

УДК 534.11

## НАХОЖДЕНИЕ ЧАСТНОГО КЛАССА РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ, ОПИСЫВАЮЩЕГО ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ КАНАТА, ОБЛАДАЮЩЕГО ИЗГИБНОЙ ЖЕСТКОСТЬЮ И ЛЕЖАЩЕГО НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

© Владислав Львович Литвинов<sup>1,2</sup><sup>1</sup>Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия<sup>2</sup>Самарский государственный технический университет, Самара, Россия[vladlitvinov@rambler.ru](mailto:vladlitvinov@rambler.ru)

*Аннотация.* Исследован волновой процесс поперечных колебаний каната, с учетом изгибной жесткости и жесткости подложки. С помощью известного решения типа бегущей волны найден частный класс решений задачи, описывающий бегущие не искажающиеся волны в виде произведения двух периодических функций, одна из которых описывает быстроосциллирующую волну, а другая – медленные изменения огибающей. Данное свойство может быть использовано при изучении резонансных характеристик объектов переменной длины.

**Ключевые слова:** поперечные колебания каната, решение типа бегущей волны, суперпозиция гармонических волн, амплитуда колебаний.

## FINDING A PRIVATE CLASS OF SOLUTIONS OF THE DIFFERENTIAL EQUATION DESCRIBING THE TRANSVERSE VIBRATIONS OF A ROPE WITH BENDING STIFFNESS AND LYING ON THE ELASTIC BASIS

© Vladislav L. Litvinov<sup>1,2</sup><sup>1</sup>Moscow State University, Moscow, Russia<sup>2</sup>Samara State Technical University, Samara, Russia[vladlitvinov@rambler.ru](mailto:vladlitvinov@rambler.ru)

**Abstract.** The studied wave process transverse vibrations of a rope, taking into account the Flexural rigidity and stiffness of the substrate. Using known solutions such as run-ing waves found private class of solutions describing traveling waves are not distorted as a product of two periodic functions, one of which describes the fast roscellinus wave, and the other is a slow change of the envelope. This property can be used to study the resonance characteristics of objects of variable length.

**Key words:** transverse vibrations of a rope, the solution of type traveling wave, superposition of harmonic waves, the amplitude of oscillation.

Простейшее волновое уравнение, описывающее, например, продольные колебания стержня,

$$U_{tt}(x,t) - a^2 U_{xx}(x,t) = 0, \quad (1)$$

имеет решение типа бегущей волны в виде

$$U(x,t) = f(x - vt), \quad (2)$$

где функция  $f(z)$  является функцией одного аргумента  $z = x - vt$ ,  $v = const$ . При фиксированном значении  $t$  график функции  $f(x - vt)$  получается из графика  $f(x)$  параллельным переносом в положительном направлении оси  $x$  на  $vt$  (если  $vt < 0$ , то направление переноса отрицательно). В случае непрерывного изменения  $t$  график зависимости (2), не меняя своей формы, перемещается как жесткий шаблон вдоль оси  $x$ , причем, в момент времени  $t$  перемещение равно  $vt$ , т.е.  $v$  есть скорость перемещения графика. Таким образом, бегущая волна проходит вдоль по стержню, не меняя своей формы, с постоянной скоростью  $v$  [25].

Уравнение (1) имеет общее решение в виде суперпозиции двух бегущих волн

$$U(x, t) = f_1(x - at) + f_2(x + at), \quad (3)$$

где  $f_{1,2}(z)$ - произвольные дважды дифференцируемые функции своих аргументов  $z = x \pm at$ , определяемые из начальных или краевых условий.

Бегущие волны  $f_i(x \pm at)$  распространяются без искажений, причем любое значение  $f_i(z) = const$  переносится с постоянной скоростью  $v = a$ , которая и называется скоростью распространения волны.

В более общем случае, например, когда волновой процесс описывается уравнением поперечных колебаний каната, обладающего изгибной жесткостью и лежащего на упругой подложке [7, 8, 10, 17, 18]

$$U_{tt}(x, t) - a^2 U_{xx}(x, t) + \frac{EI}{\rho} U_{xxxx}(x, t) + \frac{k_0}{\rho} U(x, t) = 0, \quad (4)$$

произвольное начальное возмущение будет искажаться по мере своего распространения. Понятие скорости волны в этом случае усложняется. Здесь  $U(x, t)$  - поперечное смещение точки каната с координатой  $x$  в момент времени  $t$ ;  $E$  - модуль упругости материала каната;  $I$  - осевой момент инерции сечения каната;  $\rho$  - линейная плотность массы каната;  $k_0$  - жесткость основания (подложки);  $a = \sqrt{T/\rho}$  - скорость распространения волн;  $T$  - сила натяжения.

Подставив (2) в (4), получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$f'''(z) + \beta f''(z) + \gamma f(z) = 0, \quad (5)$$

где  $\beta = \frac{v^2 - a^2}{\alpha^4}$ ,  $\gamma = \frac{k_0}{\rho \alpha^4}$ ,  $\alpha^4 = \frac{EI}{\rho}$ ,  $z = x - vt$ .

Из (5) следует, что:

1. Функция  $f(z)$  не может быть произвольной, так как она должна удовлетворять линейному однородному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами;
2. При  $|v| < a$ ,  $\beta^2 > 4\gamma$  решение имеет вид

$$f(z) = C_1 e^{p_1 z} + C_2 e^{-p_1 z} + C_3 e^{p_2 z} + C_4 e^{-p_2 z},$$

где  $C_i$  - произвольные постоянные, а  $p_i$  - корни характеристического уравнения  $p^4 + \beta p^2 + \gamma = 0$ , и безгранично возрастает при  $z \rightarrow \infty$ , что не подходит по смыслу задачи.

3. При  $|v| > a$ ,  $\beta^2 > 4\gamma$  решение в виде бегущих волн лежит в классе функций

$$U(x, t) = C_1 e^{ip_1(x-vt)} + C_2 e^{-ip_1(x-vt)} + C_3 e^{ip_2(x-vt)} + C_4 e^{-ip_2(x-vt)} \quad (6)$$

где

$$p_1 = \sqrt{\frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\gamma}}{2}}; \quad p_2 = \sqrt{\frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\gamma}}{2}}. \quad (7)$$

Найдем частный класс решений уравнения (4), который описывает бегущие не искажающиеся волны в форме (2). Будем считать, что скорость распространения волн  $V$  в этом случае заранее неизвестна. Перепишем решение (6) в виде:

$$U(x, t) = Ae^{i\omega_1(x/v-t)} + Be^{i\omega_2(x/v-t)}, \quad (8)$$

которое описывает динамический процесс, состоящий из двух гармонических волн, распространяющихся без искажений [4]. Здесь  $A, B$  – комплексные амплитуды волн,  $\omega_1, \omega_2$  – частоты, связанные со скоростью  $V$  соотношениями

$$\omega_1 = v\sqrt{\frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\gamma}}{2}}; \quad \omega_2 = v\sqrt{\frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\gamma}}{2}}. \quad (9)$$

Непосредственный физический смысл имеют действительная и мнимая части (8), которые линейно независимы и по отдельности являются решениями уравнения (4). Действительная часть (8) представляет собой сумму двух гармонических волн

$$U(x, t) = a_1 \cos(\omega_1 t - k_1 x + \varphi_1) + b_1 \cos(\omega_2 t - k_2 x + \varphi_2), \quad (10)$$

где  $a_1, b_1$  – действительные амплитуды и  $\varphi_1, \varphi_2$  – начальные фазы соответственно комплексных амплитуд  $A = a_1 e^{i\varphi_1}, B = b_1 e^{i\varphi_2}$ ;  $\omega_i = \frac{2\pi}{T_i}$  – угловая частота;  $k_i = \frac{2\pi}{\lambda_i}$  – волновое

число,  $\lambda_{1,2} = 2\pi \sqrt{\frac{2}{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\gamma}}}$  – длина волн, бегущих со скоростью  $v$ ;  $\theta_i = \omega_i t - k_i x + \varphi_i$  –

полная фаза волны.

Фазовая скорость для гармонических волн (10) равна

$$v_\phi = \frac{\omega_i}{k_i} = v,$$

так как полная фаза волны  $\theta$  остается неизменной вдоль пространственно-временных лучей  $x - v_\phi t = const$  [4, 5].

Дисперсионные соотношения (9) эквивалентны системе дисперсионных уравнений

$$\begin{cases} D_1(\omega_1, k_1) = \omega_1^2 - a^2 k_1^2 - \alpha^4 (k_1^4 + \gamma) = 0; \\ D_2(\omega_2, k_2) = \omega_2^2 - a^2 k_2^2 - \alpha^4 (k_2^4 + \gamma) = 0, \end{cases} \quad (11)$$

которая получаются при подстановке (10) в (4).

В общем случае каждое уравнение системы (11) имеет несколько корней  $\omega_i = \omega_{is}(k)$ ,  $s = 1, 2, 3, \dots$ . Каждому из них соответствует своя нормальная волна  $U(x, t) \sim e^{i(k_i x - \omega_{is} t)}$ .

В диспергирующих системах зависимость фазовой скорости  $v_\phi$  от волнового числа  $k$  или от частоты  $\omega$ , приводит к искажению формы сигнала общего вида, получающегося при наложении гармонических колебаний при его прохождении вдоль по линии.

Реальный волновой процесс, строго говоря, никогда не сводится к монохроматической волне. Гармоническая волна не изменяет своего характера в пространстве и времени при всех значениях  $-\infty < x < +\infty$ ,  $t \in (-\infty, +\infty)$ . Она является полезной математической идеализацией, но ее в природе не существует.

Чтобы передать сигнал при помощи волны, ее нужно промодулировать, т.е. изменить какой-то ее параметр, например, амплитуду, частоту или фазу. Это уже не строго монохроматическая волна и ее можно рассматривать как суперпозицию гармонических волн  $a \cos(\omega t - kx + \varphi)$ , у которых амплитуды  $a(\omega)$ , волновые числа  $k(\omega)$  и фазы  $\varphi(\omega)$  зависят от частоты.

Рассмотрим динамический процесс, состоящий из двух гармонических волн (10) с близкими частотами  $\omega_{1,2}$  ( $\omega_2 - \omega_1 \ll \omega_{1,2}$ ), одинаковыми амплитудами  $a = b$ , при нулевых начальных фазах.

Тогда

$$U(x, t) = 2a \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t - \frac{k_2 - k_1}{2} x\right) \cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t - \frac{k_2 + k_1}{2} x\right).$$

Отсюда видно, что рассматриваемый волновой процесс можно описать произведением двух периодических функций, одна из которых

$$\cos(\omega t - kx), \text{ где } \omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, k = \frac{k_1 + k_2}{2},$$

описывает быстроосциллирующую (несущую) волну, а другая

$$A(x, t) = 2a \cos(\Delta\omega t - \Delta kx), \text{ где } \Delta\omega = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}, \Delta k = \frac{k_2 - k_1}{2},$$

описывает медленные изменения огибающей.

Данное свойство использовано в работах [13-25] при изучении резонансных характеристик объектов переменной длины.

### Список литературы

1. Горошко О. А., Савин Г. Н. Введение в механику деформируемых одномерных тел переменной длины. - Киев: Наукова думка, 1971. - 270 с.
2. Савин Г.Н., Горошко О.А. Динамика нити переменной длины. – Киев: Наук.думка, 1962. - 332 стр.
3. Лежнева А.А. Изгибные колебания балки переменной длины // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. - 1970. - №1. - С. 159–161.
4. Весницкий А.И. Волны в системах с движущимися границами и нагрузками. – М.: Физматлит, 2001. – 320 с.
5. Весницкий А.И., Потапов А.И. Поперечные колебания канатов в шахтных подъемниках // Динамика систем. Горьковский университет. – 1975. – №7. – С. 84–89.
6. Кечеджиян Л.О., Пинчук Н.А., Столяр А.М. Об одной задаче математической физики с подвижной границей // Извест. вузов. Сев.–Кавк. регион. Естеств. науки. - 2008. — № 1. — С. 22–27.
7. Ерофеев В.И., Колесов Д.А., Лисенкова Е.Е. Исследование волновых процессов в одномерной системе, лежащей на упруго–инерционном основании, с движущейся нагрузкой // Вестник научно–технического развития. – 2013. - № 6 (70). – С. 18–29.
8. Ерофеев В.И., Кажяев В.В., Семерикова Н.П. Волны в стержнях. Дисперсия. Диссипация. Нелинейность. - М.: Наука. Физматлит, 2002. - 208с.

9. *Асташев В.К., Крупенин В.Л.* Волны в распределенных и дискретных виброударных системах и сильно нелинейных средах // Проблемы машиностроения и надежности машин. - 1998. - №5. - С.13-30.
10. *Крупенин В.Л.* О колебаниях струны, соударяющейся с ограничителем, состоящим из прямой и точки // Вестник научно-технического развития. - 2017. - №9 (121). - С.34-45.
11. *Самарин Ю.П.* Об одной нелинейной задаче для волнового уравнения в одномерном пространстве // Прикладная математика и механика. – 1964. – Т. 26, В. 3. – С. 77–80.
12. *Самарин Ю.П., Анисимов В.Н.* Вынужденные поперечные колебания гибкого звена при разгоне // Изв. вузов. Машиностроение. – 1986. - (12).- С. 17–21.
13. *Анисимов В.Н., Литвинов В.Л.* Математические модели продольно–поперечных колебаний объектов с движущимися границами // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. «Физико–математические науки». – 2015. - 2 (19). – С. 382–397.
14. *Анисимов В.Н., Литвинов В.Л.* Резонансные свойства механических объектов с движущимися границами: монография. – Самара: Самар. гос. техн. ун–т, 2009. – 131 с.
15. *Анисимов В.Н., Литвинов В.Л.* Исследование резонансных свойств механических объектов с движущимися границами при помощи метода Канторовича–Галеркина // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. «Физико–математические науки». – 2009. - 1 (18). – С. 149–158.
16. *Анисимов В.Н., Литвинов В.Л., Корпен И.В.* Об одном методе получения аналитического решения волнового уравнения, описывающего колебания систем с движущимися границами // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. «Физико–математические науки». – 2012. - 3 (28). – С. 145–151.
17. *Литвинов В.Л.* Решение краевых задач с движущимися границами при помощи метода замены переменных в функциональном уравнении // Журнал Средневолжского математического общества. – 2013. - Т. 15, № 3. – С. 112–119.
18. *Анисимов В.Н., Литвинов В.Л.* Анализ влияния движения границ при исследовании резонансных свойств систем с демпфированием // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. «Физико–математические науки». – 2009. - 2 (19). – С. 147–152.
19. *Анисимов В.Н., Литвинов В.Л.* Вычисление собственных частот поперечных колебаний вязкоупругого каната, движущегося в продольном направлении и имеющего изгибную жесткость // Математическое моделирование и краевые задачи: Труды Пятой Всероссийской научной конференции с международным участием. Ч. 1: Математические модели механики, прочности и надежности элементов конструкций. – Самара: СамГТУ, 2008. – 358 с.
20. *Литвинов В.Л., Анисимов В.Н.* Математическое моделирование и исследование колебаний одномерных механических систем с движущимися границами: монография. – Самара: Самар. гос. техн. ун–т, 2017. – 149 с.
21. *Литвинов В.Л.* Поперечные колебания вязкоупругого каната, лежащего на упругом основании, с учетом влияния сил сопротивления среды // Вестник научно–технического развития. – 2015. - № 4 (92). — С. 29–33.
22. *Анисимов В. Н., Литвинов В.Л.* Вычисление собственных частот каната движущегося в продольном направлении // Журнал Средневолжского математического общества. — 2017. — Т. 19, № 1. — С. 130–139.
23. *Литвинов В.Л.* Продольные колебания каната переменной длины с грузом на конце // Вестник научно–технического развития. – 2016. - № 1 (101). — С. 19–24.

24. *Литвинов В.Л.* Применение метода Канторовича-Галеркина при исследовании резонансных свойств систем с демпфированием // Вестник научно-технического развития. – 2017. - № 2 (114). — С. 37–46.
25. *Анисимов В. Н., Литвинов В.Л.* Аналитический метод решения волнового уравнения с широким классом условий на движущихся границах // Вестник научно-технического развития. – 2016. - № 2 (102). — С. 28–35.
26. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики, 4. - М.: Физматгиз, 1958.
27. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. - М.: Наука, 1976. - 576 с.
28. *Мышкис А.Д.* Элементы теории математических моделей. Изд. 5-е. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2011. – 192 с.

*Дата поступления статьи: 4 февраля 2018 года.*