестким ограничителем хода при широкополосном случайном силовом воздействии. Использованы методы, предложенные и развитые Р.Л. Стратоновичем. Получены определяющие соотношения, найдены необходимые характеристики случайного виброударного процесса.*
Ключевые слова: *удар, виброударная система, гипотеза Ньютона, стандартный белый шум, уравнение ФПК, плотность вероятностей, буфер.*

Работа выполнялась при поддержке РФФИ (проект 18-08-00168).

TO THE ANALYSIS OF VIBRATIONAL CONDUCTING SYSTEMS WITH INCLUSIVE SHOCK VARIATIONS

© **Vitaly Krupenin**[1,2]
[1] *IMASH RAN, Moscow, Russia*
[2] *Moscow Polytechnic University, Moscow, Russia*
krupeninster@gmail.com

Abstract. *The technique for calculating a vibro-impact system with one degree of freedom colliding with a non-rigid limiter for broadband random force action is considered. The methods proposed and developed by R.L. Stratonovich. The determining relations are obtained, the necessary characteristics of a random vibro-impact process are found.*
Keywords: *impact, vibro-impact system, Newton's hypothesis, standard white noise, FPK equation, probability density, buffer.*

Acknowledgements. *The work was supported by RFBR (project 18-08-00168).*

1. Введение. Задача учета конечной продолжительности времени ударного контакта, т.е. задача отказа в расчётах от гипотезы Ньютона и рассмотрения более реальных механизмов диссипации при ударах в ряде случаев остаётся достаточно актуальной. Методы сингуляризации [1, 2], позволяют это проделать, но, при рассмотрении случайных колебаний, вообще говоря, регулярные методики, по-видимому, не достаточно эффективны. Ниже рассмотрена схема расчета виброударной системы с одной степенью свободы при отказе от предположения о применимости гипотезы Ньютона. При этом считается, что возбуждение случайного виброударного процесса осуществляется за счет действия широкополосных силовых воздействий типа стандартных белых шумов. В качестве методики исследования использована один из методик, предложенных Р.Л. Стратоновичем [3].

2. Постановка задачи. Рассмотрим ударный осциллятор [1, 2] в предположении, что точечное тело, его образующее, взаимодействует не с абсолютно жестким ограничителем, а с некоторым буфером, силовая характеристика которого

$$\Phi(u,\dot{u}) = \varepsilon r(u,\dot{u}) + \lambda\Phi_1(u)\,, \qquad (1)$$

где u-определяющая координата системы; $\varepsilon b(u,\dot{u})$-диссипативная, а $\lambda\Phi_1(u)$-упругая составляющая силы. При этом $\varepsilon,\ \lambda$ - соответственно малый и большой параметры; $\varepsilon = O(\lambda^{-\alpha}),\ \alpha>0$.

Относительно функции $\Phi(u,\dot{u})$ предполагаем, что она принадлежит классу пороговых функций [1, 2] и отлична от нуля только после достижения координатой некоторого порогового значения: $u \ge \Delta$.
Предположим, что возбуждения осуществляется силой $f(t)$, представляющей из себя широкополосный случайный процесс, который близок к стандартному белому шуму и имеет нулевое среднее значение.
Уравнение движения осциллятора запишем в виде:

$$\ddot{u} + \Omega^2 u + 2\varepsilon b\dot{u} + \varepsilon r(u,\dot{u}) + \lambda\Phi_1(u) = \sqrt{\varepsilon}\, f(t)\,, \qquad (2)$$

причём здесь все члены отнесены к единичной массе
Необходимо определить основные характеристики движения, т.е. характеристики случайного процесса $u(t)$.

3. Метод решения. Воспользуемся известной методикой Р.Л. Стратоновича и введём новую медленную переменную – полную энергию консервативной системы:

$$W = \frac{1}{2}\dot{u}^2 + U(u); \qquad U(u) = \frac{1}{2}\Omega^2 u^2 + \lambda\int_0^u \Phi_1(u)du.$$

Тогда для двумерного марковского процесса после преобразований получим систему:

$$\begin{aligned} &\dot{u} = \pm\sqrt{2(E-W)},\\ &\dot{E} = \mp\varepsilon\sqrt{2(W-U)}r_0(x,\sqrt{2(W-U)}) + \pm\sqrt{2\varepsilon(W-U)})\, f(t). \end{aligned} \qquad (3)$$

Причём здесь $r_0(u,\dot{u}) = 2b\dot{u} + r\,(u,\dot{u})$. Проведя усреднение по быстрой переменной u, можно составить уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова для плотности вероятности энергии W. Его решение будет иметь вид

$$p(W) = C_0 T_0(W)\exp\left[-\frac{2}{S}\int_0^W \frac{Q_1(W_0)}{Q_2(W_0)}dW_0\right]. \qquad (4)$$

Здесь обозначено: C_0=const; $T_0(W)$ - период колебаний в консервативной при ε=0 системе (2). Кроме того,

$$Q_1(W)=\int_{u_1(W)}^{u_2(W)} r_0(x,\sqrt{2(W-U(u))})du+\int_{u_1(W)}^{u_2(W)} r_0(x,-\sqrt{2(W-U(u))})du;$$

$$Q_2(W)=2\int_{u_1(W)}^{u_2(W)} \sqrt{2(W-U(u))}du,$$

где значения координаты $u_{1,2}(W)$ определяются как решения уравнения $U(u_{1,2})=W$ и отвечают её предельно возможным значениям при данном уровне полной энергии W в вырожденной системе.

Величина S, фигурирующая в формуле (4) – интенсивность широкополосного стационарного процесса $f(t)$:

$$S=\int_{-\infty}^{\infty}\langle f(t)f(t+\tau)\rangle d\tau;$$

угловые скобки – операция статистического усреднения.

Подобные же соотношения находятся и для совместных плотностей вероятности $p(u_t,W)$, $p(u,u_t)$.

4. Пример. На рис. 1 изображена система, состоящая из осциллятора и буфера, который установлен с малым зазором величины $\varepsilon\Delta>0$. Пусть пружинный элемент, входящий в буфер – линеен, а демпфирование осуществляется элементом, имеющим характеристику сухого трения.

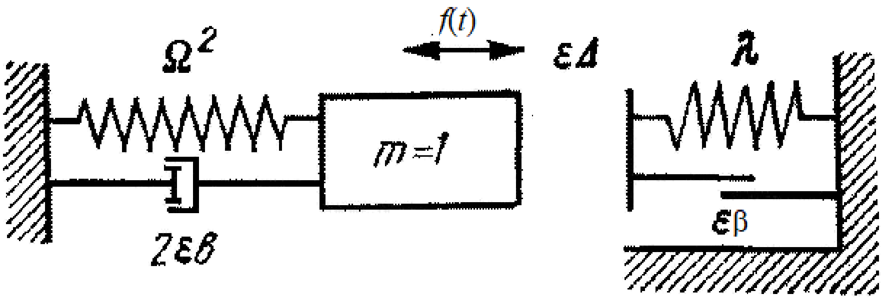

Рис.1

Обозначая неизвестную координату через y, найдём, что уравнение движения (2) принимает следующий вид:

$$\ddot{y}+\Omega^2 y+\varepsilon 2b\dot{y}+\varepsilon\beta\eta(y-\varepsilon\Delta)\mathrm{sign}\dot{y}+\lambda(y-\varepsilon\Delta)\eta(y-\varepsilon\Delta)=\sqrt{\varepsilon}f(t). \quad (5)$$

Здесь приняты следующие отношения порядка: $\varepsilon=O(\lambda^{-1/2})$; $\beta=O(\varepsilon^{-1})$, поскольку демпфирование в зоне контакта действует малое время ударного взаимодействия $t_\lambda\sim(\lambda^{-1/2})$ [4].

Обозначим $u=y-\varepsilon\Delta$ и перепишем уравнение движения в виде

$$\ddot{u}+\Omega^2 u+\varepsilon[2b\dot{u}+\Omega^2\Delta]+\varepsilon\beta\mathrm{sign}\dot{u}\eta(u)+\lambda u\eta(u)=\sqrt{\varepsilon}f(t). \quad (6)$$

Для вырожденной системы при $\varepsilon=0$ имеет место изохронизм колебаний, свойственной системам с нулевым зазором [2]. Здесь колебания могут происходить только на частоте

$$\Omega_\lambda = 2\Omega\frac{\sqrt{\Omega^2+\lambda}}{\sqrt{\Omega^2+\lambda}+\Omega} \approx 2\Omega(1-\frac{\Omega}{\sqrt{\lambda}}). \tag{7}$$

Отметим, что при принятии гипотезы о мгновенном ударе, когда $\lambda \longrightarrow \infty$, система переходит в традиционный ударный осциллятор. Частота его изохронных колебаний $\Omega_\infty = 2\Omega$ [2].

При помощи формулы (4) определим функцию плотности вероятности полной энергии $p(W)$.

Определим вид функций $Q_1(W)$ и $Q_2(W)$. Можно легко вычислить следующие значения определяющих величин:

$$u_1(W) = -\Omega^{-1}\sqrt{2W}; \quad u_2(W) = \frac{\sqrt{2W}}{\Omega^2+\lambda)}; \; r_0(u,\dot{u}) = [2b\dot{u} + \Omega^2\Delta] + \varepsilon\beta\mathrm{sign}\dot{u}\eta(u).$$

Далее находим:

$$Q_1(W) = \int_{u_1(W)}^{u_2(W)} 4b\sqrt{2(W-U(u))}du + 2\beta u_2(W) = 2[bQ_2(W) + \beta u_2(W)]$$

$$Q_2(W) = 2\int_{u_1(W)}^{u_2(W)} \sqrt{2(W-U(u))}du = \frac{2\pi W}{\Omega_\lambda}.$$

Здесь последнее равенство следует из того факта, что действие $J_0 = \frac{1}{2\pi}Q_2(W)$ и в случае изохронизма: $W = \Omega_\lambda J_0$ [5, 6]. Таким образом вычислены все величины, входящие в формулу (4). Поэтому можно записать выражение для плотности вероятности случайного процесса $W(t)$:

$$p(W) = \frac{2\pi C_0}{\Omega_\lambda}\exp\left\{-\frac{2}{S}\left[2bW + \frac{2\sqrt{2}\beta\Omega_\lambda}{\pi\sqrt{(\Omega^2+\lambda)}}\sqrt{W}\right]\right\}. \tag{8}$$

Для квадратной скобки, входящей в показатель этой экспоненты выберем обозначение $B(W)$:

$$B(W) = 2bW + \frac{2\sqrt{2}\beta\Omega_\lambda}{\pi\sqrt{(\Omega^2+\lambda)}}\sqrt{W}. \tag{9}$$

Можно показать, что совместные плотности вероятности $p(u,W)$ и $p(u,\dot{u})$ даются следующими выражениями:

$$p(u,W) = C_1\frac{1}{2\sqrt{2(W-U(u))}} \exp[-\frac{2}{S}B(W)],$$

$$p(u,\dot{u}) = C_2\exp\{-\frac{2}{S}B[\frac{1}{2}\dot{u}^2 + U(u)]\}.$$

Причём константы C_1 и C_2 находятся из условий нормировки.

Посредством замены $y = u - \varepsilon\Delta$ можно вернуться к исходной координате.

В качестве примера использования найденных представлений построим плотность вероятности амплитуды (полуразмаха) колебаний.

$$A = \frac{1}{2}[u_2(W) - u_1(W)] = \Omega_\lambda^{-1}\sqrt{2W}\ .$$

В соответствии с общими правилами вычисления плотностей вероятности случайных процессов, связанных некоторой детерминированной функциональной зависимостью [2] и, принимая во внимание, связь $W = \frac{1}{2}\Omega_\lambda^2 A^2$, найдём после ряда простых преобразований из формулы (8):

$$p(A) = 2\pi C_0 \Omega_\lambda A \exp\left\{-\frac{2}{S}\left[2b\Omega_\lambda^2 A^2 + \frac{2\beta\Omega_\lambda^2}{\pi\sqrt{(\Omega^2+\lambda)}} A\right]\right\}.$$

После проведения нормирования этой функции посредством интегрирования по $A \geq 0$, получаем

$$C_0 = 2b_1\left[2\pi\Omega_\lambda \exp\left(\frac{\beta_1^2}{8b_1}\right) D_{-2}\left(\frac{\beta_1}{\sqrt{2b_1}}\right)\right]^{-1}.$$

Здесь $D_{-\gamma}(z)$ – функция параболического цилиндра [7],

$$b_1 = \frac{2b\Omega_\lambda^2}{S},\quad \beta_1 = \frac{2\beta\Omega_\lambda^2}{S\pi\sqrt{\Omega^2+\lambda}}.$$

Подобным же образом можно найти и моменты стационарного случайного процесса $A(t)$. Например, для начальных моментов легко получить формулу

$$m_A^{(q)} = \int_0^\infty A^q p(A)dA = 2b_1^{-\frac{1}{2}q} \frac{D_{-q-2}\left(\frac{\beta_1}{\sqrt{2b_1}}\right)}{D_{-2}\left(\frac{\beta_1}{\sqrt{2b_1}}\right)}(q+1)!$$

Значения использованной специальной функции параболического цилиндра затабулированны, а также имеются программы, позволяющие строить необходимые графики и производить вычисления.

Определением плотности вероятности исследуемого процесса и заканчивается решение поставленной задачи. Все необходимые оценки параметров могут быть выполнены теперь без труда. Найденное выражение (8) является приближенным, построенным с точностью до членов $\sim \varepsilon^2$.

Список литературы

1. Крупенин В. Л. Расчет механизмов с пороговыми нелинейностями методом сингуляризации // Машиноведение. - 1984. - № 1. - С. 6-12.
2. Бабицкий В. И., Крупенин В.Л. Колебания в сильно нелинейных системах. - М.: Наука, 1985. - 320 с.
3. Стратонович Р. Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. - М.: Советское радио, 1961. - 440 с.
4. Крупенин В. Л. О колебаниях систем с большими упругими силами порогового типа // Изв. АН СССР. МТТ. - 1983. - №4. - С. 76-84.
5. Арнольд. В. И. Математические методы классической механики. - М.: Наука, 1989. - 472 с.
6. Бурд В.Ш., Крупенин В.Л. Усреднение в квазиконсервативных системах. - М.: Белый Ветер, 2016. - 172 с.
7. Кузнецов Д.С. Специальные функции. - М.: Высшая школа, 1965. - 272 с.

Дата поступления: 12 марта 2018 г.