DOI: 10.18411/vntr2018-125-3

УДК 534.11

НАХОЖДЕНИЕ ЧАСТНОГО КЛАССА РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ, ОПИСЫВАЮЩЕГО ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ КАНАТА, ОБЛАДАЮЩЕГО ИЗГИБНОЙ ЖЕСТКОСТЬЮ И ЛЕЖАЩЕГО НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

© Владислав Львович Литвинов[1,2]
[1]*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
[2]*Самарский государственный технический университет, Самара, Россия*
vladlitvinov@rambler.ru

Аннотация. *Исследован волновой процесс поперечных колебаний каната, с учетом изгибной жесткости и жесткости подложки. С помощью известного решения типа бегущей волны найден частный класс решений задачи, описывающий бегущие не искажающиеся волны в виде произведения двух периодических функций, одна из которых описывает быстроосциллирующую волну, а другая – медленные изменения огибающей. Данное свойство может быть использовано при изучении резонансных характеристик объектов переменной длины.*

Ключевые слова: *поперечные колебания каната, решение типа бегущей волны, суперпозиция гармонических волн, амплитуда колебаний.*

FINDING A PRIVATE CLASS OF SOLUTIONS OF THE DIFFERENTIAL EQUATION DESCRIBING THE TRANSVERSE VIBRATIONS OF A ROPE WITH BENDING STIFFNESS AND LYING ON THE ELASTIC BASIS

© Vladislav L. Litvinov[1,2]
[1]*Moscow State University, Moscow, Russia*
[2]*Samara State Technical University, Samara, Russia*
vladlitvinov@rambler.ru

Abstract. *The studied wave process transverse vibrations of a rope, taking into account the Flexural rigidity and stiffness of the substrate. Using known solutions such as run-ing waves found private class of solutions describing traveling waves are not distorted as a product of two periodic functions, one of which describes the fast roscellinus wave, and the other is a slow change of the envelope. This property can be used to study the resonance characteristics of objects of variable length.*

Key words: *transverse vibrations of a rope, the solution of type traveling wave, superposition of harmonic waves, the amplitude of oscillation.*

Простейшее волновое уравнение, описывающее, например, продольные колебания стержня,

$$U_{tt}(x,t) - a^2 U_{xx}(x,t) = 0, \tag{1}$$

имеет решение типа бегущей волны в виде

$$U(x,t) = f(x - vt), \tag{2}$$

где функция $f(z)$ является функцией одного аргумента $z = x - vt,\ v = const.$ При фиксированном значении t график функции $f(x - vt)$ получается из графика $f(x)$ параллельным переносом в положительном направлении оси x на vt (если $vt < 0$, то направление переноса отрицательно). В случае непрерывного изменения t график зависимости (2), не меняя своей формы, перемещается как жесткий шаблон вдоль оси x, причем, в момент времени t перемещение равно vt, т.е. v есть скорость перемещения графика. Таким образом, бегущая волна проходит вдоль по стержню, не меняя своей формы, с постоянной скоростью v [25].

Уравнение (1) имеет общее решение в виде суперпозиции двух бегущих волн

$$U(x,t) = f_1(x - at) + f_2(x + at), \tag{3}$$

где $f_{1,2}(z)$ - произвольные дважды дифференцируемые функции своих аргументов $z = x \pm at$, определяемые из начальных или краевых условий.

Бегущие волны $f_i(x \pm at)$ распространяются без искажений, причем любое значение $f_i(z) = const$ переносится с постоянной скоростью $v = a$, которая и называется скоростью распространения волны.

В более общем случае, например, когда волновой процесс описывается уравнением поперечных колебаний каната, обладающего изгибной жесткостью и лежащего на упругой подложке [7, 8, 10, 17, 18]

$$U_{tt}(x,t) - a^2 U_{xx}(x,t) + \frac{EI}{\rho} U_{xxxx}(x,t) + \frac{k_0}{\rho} U(x,t) = 0, \tag{4}$$

произвольное начальное возмущение будет искажаться по мере своего распространения. Понятие скорости волны в этом случае усложняется. Здесь $U(x,t)$ - поперечное смещение точки каната с координатой x в момент времени t; $E -$ модуль упругости материала каната; I - осевой момент инерции сечения каната; ρ - линейная плотность массы каната; k_0 - жесткость основания (подложки); $a = \sqrt{T/\rho}$ - скорость распространения волн; T - сила натяжения.

Подставив (2) в (4), получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$f''''(z) + \beta f''(z) + \gamma f(z) = 0, \tag{5}$$

где $\beta = \dfrac{v^2 - a^2}{\alpha^4},\ \gamma = \dfrac{k_0}{\rho\alpha^4},\ \alpha^4 = \dfrac{EI}{\rho},\ z = x - vt.$

Из (5) следует, что:

1. Функция $f(z)$ не может быть произвольной, так как она должна удовлетворять линейному однородному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами;
2. При $|v| < a,\ \beta^2 > 4\gamma$ решение имеет вид

$$f(z) = C_1 e^{p_1 z} + C_2 e^{-p_1 z} + C_3 e^{p_2 z} + C_4 e^{-p_2 z},$$

где C_i - произвольные постоянные, а p_i - корни характеристического уравнения $p^4 + \beta p^2 + \gamma = 0,$ и безгранично возрастает при $z \to \infty$, что не подходит по смыслу задачи.

3. При $|v| > a,\ \beta^2 > 4\gamma$ решение в виде бегущих волн лежит в классе функций

$$U(x,t) = C_1 e^{ip_1(x-vt)} + C_2 e^{-ip_1(x-vt)} + C_3 e^{ip_2(x-vt)} + C_4 e^{-ip_2(x-vt)} \tag{6}$$

где

$$p_1 = \sqrt{\frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\gamma}}{2}} =; \; p_2 = \sqrt{\frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\gamma}}{2}}. \tag{7}$$

Найдем частный класс решений уравнения (4), который описывает бегущие не искажающиеся волны в форме (2). Будем считать, что скорость распространения волн v в этом случае заранее неизвестна. Перепишем решение (6) в виде:

$$U(x,t) = Ae^{i\omega_1(x/v-t)} + Be^{i\omega_2(x/v-t)}, \tag{8}$$

которое описывает динамический процесс, состоящий из двух гармонических волн, распространяющихся без искажений [4]. Здесь $A, B-$ комплексные амплитуды волн, $\omega_1, \omega_2 -$ частоты, связанные со скоростью v соотношениями

$$\omega_1 = v\sqrt{\frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\gamma}}{2}}; \; \omega_2 = v\sqrt{\frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\gamma}}{2}}. \tag{9}$$

Непосредственный физический смысл имеют действительная и мнимая части (8), которые линейно независимы и по отдельности являются решениями уравнения (4). Действительная часть (8) представляет собой сумму двух гармонических волн

$$U(x,t) = a_1 \cos(\omega_1 t - k_1 x + \varphi_1) + b_1 \cos(\omega_2 t - k_2 x + \varphi_2), \tag{10}$$

где $a_1, b_1 -$ действительные амплитуды и $\varphi_1, \varphi_2 -$ начальные фазы соответственно комплексных амплитуд $A = a_1 e^{i\varphi_1}, B = b_1 e^{i\varphi_2}$; $\omega_i = \dfrac{2\pi}{T_i} -$ угловая частота; $k_i = \dfrac{2\pi}{\lambda_i}$ - волновое число, $\lambda_{1,2} = 2\pi\sqrt{\dfrac{2}{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\gamma}}}$ – длина волн, бегущих со скоростью v; $\theta_i = \omega_i t - k_i x + \varphi_i$ – полная фаза волны.

Фазовая скорость для гармонических волн (10) равна

$$v_{ф} = \frac{\omega_i}{k_i} = v,$$

так как полная фаза волны θ остается неизменной вдоль пространственно-временных лучей $x - v_{ф} t = const$ [4, 5].

Дисперсионные соотношения (9) эквивалентны системе дисперсионных уравнений

$$\begin{cases} D_1(\omega_1, k_1) = \omega_1^2 - a^2 k_1^2 - \alpha^4 (k_1^4 + \gamma) = 0; \\ D_2(\omega_2, k_2) = \omega_2^2 - a^2 k_2^2 - \alpha^4 (k_2^4 + \gamma) = 0, \end{cases} \tag{11}$$

которая получаются при подстановке (10) в (4).

В общем случае каждое уравнение системы (11) имеет несколько корней $\omega_i = \omega_{is}(k), \; s = 1, 2, 3, \ldots$. Каждому из них соответствует своя нормальная волна $U(x,t) \sim e^{i(k_i x - \omega_{is} t)}$.

В диспергирующих системах зависимость фазовой скорости $v_{ф}$ от волнового числа k или от частоты ω, приводит к искажению формы сигнала общего вида, получающегося при наложении гармонических колебаний при его прохождении вдоль по линии.

Реальный волновой процесс, строго говоря, никогда не сводится к монохроматической волне. Гармоническая волна не изменяет своего характера в пространстве и времени при всех значениях $-\infty < x < +\infty,\ t \in (-\infty, +\infty)$. Она является полезной математической идеализацией, но ее в природе не существует.

Чтобы передать сигнал при помощи волны, ее нужно промодулировать, т.е. изменить какой-то ее параметр, например, амплитуду, частоту или фазу. Это уже не строго монохроматическая волна и ее можно рассматривать как суперпозицию гармонических волн $a\cos(\omega t - kx + \varphi)$, у которых амплитуды $a(\omega)$, волновые числа $k(\omega)$ и фазы $\varphi(\omega)$ зависят от частоты.

Рассмотрим динамический процесс, состоящий из двух гармонических волн (10) с близкими частотами $\omega_{1,2}$ $(\omega_2 - \omega_1 << \omega_{1,2})$, одинаковыми амплитудами $a = b$, при нулевых начальных фазах.

Тогда

$$U(x,t) = 2a\cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t - \frac{k_2 - k_1}{2}x\right)\cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t - \frac{k_2 + k_1}{2}x\right).$$

Отсюда видно, что рассматриваемый волновой процесс можно описать произведением двух периодических функций, одна из которых

$$\cos(\omega t - kx), \text{ где } \omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, k = \frac{k_1 + k_2}{2},$$

описывает быстроосциллирующую (несущую) волну, а другая

$$A(x,t) = 2a\cos(\Delta\omega t - \Delta kx), \text{ где } \Delta\omega = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}, \Delta k = \frac{k_2 - k_1}{2},$$

описывает медленные изменения огибающей.

Данное свойство использовано в работах [13-25] при изучении резонансных характеристик объектов переменной длины.

Список литературы

1. *Горошко О. А., Савин Г. Н.* Введение в механику деформируемых одномерных тел переменной длины. - Киев: Наукова думка, 1971. - 270 с.
2. *Савин Г.Н., Горошко О.А.* Динамика нити переменной длины. – Киев: Наук.думка, 1962. - 332 стр.
3. *Лежнева А.А.* Изгибные колебания балки переменной длины // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. - 1970. - №1. - С. 159–161.
4. *Весницкий А.И.* Волны в системах с движущимися границами и нагрузками. – М.: Физматлит, 2001. – 320 с.
5. *Весницкий А.И., Потапов А.И.* Поперечные колебания канатов в шахтных подъемниках // Динамика систем. Горьковский университет. – 1975. – №7. – С. 84–89.
6. *Кечеджиян Л.О., Пинчук Н.А., Столяр А.М.* Об одной задаче математической физики с подвижной границей // Известия вузов. Сев.–Кавк. регион. Естеств. науки. - 2008. — № 1. — С. 22–27.
7. *Ерофеев В.И., Колесов Д.А., Лисенкова Е.Е.* Исследование волновых процессов в одномерной системе, лежащей на упруго–инерционном основании, с движущейся нагрузкой // Вестник научно–технического развития. – 2013. - № 6 (70). – С. 18–29.
8. *Ерофеев В.И., Кажаев В.В., Семерикова Н.П.* Волны в стержнях. Дисперсия. Диссипация. Нелинейность. - М.: Наука. Физматлит, 2002. - 208с.

9. *Асташев В.К., Крупенин В.Л.* Волны в распределенных и дискретных виброударных системах и сильно нелинейных средах // Проблемы машиностроения и надежности машин. - 1998. - №5. - С.13-30.
10. *Крупенин В.Л.* О колебаниях струны, соударяющейся с ограничителем, состоящим из прямой и точки// Вестник научно-технического развития. - 2017. - №9 (121). - С.34-45.
11. *Самарин Ю.П.* Об одной нелинейной задаче для волнового уравнения в одномерном пространстве // Прикладная математика и механика. – 1964. – Т. 26, В. 3. – С. 77–80.
12. *Самарин Ю.П., Анисимов В.Н.* Вынужденные поперечные колебания гибкого звена при разгоне // Изв. вузов. Машиностроение. – 1986. - (12).- С. 17–21.
13. *Анисимов В.Н., Литвинов В.Л.* Математические модели продольно–поперечных колебаний объектов с движущимися границами // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. «Физико–математические науки». – 2015. - 2 (19). – С. 382–397.
14. *Анисимов В.Н., Литвинов В.Л.* Резонансные свойства механических объектов с движущимися границами: монография. – Самара: Самар. гос. техн. ун–т, 2009. – 131 с.
15. *Анисимов В.Н., Литвинов В.Л.* Исследование резонансных свойств механических объектов с движущимися границами при помощи метода Канторовича–Галеркина // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. «Физико–математические науки». – 2009. - 1 (18). – С. 149–158.
16. *Анисимов В.Н., Литвинов В.Л., Корпен И.В.* Об одном методе получения аналитического решения волнового уравнения, описывающего колебания систем с движущимися границами // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. «Физико–математические науки». – 2012. - 3 (28). – С. 145–151.
17. *Литвинов В.Л.* Решение краевых задач с движущимися границами при помощи метода замены переменных в функциональном уравнении // Журнал Средневолжского математического общества. – 2013. - Т. 15, № 3. – С. 112–119.
18. *Анисимов В.Н., Литвинов В.Л.* Анализ влияния движения границ при исследовании резонансных свойств систем с демпфированием // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. «Физико–математические науки». – 2009. - 2 (19). – С. 147–152.
19. *Анисимов В.Н., Литвинов В.Л.* Вычисление собственных частот поперечных колебаний вязкоупругого каната, движущегося в продольном направлении и имеющего изгибную жесткость // Математическое моделирование и краевые задачи: Труды Пятой Всероссийской научной конференции с международным участием. Ч. 1: Математические модели механики, прочности и надежности элементов конструкций. – Самара: СамГТУ, 2008. – 358 с.
20. *Литвинов В.Л., Анисимов В.Н.* Математическое моделирование и исследование колебаний одномерных механических систем с движущимися границами: монография. – Самара: Самар. гос. техн. ун–т, 2017. – 149 с.
21. *Литвинов В.Л.* Поперечные колебания вязкоупругого каната, лежащего на упругом основании, с учетом влияния сил сопротивления среды // Вестник научно–технического развития. – 2015. - № 4 (92). — С. 29–33.
22. *Анисимов В. Н., Литвинов В.Л.* Вычисление собственных частот каната движущегося в продольном направлении // Журнал Средневолжского математического общества. — 2017. — Т. 19, № 1. — С. 130–139.
23. *Литвинов В.Л.* Продольные колебания каната переменной длины с грузом на конце // Вестник научно–технического развития. – 2016. - № 1 (101). — С. 19–24.

24. *Литвинов В.Л.* Применение метода Канторовича-Галеркина при исследовании резонансных свойств систем с демпфированием // Вестник научно–технического развития. – 2017. - № 2 (114). — С. 37–46.
25. *Анисимов В. Н., Литвинов В.Л* Аналитический метод решения волнового уравнения с широким классом условий на движущихся границах // Вестник научно–технического развития. – 2016. - № 2 (102). — С. 28–35.
26. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики, 4. - М.: Физматгиз, 1958.
27. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. - М.: Наука, 1976. - 576 с.
28. *Мышкис А.Д.* Элементы теории математических моделей. Изд. 5-е. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2011. – 192 с.

Дата поступления статьи: 4 февраля 2018 года.