

УДК 517.938

ХАОТИЧЕСКАЯ СИНХРОНИЗАЦИЯ: 30 ЛЕТ СПУСТЯ

© Николай Николаевич Веричев

Институт проблем машиностроения РАН – филиал Федерального исследовательского центра «Институт прикладной физики Российской академии наук»,
Нижний Новгород, Россия
nverichev@yandex.ru

Аннотация. Статья посвящена краткой истории открытия хаотической синхронизации и анализу ее места в парадигме современного естествознания.

Ключевые слова: хаотическая синхронизация.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИПФ РАН на проведение фундаментальных научных исследований на 2013-2020 г.г. по теме № 0035-2014-0402, № госрегистрации 01201458047.

CHAOTIC SYNCHRONIZATION: 30 YEARS LATER

© N.N. Verichev

Mechanical Engineering Research Institute, Russian Academy of Sciences,
Nizhny Novgorod, Russia
nverichev@yandex.ru

Abstract. The article outlines a brief history of the discovery of chaotic synchronization and its place in the paradigm of modern science.

Keywords: chaotic synchronization.

Acknowledgements. The work was carried out within the Russian state task of the Institute of Applied Physics for conducting fundamental scientific research for 2013-2020 on the topic No. 0035-2014-0402, state registration number 01201458047.

1. Введение. Синхронизация – согласованные движения связанных субъектов живой и неживой природы, возникающие в результате их взаимодействия (воздействия одного на другие), относится к числу фундаментальных явлений. Оно охватывает настолько многие сферы нашего материального и социального существования, что трудно найти современного человека, который не знал бы или не слышал бы вовсе об этом явлении. Однако не многие из общего числа знают, что без него не существовало бы, в частности, ни одного из средств современной коммуникации: радио телевидения, интернета и многого другого. Еще труднее найти человека, который знал бы не только внешние признаки, но и понимал бы суть явления синхронизации (узкий круг специалистов). Это не удивительно: причина возникновения согласованности движений систем не так проста. Достаточно сказать, что эта причина принципиально не могла быть понята вплоть до конца XIX века, - до открытия А. Пуанкаре предельных циклов и создания им качественной теории дифференциальных уравнений [1], а также создания А.М. Ляпуновым теории устойчивости движения [2]. Современная теория синхронизации начинается с пионерских работ Ван-дер-Поля (1927) [3] и А.А.Андропова с А.А.Виттом (1930) [4]. Ван-дер-Поль сформулировал задачу принудительной синхронизации радиотехнического генератора в виде неавтономного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка, известного теперь под его

именем и ставшего одним из канонических уравнений нелинейной динамики. Вместе с этим, он предложил и оригинальный метод исследования уравнения, мотивируя свои действия (усреднение) лишь интуицией и физическими рассуждениями о разномасштабности изменения переменных - амплитуды и фазы колебаний. А.А. Андронов и А.А. Витт решили ту же проблему для нелинейной динамической системы второго порядка общего вида и дали подробную физическую интерпретацией всех “деталей” математического исследования. Удивительным на то время оказалось то, что в частном случае кубической нелинейности (нелинейность Ван-Дер-Поля) результаты этих двух работ совпали. В настоящее время, когда уже давно известно о смысле процедур усреднения, интуитивно проводимых Ван-Дер-Подем, остается только удивляться его гениальной находке.

Знаменательным событием в развитии теории динамических систем и, в частности, теории синхронизации, явилось открытие Н.М Крыловым и Н.Н Боголюбовым метода усреднения (1934) [5]. Этот метод не только обосновал процедуру Ван-дер-Поля (побочный результат), но и положил начало многим новым направлениям исследований в математической и нелинейной физике. Исключительная эффективность метода усреднения, а также его взаимосвязь с методом точечных отображений и простота интерпретации результатов, явились причиной потока работ, касающихся различных аспектов синхронизации периодических колебаний. В результате было решено огромное количество важных теоретических и прикладных задач и к концу прошлого века казалось, что о синхронизации известно все или почти все. По крайней мере, если возникали новые прикладные задачи, то методы и алгоритмы их решения были известны.

Открытие в 1983г. синхронизации хаотических колебаний для идентичных (Yamada T. and Fujisaka H., [6]) и, независимо, в 1986г. для неидентичных автоколебательных систем с хаотической динамикой (Афраймович В.С., Веричев Н.Н., Рабинович М.И., [7]) в немалой степени изменило устоявшиеся представления о синхронизации как явлении. В отличие от явления классической синхронизации периодических колебаний, в силу своей распространенности и привычности, ставшее почти очевидным, явление хаотической синхронизации, напротив, казалось на то время маловероятным и даже невозможным. Причиной тому – сложившееся убеждение, что взаимодействие внутренне неустойчивых систем может порождать только лишь усиление неустойчивости. С точки зрения теории бифуркаций ситуация связанная с рождением предельных циклов на счетном множестве торов седлового типа (рождение нового аттрактора – образа синхронизации), возникающая при взаимодействии странных аттракторов, казалась невероятной. В порядке исследования свойств хаотической синхронизации стало ясно, что само определение синхронизации, сводимое до этого к соизмеримости частот, нуждается в обновлении. Было ясно и то, что уникальная по своим свойствам хаотическая синхронизация, которая может быть реализована при помощи простых технических решений (в частности, - радиотехнических схем), найдет самые широкие приложения.

Настоящая работа посвящена краткой истории открытия хаотической синхронизации, а также той точке зрения на это явление, которой придерживались авторы в то далекое время. Эта информация будет полезна в особенности тем, кто только начинает знакомиться с этим интересным и далеко не познанным явлением.

2. Об открытии хаотической синхронизации. В 1985 году, для иллюстрации хаотической динамики осцилляторов в учебном процессе (ГГУ, кафедра Теории колебаний), на аналоговой машине было смоделировано дифференциальное уравнение нелинейного параметрического осциллятора вида

$$\ddot{x} + k\dot{x} + (1 + q \cos \Omega t)x + x^3 = 0 \quad (1)$$

Привлекательность этого осциллятора состояла в том, что он демонстрирует хаотическую динамику в широком диапазоне параметров, и, кроме того, при разных параметрах он имеет топологически различные типы хаотических аттракторов, рис.1.

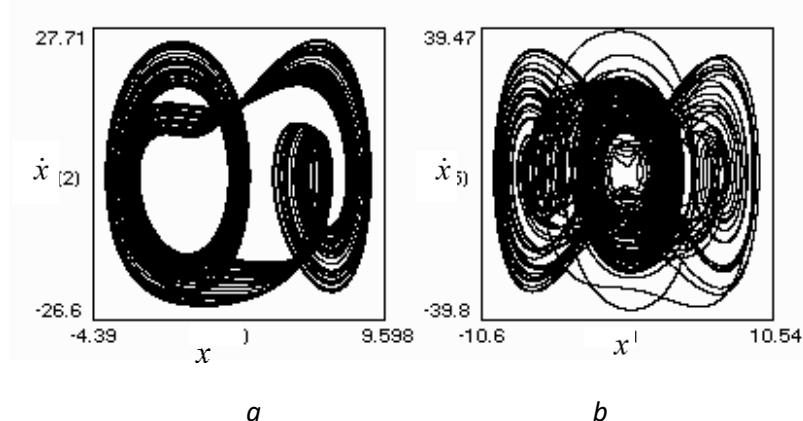


Рис.1. Различные типы хаотических аттракторов осциллятора $q = 50, \Omega = 2$. а: $k = 0.56$,
 б: $k = 0.46$.

В силу инвариантности уравнения (1) к замене $x \rightarrow -x$, для каждого несимметричного аттрактора, рис.1,а существует симметричный ему аттрактор – близнец. При изменении параметров k или q переход от а к б происходит через “кризис аттракторов” – объединение областей притяжения аттракторов – близнецов. Здесь и далее изображены результаты компьютерного счета. Оригинальные результаты аналогового моделирования см. в [8]. Далее возник интерес к исследованию динамики связанной системы вида

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= y_1, \dot{y}_1 = -k_1 y_1 - (1 + q \cos \theta + x_1^2) x_1 - \varepsilon (y_1 - y_2), \\ \dot{x}_2 &= y_2, \dot{y}_2 = -k_2 y_2 - (1 + q \cos \theta + x_2^2) x_2 + \varepsilon (y_1 - y_2), \\ \dot{\theta} &= \Omega. \end{aligned} \tag{2}$$

Исследуя динамику этих осцилляторов, и была обнаружена, ставшая теперь хорошо известной, хаотическая синхронизация. К сожалению, из-за небыстрого на то время распространения зарубежной научной информации в нашей стране (СССР), нам была неизвестна работа [6]. По этой причине в нашей статье нет ссылки на эту работу, и обнаруженное явление нами было описано полностью: в идентичном и неидентичном случаях.

В случае идентичных осцилляторов экспериментально было обнаружено существование критического значения параметра связи ε^* , такого, что при всех $\varepsilon > \varepsilon^*$ имеет место полная изохронная синхронизация хаотических колебаний, в то время как при $\varepsilon < \varepsilon^*$ синхронизация является “частичной”. В последнем случае осциллограммы хаотических процессов представляются длинными цугами синхронизированных колебаний, сменяющимися десинхронизацией, с последующим восстановлением режима синхронизации через некоторое короткое время, рис.2.

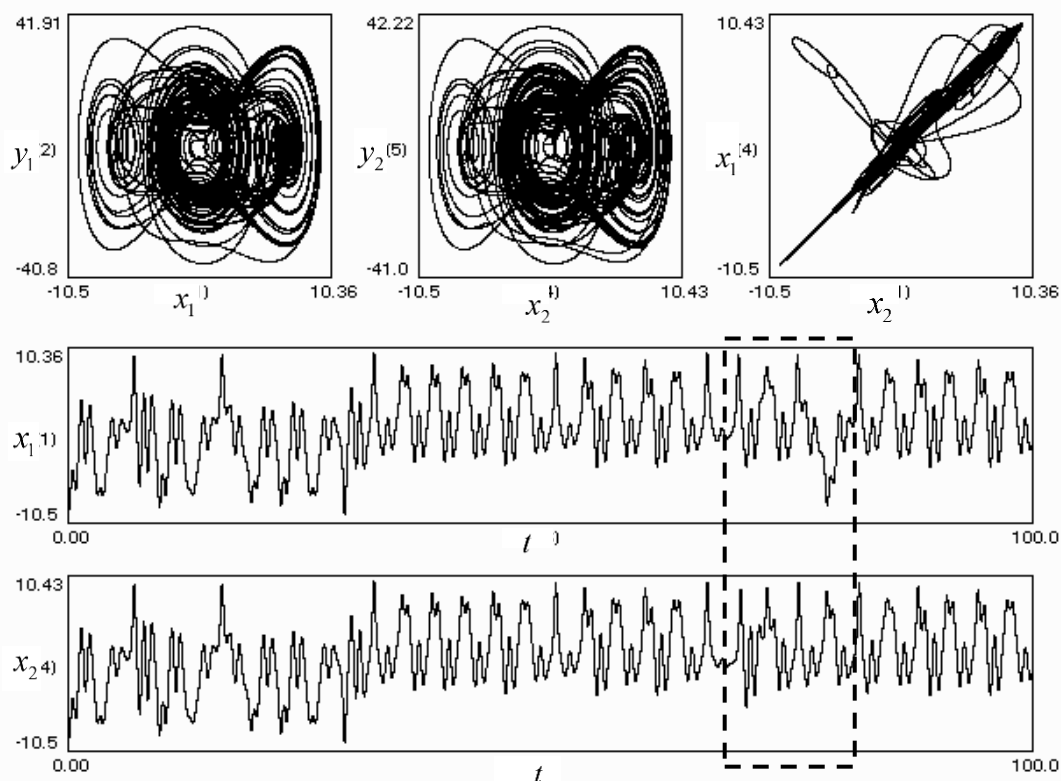


Рис.2. Режим частичной хаотической синхронизации идентичных осцилляторов: $q = 50, \Omega = 2$,
 $k = 0.46, \varepsilon = 0.33$.

С увеличением параметра связи величина отклонения фазовой траектории от диагоналей плоскостей (x_1, x_2) и (\dot{x}_1, \dot{x}_2) уменьшается, диагонали покрываются множеством мелких «островков» неустойчивости, величина которых уменьшается при увеличивающемся параметре ε . Впоследствии этот динамический режим, предшествующий взаимному захвату колебаний, назван “bubbling synchronization”. Далее при всех $\varepsilon > \varepsilon^*$ изображающая точка уже не покидает диагональ - синхронизация становится полной, рис.3.

Здесь отрезок траектории, примыкающий к диагонали, соответствует переходному процессу. В режиме синхронизации “парциальные” фазовые портреты в индивидуальных подпространствах осцилляторов (x_1, \dot{x}_1, t) и (x_2, \dot{x}_2, t) являются тождественными. Заметим, что при значениях связи $\varepsilon = \varepsilon^* + \alpha$, где $\alpha > 0$ и невелико, синхронизация устойчива “в большом”, но не глобально. В этом случае наряду с хаотическим аттрактором, соответствующим синхронизации, могут существовать и другие регулярные или хаотические аттракторы. С увеличением связи побочные аттракторы исчезают, и режим хаотической синхронизации становится устойчивым глобально.

Необходимо заметить, что существование синхронизации в случае идентичных систем представляется почти очевидным фактом, поскольку непосредственно из уравнений (2), следует, что $x_1(t) = x_2(t)$, $y_1(t) = y_2(t)$ является решением (точнее, - интегральным многообразием) системы. На многообразии связанная система (2.) распадается на пару синхронизированных осцилляторов. В данном случае роль связи сводится к обеспечению устойчивости хаотической синхронизации.

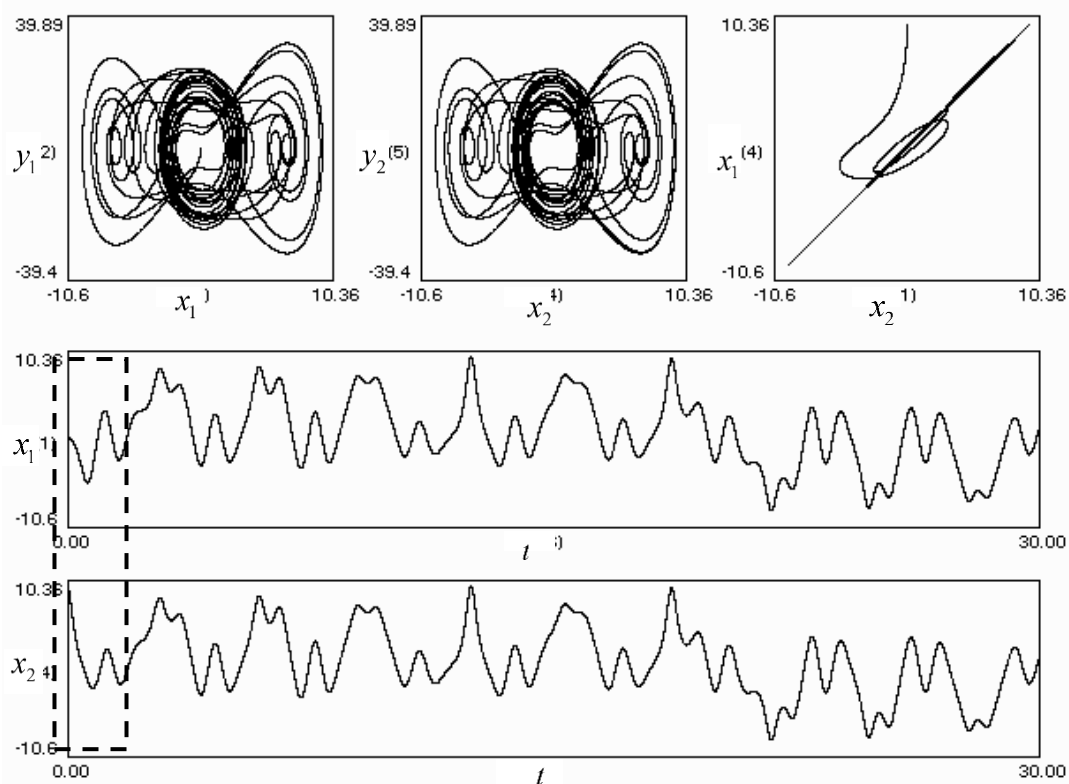


Рис.3. Переходный процесс и полная хаотическая синхронизация: $q = 50, \Omega = 2$,
 $k_1 = k_2 = k = 0.46, \varepsilon = 1.5$.

Для неидентичных осцилляторов ситуация меняется радикально. В этом случае такого простого экспериментального критерия синхронности колебаний как движения на диагоналях нет. Вместо диагонали на плоскости (x_1, x_2) изображающая точка (точнее, - ее проекция) хаотически движется в пределах некоторой полосы и если наблюдать только это движение, то трудно говорить о том: существует ли в данном случае синхронизация осцилляторов или нет.

В данном случае важно было обратить внимание на то, что парциальные фазовые точки (проекции фазовой точки на подпространства осцилляторов) движутся согласованно и вырисовывают геометрически подобные фазовые портреты. Другими словами, важным является то, что между парциальными фазовыми портретами синхронизированных осцилляторов существует пространственно-временная связь, рис.4.

В простейшем случае один фазовый портрет получается из другого в результате растяжения (сжатия), а далее любая его часть отображается на соответствующую часть другого в результате некоторого постоянного временного сдвига по траекториям. Реализации соответственных переменных осцилляторов имеют те же самые свойства: одна из них может быть получена из другой в результате двух операций- растяжения по ординате и сдвига по времени, рис.4. В данном случае, несмотря на существенную разницу параметров осцилляторов ($k_1 = 0.82, k_2 = 0.1$), временной сдвиг практически отсутствует. В результате наблюдения хаотической синхронизации различных осцилляторов, было дано следующее ее определение.

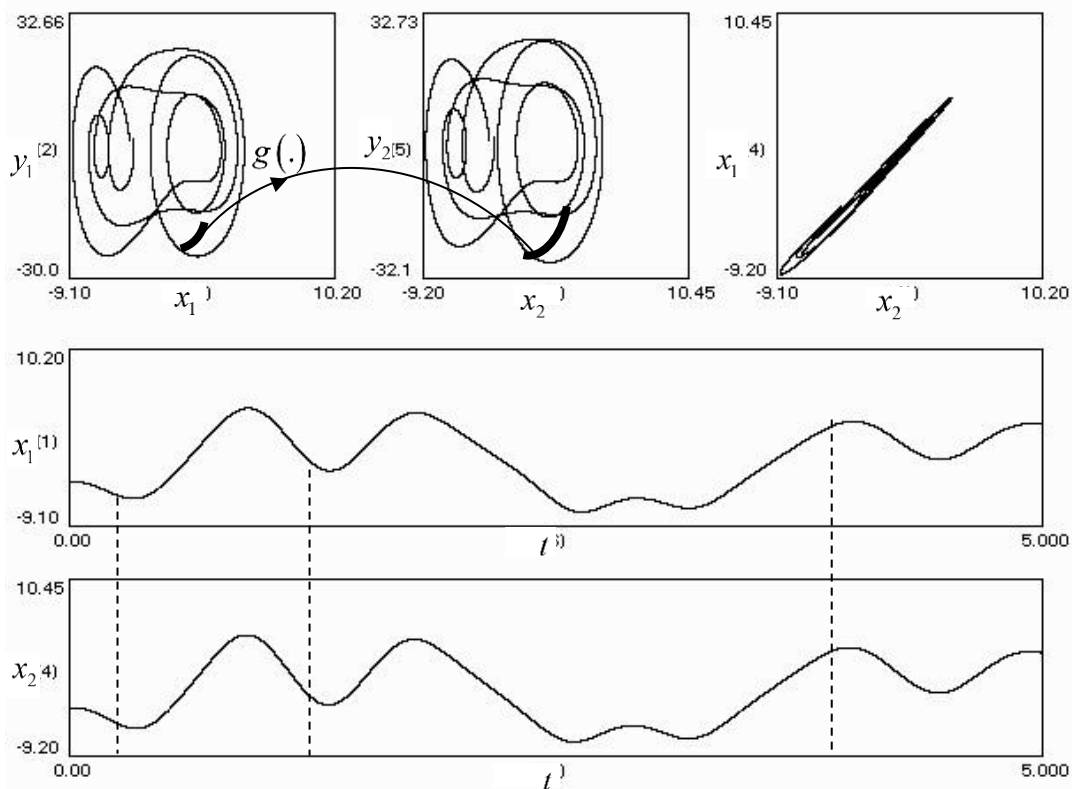


Рис.4. Взаимосвязь парциальных фазовых портретов неидентичных осцилляторов в режиме синхронизации: $q = 50, \Omega = 2, k_1 = 0.82, k_2 = 0.1, \varepsilon = 1.5$.

Определение. Пусть $\dot{\mathbf{X}}_1 = \mathbf{F}_1(\mathbf{X}_1), \dot{\mathbf{X}}_2 = \mathbf{F}_2(\mathbf{X}_2), \mathbf{X}_1 \in \mathbf{R}^n, \mathbf{X}_2 \in \mathbf{R}^m$ – динамические системы двух осцилляторов. Предположим, что каждая из этих систем имеет аттракторы A_1 и A_2 , соответственно. Рассмотрим связанную систему вида

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{X}}_1 &= \mathbf{F}_1(\mathbf{X}_1) + \varepsilon \mathbf{f}_1(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2), \\ \dot{\mathbf{X}}_2 &= \mathbf{F}_2(\mathbf{X}_2) + \varepsilon \mathbf{f}_2(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) \end{aligned}$$

Будем говорить, что имеет место синхронизация осцилляторов (в частности хаотическая) для значений параметра связи из интервала $\varepsilon_1 < \varepsilon < \varepsilon_2$, если для этих значений ε существует аттрактор A_ε , такой, что:

1. его образы $\pi_1(A_\varepsilon)$ и $\pi_2(A_\varepsilon)$ при проекциях на “парциальные пространства” переводятся один в другой с помощью взаимно однозначного, взаимно непрерывного отображения, т.е. гомеоморфные (π_1 и π_2 – естественные проекции на подпространства \mathbf{X}_1 и \mathbf{X}_2),
2. существует гомеоморфное отображение $g: \pi_1(A_\varepsilon) \rightarrow \pi_2(A_\varepsilon)$, со следующими свойствами:
 - а) g – Липшиц непрерывно на $\pi_1(A_\varepsilon)$, б) для любой траектории $\{T^t(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)\} \subset A_\varepsilon$, где T^t – отображение сдвига по траекториям связанной системы,

б) $g(\pi_1(T^t(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2))) = \pi_2(T^{rt + \alpha(t)}(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2))$, причем $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{rt + \alpha(t)}{t} = r$ – рациональное число.

Если $r=1$, то синхронизацию называем “простой”, а во всех других случаях – “кратной”. Кратная синхронизация хаотических колебаний с числом вращения $r=2$ обнаружена в работе [8]. Заметим, что введенное “число вращения” r является аналогом числа вращения Пуанкаре на торе.

Данное *определение* фактически утверждает, что все индивидуальные характеристики колебаний синхронизированных осцилляторов: спектры, размерности и т.д. являются или подобными или равными. На рис.5 представлены спектры мощности реализаций $x_1(t)$ и $x(t) = x_1(t) - x_2(t)$ в режиме хаотической синхронизации [9].

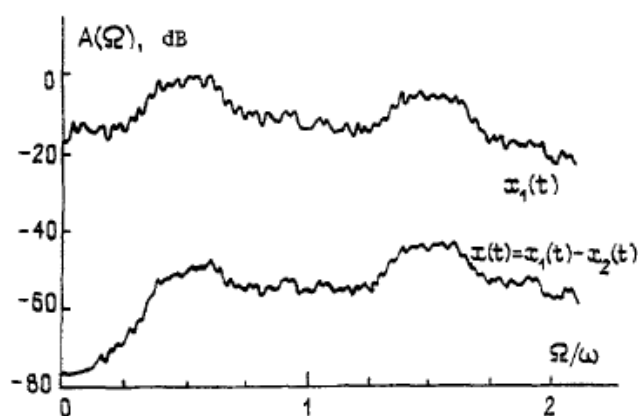


Рис.5. Спектры мощности реализаций переменных в режиме хаотической синхронизации осцилляторов.

Видим, что два спектра повторяют друг друга даже в мелких деталях.

На рис.6 представлена эволюция фрактальной размерности аттрактора связанной системы осцилляторов при увеличении параметра связи [9].

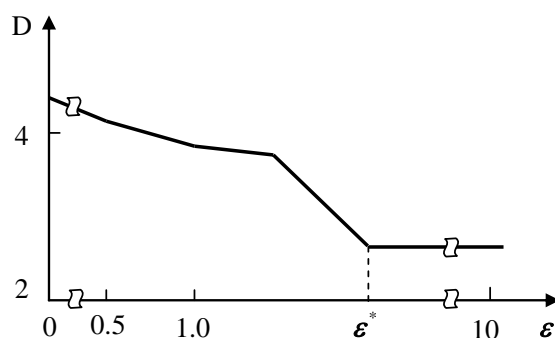


Рис.6. Эволюция фрактальной размерности хаотического аттрактора системы (2).

При достаточно малых значениях ε величина размерности аттрактора связанной системы практически равна сумме размерностей аттракторов несвязанных осцилляторов. С увеличением связи размерность монотонно падает и при полной синхронизации стабилизируется, оставаясь далее неизменной при значениях $\varepsilon > \varepsilon^*$. При этом : $\dim \pi_1(A_\varepsilon) = \dim \pi_2(A_\varepsilon) = \dim A_\varepsilon$. Объяснить данное поведение размерности достаточно

просто. Напомним, что в случае классической синхронизации эволюция размерности аттрактора взаимодействующих осцилляторов протекает скачкообразно. А именно, при малой связи в фазовом пространстве системы имеется устойчивый двумерный тор с квазипериодической обмоткой (режим биений). При этом размерность аттрактора равняется двум. Далее на торе рождается устойчивый предельный цикл (режим синхронизации), и размерность аттрактора уменьшается скачком до единицы. Возвращаясь к рассматриваемому случаю имеем следующую ситуацию. При малых ε аттрактор связанной системы включает в себя счетное множество двумерных торов седлового типа. С увеличением связи, на каждом из этих торов (последовательно) рождаются предельные циклы седлового типа, и каждое такое рождение влечет за собой упорядочение взаимного движения, поскольку циклы имеют устойчивые по трансверсалиям к многообразию направления. То есть, весь падающий участок на графике размерности – «растянутый скачок», который представляет собой бесконечную последовательность скачков ничтожно малой амплитуды.

3. Асимптотическая теория. В рамках приведенного выше *определения* синхронизации построим ее количественную асимптотическую теорию для случая слабо неидентичных осцилляторов с линейной диссипативной связью. С другими асимптотическими исследованиями можно ознакомиться в [10].

Рассматриваем связанную систему двух однопериодических хаотических осцилляторов, со слабо неидентичными параметрами:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{X}}_1 &= \mathbf{F}(\mathbf{X}_1) - \varepsilon \mathbf{C}(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2) + \mu \mathbf{F}_1^*(\mathbf{X}_1, \mu), \\ \dot{\mathbf{X}}_2 &= \mathbf{F}(\mathbf{X}_2) + \varepsilon \mathbf{C}(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2) + \mu \mathbf{F}_2^*(\mathbf{X}_2, \mu) \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь μ – некоторый безразмерный малый параметр, отражающий малую неидентичность параметров осцилляторов, \mathbf{C} - диагональная матрица, определяющая набор связанных переменных осцилляторов. В частности, для системы (2) $\mathbf{C} = \text{diag}(0, 1)$.

В первую очередь решим вопрос устойчивости синхронизации. Если $\mu = 0$, то (3) обращается в систему идентичных осцилляторов, которую далее будем называть “порождающей” системой. Соответственно, ее интегральное многообразие $M_0 = \{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \mid \mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_2\}$ - “порождающим” интегральным многообразием. Введем в системе (3) переменную $\mathbf{U} = \mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2$ и рассмотрим уравнение вида

$$\dot{\mathbf{U}} = (\mathbf{F}'(\xi(t)) - 2\varepsilon \mathbf{C})\mathbf{U} + \mu \mathbf{F}^*(t, \mathbf{U}, \mu). \quad (4)$$

Здесь $\mathbf{F}'(\cdot)$ - матрица Якоби для функции $\mathbf{F}(\mathbf{X})$, $\mathbf{F}^* = \mathbf{F}_1^* - \mathbf{F}_2^*$.

При переходе от системы (3) к уравнению (4) использована теорема Лагранжа, $\xi(t) \in M_0$. Порождающее многообразие ($\mu = 0$) соответствует решению $\mathbf{U} = 0$ этого уравнения.

Далее можно воспользоваться теорией интегральных многообразий квазилинейных систем [11], согласно которой, если порождающее многообразие уравнения (4) устойчиво, то при достаточно малом $\mu \in [0, \mu^*]$ существует и устойчиво многообразие вида

$M_\mu = \{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \mid \mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_2 + \mu \mathbf{X}^*(\mathbf{X}_2, \mu)\}$. На этом многообразии располагается аттрактор возмущенной системы, соответствующий синхронизации осцилляторов. Заметим, что часть этого многообразия, в виде некоторой узкой области - полосы, вытянутой вдоль диагонали плоскости (x_1, x_2) , мы и наблюдаем в эксперименте, рис.4. Таким образом, задача

устойчивости синхронизации сводится к задаче устойчивости тривиального решения уравнения вида

$$\dot{U} = (\mathbf{F}'(\xi(t)) - 2\varepsilon\mathbf{C})U \quad (5)$$

Видим, что если $\varepsilon = 0$, $\xi(t) \in A_0 \in M_0$, то уравнение (5) совпадает с уравнением в вариациях для одиночного осциллятора. Будем считать, что максимальный ляпуновский показатель его аттрактора нам известен и равен λ_{\max} . Этого достаточно, чтобы показать: если матрица связи является единичной, $\mathbf{C} = \mathbf{I}$, то условие устойчивости уравнения (5) выражается неравенством $\varepsilon > \lambda_{\max} / 2$, а в общем случае – неравенством $\varepsilon > \varepsilon^*$, где величина ε^* зависит не только от ляпуновского показателя, но и от структуры связей осцилляторов – матрицы \mathbf{C} . Далее решим вопрос о количественной стороне взаимосвязи фазовых портретов осцилляторов в режиме синхронизации. Эта связь близка к тождественной, а, значит, речь идет о тех добавках, которые возникают вследствие различия параметров. Представим многообразие M_μ в параметрической форме, в виде степенных рядов по малому параметру:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_1 &= \mathbf{X} + \mu\mathbf{X}_{11}(\mathbf{X}) + \mu^2\mathbf{X}_{12}(\mathbf{X}) + \dots, \\ \mathbf{X}_2 &= \mathbf{X} + \mu\mathbf{X}_{21}(\mathbf{X}) + \mu^2\mathbf{X}_{22}(\mathbf{X}) + \dots \end{aligned} \quad (6)$$

Параметром многообразия здесь является вектор \mathbf{X} . Предположим, что этот вектор является решением дифференциального уравнения вида

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X}) + \mu\mathbf{F}_*(\mathbf{X}) + \mu^2\mathbf{F}_{**}(\mathbf{X}) + \dots \quad (7)$$

Допустим, что функции $\mathbf{F}_*(\mathbf{X}), \mathbf{F}_{**}(\mathbf{X}), \dots, \mathbf{X}_{11}(\mathbf{X}), \mathbf{X}_{21}(\mathbf{X}), \dots$ некоторым образом нами найдены. Тогда синхронизация осцилляторов формально может быть интерпретирована «без самих осцилляторов» следующим образом. В $2n$ -мерном евклидовом пространстве, которое является фазовым пространством системы осцилляторов, имеется n -мерная гиперповерхность M_μ , которая заполнена фазовыми траекториями уравнения «эффективного» осциллятора (7). При этом проекции его фазового портрета, определяемые системой (6), являются парциальными фазовыми портретами синхронизированных осцилляторов. Явное выражение для функциональной связи парциальных портретов находится исключением параметра из системы (6). Другими словами, динамику ансамбля синхронизированных субъектов можно заменить динамикой одного эффективного субъекта с набором функциональных связей, отражающих количественные характеристики колебаний синхронизированных членов этого ансамбля.

Заметим, что если уравнения (6) интерпретировать как замену переменных для системы (3), то она переопределена, а, значит, имеется свобода выбора необходимого числа функциональных соотношений. Действуя далее в технике малого параметра (разложение в степенные ряды, приравнивание коэффициентов), для функций первого приближения получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_* + \dot{\mathbf{X}}_{11} &= \mathbf{F}'\mathbf{X}_{11} - \varepsilon\mathbf{C}(\mathbf{X}_{11} - \mathbf{X}_{21}) + \mathbf{F}_1^*, \\ \mathbf{F}_* + \dot{\mathbf{X}}_{21} &= \mathbf{F}'\mathbf{X}_{21} + \varepsilon\mathbf{C}(\mathbf{X}_{11} - \mathbf{X}_{21}) + \mathbf{F}_2^*. \end{aligned} \quad (8)$$

Положим в системе (8), что $\mathbf{X}_{21} + \mathbf{X}_{11} = 0$. В таком случае, для определения других функций получаем уравнения вида

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_* &= (\mathbf{F}_1^* + \mathbf{F}_2^*)/2, \\ \dot{\mathbf{X}}_{11} &= \mathbf{F}' \mathbf{X}_{11} - 2\varepsilon \mathbf{C} \mathbf{X}_{11} + (\mathbf{F}_1^* - \mathbf{F}_2^*)/2. \end{aligned} \quad (9)$$

Вместо второго уравнения из системы (9), можно решать эквивалентное ему по первому приближению уравнение в частных производных:

$$\frac{\partial \mathbf{X}_{11}}{\partial \mathbf{X}} \mathbf{F} - \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}} \mathbf{X}_{11} + 2\varepsilon \mathbf{C} \mathbf{X}_{11} = \frac{\mathbf{F}_1^* - \mathbf{F}_2^*}{2}. \quad (10)$$

Выясним вид уравнения первого приближения для эффективного осциллятора. Из правых частей системы (3) получаем: $\mathbf{F}(\mathbf{X}) + \mu \mathbf{F}_1^*(\mathbf{X}) = \mathbf{F}_1(\mathbf{X})$, $\mathbf{F}(\mathbf{X}) + \mu \mathbf{F}_2^*(\mathbf{X}) = \mathbf{F}_2(\mathbf{X})$. При этом, с учетом первого уравнения (9), правая часть уравнения (7) вычисляется следующим образом: $\mathbf{F}(\mathbf{X}) + \mu \mathbf{F}_*(\mathbf{X}) = \mathbf{F}(\mathbf{X}) + \mu (\mathbf{F}_1^* + \mathbf{F}_2^*)/2 = (\mathbf{F}_1(\mathbf{X}) + \mathbf{F}_2(\mathbf{X}))/2$. Получаем, ожидаемый, но тем более и ценный для теории результат: эффективный осциллятор имеет параметры среднеарифметические параметров взаимодействующих осцилляторов. В эксперименте, результат которого изображен на рис.4: $k_1 = 0.82$, $k_2 = 0.1$, $(k_1 + k_2)/2 = 0.46$. Здесь изображен небольшой отрезок траектории. Однако, если бы этот отрезок был много больше, то получилась бы картина, на визуальном уровне не отличимая от фазового портрета изображенного на рис. 1,б, для которого $k = 0.46$. В другой асимптотике в [6] получен такой же результат.

В общем случае решение уравнения (10) представляет собой трудоемкую задачу. Приведем здесь пример вида возмущений, для которого существует простое решение. Допустим, что $(\mathbf{F}_1^* - \mathbf{F}_2^*)/2 = \nu \mathbf{C} \mathbf{F}$, где ν – число. Тогда непосредственной подстановкой можно убедиться, что $\mathbf{X}_{11} = \Delta \cdot \mathbf{F}(\mathbf{X})$, где $\Delta = \nu/2\varepsilon$, является решением уравнения (10). В этом случае уравнения (6) в первом приближении имеют вид: $\mathbf{X}_1 = \mathbf{X} + \mu \Delta \dot{\mathbf{X}}$, $\mathbf{X}_2 = \mathbf{X} - \mu \Delta \dot{\mathbf{X}}$. В свою очередь, это определяет отображение сдвига по траекториям: $\mathbf{X}_1(t) = \mathbf{X}_2(t + 2\mu\Delta)$ (первое приближение).

Иллюстрация временного (фазового) сдвига приведена на рис.7. Численный эксперимент проводился над системой связанных хаотических осцилляторов Чуа:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \alpha_1 (y_1 - h(x_1)) - \varepsilon (x_1 - x_2), \\ \dot{y}_1 &= x_1 - y_1 + z_1, \\ \dot{z}_1 &= -\beta y_1 - \gamma z_1, \\ \dot{x}_2 &= \alpha_2 (y_2 - h(x_2)) + \varepsilon (x_1 - x_2), \\ \dot{y}_2 &= x_2 - y_2 + z_2, \\ \dot{z}_2 &= -\beta y_2 - \gamma z_2, \end{aligned}$$

$$h(x) = m_1 x + \frac{1}{2}(m_2 - m_1)(|x + 1| - |x - 1|).$$

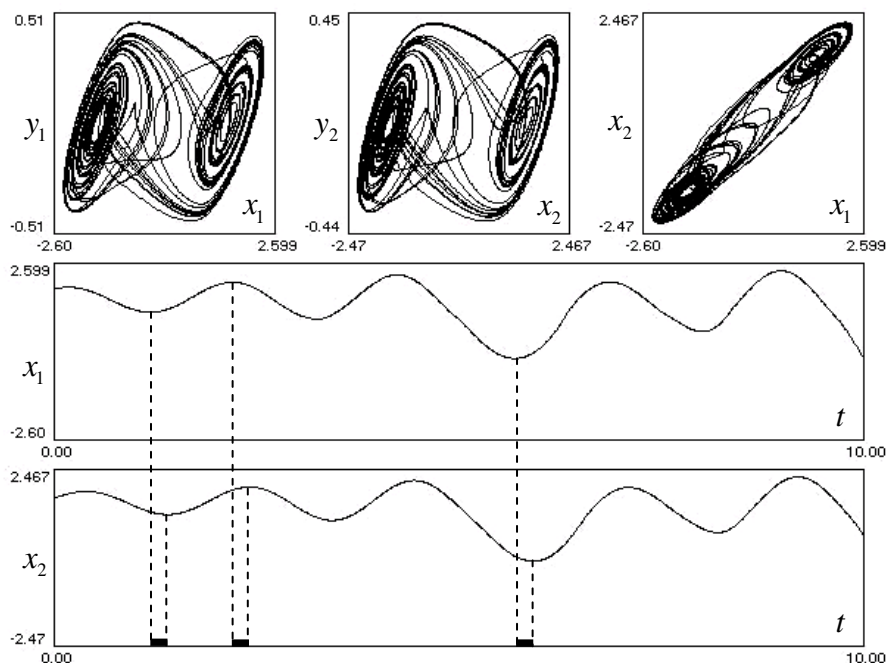


Рис. 7. Временной сдвиг синхронизированных хаотических колебаний.

Значения параметров в эксперименте: $\{\alpha_1, \alpha_2, \beta, \gamma, m_2, m_1, \varepsilon\} = \left\{14, 4, 14, 0.1, -\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, 2\right\}$.

Теоретический параметр сдвига $2\mu\Delta = \phi_0 = (\alpha_1 - \alpha_2) / \varepsilon(\alpha_1 + \alpha_2) = 5/18$. Непосредственно по рисунку можно убедиться в достаточной точности теории, несмотря на то, что параметры осцилляторов не отличаются высокой близостью (известное “чудо” малого параметра). Естественно, здесь остается в силе и то, что аттрактор A_μ связанной системы по своим свойствам близок к аттрактору эффективного осциллятора с параметром $\alpha = (\alpha_1 + \alpha_2) / 2 = 9$.

4. Вместо заключения. Начиная с 90-х прошлого века и по настоящее время, исследования хаотической синхронизации развиваются чрезвычайно интенсивно и количество публикаций на эту тему огромно. Явление многогранно и с самого начала исследований стало обильно обрастать собственной терминологией: “bubbling synchronization” [12,13], “generalized synchronization” [14-16], “phase synchronization” [17], “lag synchronization” [18], “riddled basins of attraction” [19], “on-off intermittency” [20] и др.

К настоящему времени уже сформировалось несколько направлений теоретических и прикладных исследований.

Одно из них, - современные информационные технологии. Первые сообщения об экспериментах по передаче информации на основе хаотической синхронизации появились в начале 90-х годов [21-23]. Привлекательность использования динамического хаоса в передаче информации связана со следующими обстоятельствами. Во-первых, с широкополосностью сигнала носителя, - с его большой информационной емкостью. Во-вторых, - с возможностью конфиденциальности (скрытности) передачи информации.

Конфиденциальность связи достигается в результате того, что “эталонный” автогенератор, определяющий хаотическую несущую информационного сигнала, синхронизируется только с аналогичным ему по динамике автогенератором.

Другое направление связано с моделированием биологических нервных тканей, а также искусственных нейроноподобных сетей. Многочисленные физиологические наблюдения за деятельностью различных отделов головного мозга показывают хаотичность их динамики. Таковой она может быть как отражение нормальной жизнедеятельности, или стать таковой вследствие кризисного состояния объекта [73, 74]. По этой причине моделирование нервных сетей в виде связанных динамических систем с хаотической динамикой представляется правдоподобным и дает достаточно адекватные результаты. Число публикаций по моделированию биологических систем огромно. С частью из них можно ознакомиться в обзорах [24, 25].

Наконец, нельзя не упомянуть исследований диссипативных структур в решетках осцилляторов. Эти объекты, с одной стороны, имеют собственные технические приложения (антенные решетки, фрактальные антенны и др.), а с другой стороны, представляют собой адекватные дискретные модели для описания структурной динамики сплошных сред. Решетки начали исследоваться давно, безотносительно к хаотической синхронизации, однако, она «вдохнула» в эти исследования новое содержание. Стало очевидным, что именно хаотическая синхронизация лежит в основе образования структур с локальной турбулентной динамикой – структурной турбулентности. Самым известным примером здесь являются конвективные структуры, с хаотической динамикой элементов в виде конвективных валов или ячеек Бенара. Вероятно, что турбулентные структуры является одним, если не главным, из механизмов образования развитой турбулентности. По крайней мере, числовые свойства инвариантных многообразий решеток [26-28] и математические теории «числовой» турбулентности говорят именно об этом.

Список литературы

1. Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. - М. – Л.: ОГИЗ, 1947.
2. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. - М. – Л.: ГИТТЛ, 1950. - 472 с.
3. Van der Pol B. [1927] Forced oscillation in circuit with non-linear resistance. // Philos. Mag. – 1927, Ser. 7. - Vol.3, No 13. - P.65-80.
4. Андронов А.А., Витт А.А. К математической теории захватывания // Журнал прикладной физики. - 1930. - Т.7, № 4. - С.3-11.
5. Крылов Н.М., Боголюбов Н.Н. Введение в нелинейную механику. - М.– Ижевск: НИЦ «РХД», 2004. - 354 с.
6. Yamada T., Fujisaka H. Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems // Prog. Theor. Phys. - 1983. - Vol.70. - P.1240-1248.
7. Афраимович В.С., Веричев Н.Н., Рабинович М.И. Стохастическая синхронизация колебаний в диссипативных системах // Изв. вузов. Радиофизика. - 1986. - Т.29, №9. - С.1050-1060.
8. Rulkov N.F., Afraimovich V.S., Lewis C.T., Chazottes J.-R., Cordonet A. Multi-valued in generalized chaos synchronization // Phys. Rev. E. - 2001. - Vol. 64, 016217.
9. Verichev N.N., Maksimov A.G. Synchronization of stochastic oscillations of parametrically excited nonlinear oscillators // Radiophysics and Quantum Electronics. - 1989. - Vol. 32, No 8. - P. 713-716.
10. Verichev N.N., Verichev S.N., Wiercigroch M. Asymptotic theory of synchronization for dissipative-coupled dynamical systems // Chaos, Solitons & Fractals. - 2009. - Vol. 41, No 2. - P. 752-763.

11. Митропольский Ю.А., Лыкова О.Б. Интегральные многообразия в нелинейной механике. - М.: Наука, 1973. - 512с.
12. Ashwin P., Buescu J., Stewart I. Bubbling of attractors and synchronization of oscillators // Phys. Lett. A. - 1994. - Vol.193. - P.126-139.
13. Heagy J.F., Carroll T.L., Pecora L.M. Desynchronization by periodic orbits // Phys. Rev. E. - 1995. - Vol. 52. - P.1253-1256.
14. Rulkov N.F., Suschik M.M., Tsimring L.S., Abarbanel H.D. Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems // Phys. Rev. E. - 1995. - Vol. 51. - P.980-994.
15. Abarbanel H.D., Rulkov N.F., Suschik M.M. Generalized synchronization of chaos: The auxiliary system approach // Phys. Rev. E. - 1996. - Vol. 53. - 4528.
16. Kocarev L., Parlitz U. Generalized synchronization, predictability, and equivalence of unidirectionally coupled dynamical systems // Phys. Rev. Lett. - 1996. - Vol. 76. - P.1816-1819.
17. Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J. Phase synchronization of chaotic oscillators // Phys. Rev. Lett. - 1996. - Vol.76. - P.1804-1807.
18. Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J. From phase to lag synchronization in coupled chaotic oscillators // Phys. Rev. Lett. - 1997. - Vol. 78. - P. 4193-4196.
19. Alexander J.C., Yorke J.A., You Z., Kan I. Riddled basins // International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering. - 1992. - Vol. 2. - P.795-813.
20. Yu L., Ott E., Chen Q. Fractal distribution of floaters on a fluid surface and the transition to chaos for random maps // Physica D. - 1992. - Vol. 53. - P.102-124.
21. Дмитриев А.С., Панас А.И., Старков С.О. Динамический хаос как парадигма современных систем связи // Успехи современной радиоэлектроники. - 1997. - № 10. - С.4-26.
22. Kocarev L., Halle K.S., Eckert K., Chua L., Parlitz U. Experimental demonstration of secure communications via chaotic synchronization // Int. J. Bifurcation and Chaos. - 1992. - Vol. 2, No 3. - P. 709-713.
23. Dedieu H., Kennedy M., Hasler M. Chaos shift keying: Modulation and demodulation of a chaotic carrier using self-synchronizing Chua's circuits // IEEE Trans. Circuits Syst.-II: Analog Digit. Signal Process. - 1993. - Vol. 40. - P. 634-642.
24. Абарбанель Г.Д., Рабинович М.И., Селверстон А., Баженов М.В., Хуэрта Р., Сущик М.М., Рубчинский Л.Л. Синхронизация в нейронных ансамблях // Успехи физических наук. - 1996. - Т.166, № 4. - С.363-390.
25. Борисюк Г.Н., Борисюк Р.М., Казанович Я.Б., Иваницкий Г.Р. Моделирование динамики нейронной активности и обработка информации в мозге – итоги «десятилетия» // Успехи физических наук. - 2002. - Т. 172, № 10. - С.1189-1214.
26. Josic K. Invariant manifolds and synchronization of coupled dynamical systems // Phys. Rev. Lett. - 1998. - Vol. 80. - P.3053-3056.
27. Georgiou I.T., Bajaj A.K., Corless M. Invariant manifolds and chaotic vibrations in singularly perturbed nonlinear oscillators // Int. J. Eng. Sci. - 1998. - Vol. 36. - P. 431-458.
28. Belykh V.N., Belykh I.V., Hasler M. Hierarchy and stability of partially synchronous oscillations of diffusively coupled dynamical systems // Phys. Rev. E. - 2000. - Vol. 62. P.6332-6345.

Дата поступления: 22 марта 2018 г.