

УДК 534.11

ИССЛЕДОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ КАБЕЛЯ НА УЧАСТКЕ НАЛОЖЕНИЯ НА НЕГО ИЗОЛЯЦИИ

© Владислав Львович Литвинов, Валерий Николаевич Анисимов,
Инна Владимировна Корпен, Светлана Николаевна Косинова

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего
образования "Самарский государственный технический университет"

СамГТУ, Самара, Россия

vladlitvinov@rambler.ru, anisimov170159@mail.ru

Аннотация. Исследуются поперечные колебания кабеля на участке наложения на него изоляции. Модель учитывает натяжение кабеля, переменную изгибную жесткость, сопротивление внешней среды. Объект принадлежит к широкому кругу одномерных объектов с движущимися границами. Движение границ затрудняет описание таких объектов. При помощи метода Галеркина получено уравнение собственных частот колебаний. Уравнение позволяет получить две первые собственные частоты колебаний кабеля. Результаты исследований могут быть использованы для обеспечения надежной работы технологических установок по изготовлению кабелей.

Ключевые слова: колебания объектов с движущимися границами, краевые задачи, математические модели, резонансные свойства.

INVESTIGATION OF CABLE OSCILLATIONS AT THE AREA OF APPLICATION OF INSULATION

© Vladislav L. Litvinov, Valeriy N. Anisimov, Inna V. Korpen, Svetlana N. Kosinova

Samara State Technical University, Samara, Russia

vladlitvinov@rambler.ru, anisimov170159@mail.ru

Abstract. Researches the transverse vibrations of the cable in the area where the insulation is applied to it. The model takes into account the cable tension, variable bending stiffness, resistance of the external environment. The object belongs to a wide range of one-dimensional objects with moving boundaries. Moving boundaries complicate the description of such objects. The equation makes it possible to obtain the first two natural frequencies of cable oscillations. Results can be used to ensure reliable operation of the technological installation for the manufacture of cables.

Key words: oscillations of objects with moving boundaries, boundary value problems, mathematical models, resonant properties.

1. Постановка задачи. Схема технологической установки по изготовлению кабелей изображена на рис. 1. Здесь в точке $x = l_0$ через круглое отверстие в разжиженном виде выдавливается изоляционная масса 3, которая накладывается на протягиваемую через отверстие жилу 4. Кабель 2 охлаждается в водяной ванне 1 и наматывается на катушку 5. Особенность задачи заключается в том, что изгибная жесткость кабеля изменяется по длине. Скорость волн, бегущих из точки $x=0$ в точку $x = l_0$, уменьшается, так как уменьшается жесткость струны, поэтому волны концентрируются с приближением к точке $x = l_0$. Кроме того, эти волны бегут относительно среды с меньшей скоростью, и среда этим волнам, как указывается в статье [6], оказывает меньшее сопротивление, чем волнам, бегущим в

обратном направлении. Указанные факты могут привести к большим амплитудам колебаний вблизи точки $x = l_0$, что нежелательно. Чтобы предотвратить это, необходимо знать собственные частоты колебаний рассматриваемой системы.

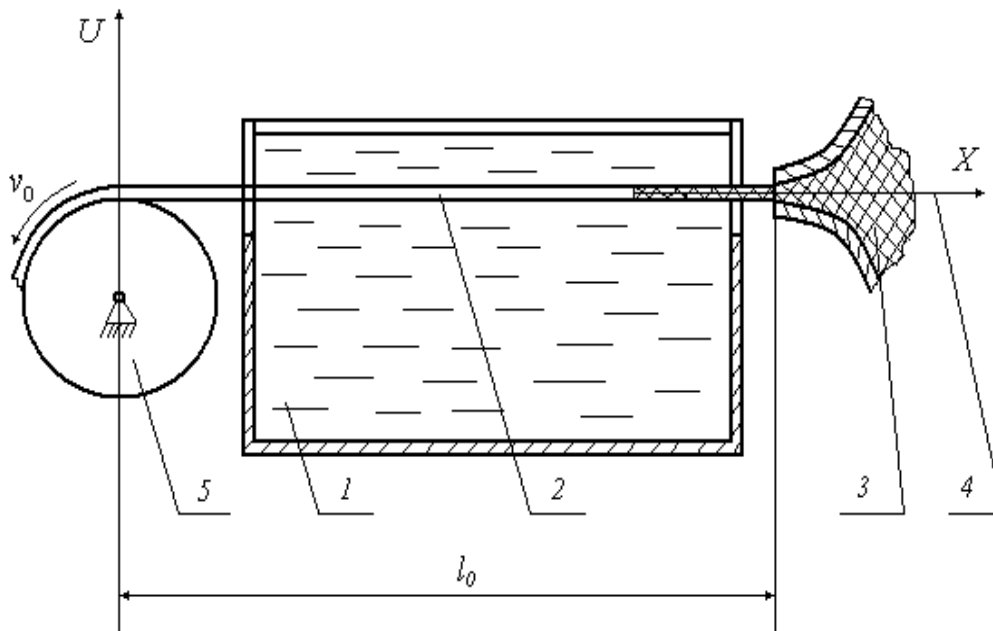


Рис. 1

Задачу по определению собственных частот поставим следующим образом:

$$TU_{xx}(x,t) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} [C(x-v_0t)U_{xx}(x,t)] - \rho U_{tt}(x,t) - \lambda U_t(x,t) - RU_x(x,t) = 0; \quad (1)$$

$$U(v_0t, t) = 0; U(v_0t + l_0, t) = 0; U_x(v_0t, t) = 0; U_x(v_0t + l_0, t) = 0. \quad (2)$$

Здесь λ, R - коэффициенты, учитывающие сопротивление воды; $C(x-v_0t)$ - функция, характеризующая изгибную жесткость кабеля; v_0 - скорость продольного движения кабеля, T - сила натяжения кабеля, ρ - масса единицы длины кабеля.

Если принять

$$R = \lambda v_0, \quad (3)$$

то на волну $U = \varphi(x-v_0t)$, бегущую со скоростью v_0 и, следовательно, покоящуюся относительно воды, силы сопротивления не действуют ($F_c = \lambda U_t + RU_x = 0$), что соответствует действительности.

Введем новые переменные:

$$\zeta = x - v_0t; t = t; V(\zeta, t) = U(x, t).$$

После преобразований, с учетом (3), получим задачу с условиями, заданными на неподвижной границе:

$$(a^2 - v_0^2)V_{\zeta\zeta}(\zeta, t) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} [C(\zeta)V_{\zeta\zeta}(\zeta, t)] + 2v_0V_{\zeta t}(\zeta, t) - V_{tt}(\zeta, t) - \frac{\lambda}{\rho}V_t(\zeta, t) = 0;$$

$$V(0, t) = 0; V(l_0, t) = 0;$$

$$V_{\zeta}(0, t) = 0; V_{\zeta}(l_0, t) = 0.$$

Примем зависимость жесткости от ζ линейной:

$$C(\zeta) = d - b\zeta.$$

Введем в задачу безразмерные переменные:

$$\xi = \zeta/l_0 - 0,5; \tau = at/l_0; Z(\xi, \tau) = V(\zeta, t).$$

Окончательная постановка задачи примет вид

$$r\xi Z_{\xi\xi\xi\xi}(\xi, \tau) + \gamma Z_{\xi\xi\xi\xi}(\xi, \tau) + 2rZ_{\xi\xi\xi}(\xi, \tau) + (1 - v^2)Z_{\xi\xi}(\xi, \tau) + 2vZ_{\xi\tau}(\xi, \tau) - Z_{\tau\tau}(\xi, \tau) - \beta Z_{\tau}(\xi, \tau) = 0; \quad (4)$$

$$Z(-0,5; \tau) = 0; Z(0,5; \tau) = 0; Z_{\xi}(-0,5; \tau) = 0; Z_{\xi}(0,5; \tau) = 0, \quad (5)$$

где

$$r = b/(\rho l_0 a^2); \gamma = 0,5b/(\rho l_0 a^2) - d/(\rho l_0^2 a^2);$$

$$v = v_0/a; \beta = \lambda l_0/(\rho a).$$

Безразмерные параметры характеризуют: v - скорость продольного движения; r, γ - переменную изгибную жесткость; β - сопротивление внешней среды.

Изоляционная масса выдавливается в жидком виде, поэтому изгибную жесткость в точке $x = l_0$ можно принять равной нулю. При этом параметр γ равен: $\gamma = -0,5r$.

2. Решение задачи методом Галеркина. Решение полученной задачи будем искать в виде произведения двух функций: $Z(\xi, \tau) = \mu(\xi)e^{W\tau}$.

Для $\mu(\xi)$ получим следующую задачу:

$$L[\mu(\xi)] = r\xi\mu''''(\xi) + \gamma\mu''''(\xi) + 2r\mu'''(\xi) + (1 - v^2)\mu''(\xi) + 2vW\mu'(\xi) - (W^2 + \beta W)\mu(\xi) = 0; \quad (6)$$

$$\mu(-0,5) = 0; \mu(0,5) = 0; \mu'(-0,5) = 0; \mu'(0,5) = 0. \quad (7)$$

Точно определить собственные частоты задачи (6), (7) довольно сложно, поэтому воспользуемся приближенным методом, основанным на методе Галеркина. Решение задачи будем искать в виде

$$\mu(\xi) = A\varphi_1(\xi) + B\varphi_2(\xi),$$

где

$$\varphi_1(\xi) = \xi^4 - 0,5\xi^2 + 0,0625; \quad \varphi_2(\xi) = \xi^5 - 0,5\xi^3 + 0,0625\xi \quad (8)$$

– две линейно независимые функции (8) удовлетворяют граничным условиям (7) и являются ортогональными на интервале $(-0,5; 0,5)$.

При использовании метода Галеркина коэффициенты A и B следует определять из однородной системы

$$\begin{cases} A \int_{-0,5}^{0,5} L[\varphi_1(\xi)]\varphi_1(\xi)d\xi + B \int_{-0,5}^{0,5} L[\varphi_2(\xi)]\varphi_1(\xi)d\xi = 0; \\ A \int_{-0,5}^{0,5} L[\varphi_1(\xi)]\varphi_2(\xi)d\xi + B \int_{-0,5}^{0,5} L[\varphi_2(\xi)]\varphi_2(\xi)d\xi = 0. \end{cases}$$

Здесь оператор L определяется выражением (6).

Приравняв нулю определитель системы, после преобразований получим уравнение собственных частот:

$$\begin{aligned} W^4 + 2\beta W^3 + W^2(\beta^2 - 4465 \cdot \gamma - 12 \cdot \nu^2 + 56) + W[56\beta(1 - \nu^2) - 4465 \cdot \beta\gamma] + \\ + 1996855 \cdot \gamma^2 - 69726 \cdot \gamma(1 - \nu^2) + 528(1 - \nu^2)^2 - 128407 \cdot r^2 = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Данное уравнение позволяет определить две пары комплексно сопряженных корней:

$$W_1 = -\omega_{01} \pm i\omega_1; \quad W_2 = -\omega_{02} \pm i\omega_2.$$

Действительные части корней характеризуют затухание свободных колебаний. Мнимые части представляют собой первую и вторую собственные частоты системы.

Уравнение (9) решалось в среде MATLAB. В таблице приведены собственные частоты W_1 и W_2 в зависимости от параметров ν и r при $\beta = 0,5$ и $\gamma = -0,5r$.

Таблица

$r \backslash \nu$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	
0	-0,250+3,455i	-0,247+3,414i	-0,237+3,294i	-0,222+3,100i	-0,204+2,840i	W_1
	-0,250+6,629i	-0,253+6,641i	-0,263+6,674i	-0,278+6,722i	-0,297+6,775i	W_2
0,1	-0,250+5,573i	-0,250+5,560i	-0,250+5,508i	-0,250+5,420i	-0,240+5,300i	W_1
	-0,25+15,750i	-0,250+15,751i	-0,250+15,760i	-0,250+15,770i	-0,250+15,780i	W_2
0,2	-0,25+7,015i	-0,250+7,002i	-0,249+6,963i	-0,248+6,897i	-0,246+6,805i	W_1
	0,250+21,288i	-0,250+21,289i	-0,251+21,294i	-0,252+21,301i	-0,254+21,311i	W_2

Анализ таблицы показывает, что частота колебаний (мнимая часть) увеличивается с увеличением r (характеризует изгибную жёсткость) и уменьшением ν (характеризует

скорость продольного движения). Действительные части корней, характеризующие затухание, от r и ν зависят слабо.

Заметим, что если W_n безразмерная частота (задача(4), (5)), то частота реальной системы ω_n (задача (1), (2)) находится по формуле: $\omega_n = \frac{aW_n}{l_0}$.

3. Заключение.

Рассмотренная математическая модель позволяет учесть широкий круг факторов, влияющих на колебания: продольное движение, переменную изгибную жесткость, сопротивление внешней среды, натяжение кабеля. Полученное уравнение собственных частот позволяет с использованием стандартных программных средств получить две первые собственные частоты колебаний кабеля. Полученные результаты могут быть использованы для обеспечения надежной работы технологической установки по изготовлению кабелей.

Список литературы

1. Савин Г.Н., Горошко О.А. Динамика нити переменной длины. – Киев: Наук.думка, 1962. – 332 стр.
2. Весницкий А.И., Потапов А.И. Поперечные колебания канатов в шахтных подъемниках // Динамика систем. - Горьковский университет, 1975. – №7. – С. 84–89.
3. Весницкий А.И. Волны в системах с движущимися границами и нагрузками. – М.: Физматлит, 2001. – 320 с.
4. Анисимов В.Н., Литвинов В.Л. Математические модели нелинейных продольно–поперечных колебаний объектов с движущимися границами // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико–математические науки». – 2015. - № 2 (19) . – С. 382–397.
5. Литвинов В.Л. Поперечные колебания вязкоупругого каната, лежащего на упругом основании, с учетом влияния сил сопротивления среды // Вестник научно–технического развития. – 2015. - № 4 (92).
6. Самарин Ю.П., Анисимов В.Н. Вынужденные поперечные колебания гибкого звена при разгоне // Изв. вузов. Машиностроение- - 1986. - (12). – С. 17–21.
7. Анисимов В. Н., Литвинов В. Л. Исследование резонансных свойств механических объектов при помощи метода Канторовича-Галёркина // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. «Физико–математические науки». – 2009. - №1(18). – С. 149–158.
8. Анисимов В.Н., Литвинов В.Л., Корпен И.В. Об одном методе получения аналитического решения волнового уравнения, описывающего колебания систем с движущимися границами // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико–математические науки». – 2012. - № 3 (28) – С. 145–151.
9. Динг Ху, Чен Ли-Квун. Методы Галеркина для собственных частот движущейся в осевом направлении балки // Общие вопросы механики. Общая механика.. - 2011. - №2.
10. Ерофеев В.И., Колесов Д.А., Лисенкова Е.Е. Исследование волновых процессов в одномерной системе, лежащей на упруго–инерционном основании, с движущейся нагрузкой // Вестник научно–технического развития. – 2013. - № 6 (70). – С. 18–29.
11. Кечеджиян Л.О., Пинчук Н.А., Столяр А.М. Об одной задаче математической физики с подвижной границей // Извест. вузов. Сев.–Кавк. регион. Естеств. науки. - 2008. — № 1. — С. 22–27.
12. Анисимов В.Н. Продольные резонансные колебания вязкоупругой веревки грузоподъемной установки // Научный журнал «Труды Самарского научного центра Российской академии наук». - 2016. - Vol. 18, № 4-1. - Р. 128-133.

13. *Анисимов В.Н., Литвинов В.Л.* Продольные колебания вязкоупругого каната переменной длины // Математическое моделирование и краевые задачи: Труды Четвертой Всероссийской научной конференции. Ч. 1: Математические модели механики, прочности и надежности элементов конструкций. – Самара: СамГТУ, 2007. – С. 25–27.
14. *Литвинов В.Л.* Поперечные колебания вязкоупругого каната переменной длины, обладающего изгибной жесткостью с учетом влияния сил сопротивления среды. Современные проблемы теории функций и их приложения: Материалы 17-й междунар. Саратов. зимней школы. - 2014. – С. 153–157.
15. *Анисимов В.Н., Литвинов В.Л., Корпен И.В.* Резонансные свойства каната переменной длины, обладающего изгибной жесткостью с учетом действия демпфирующих сил // Математическое моделирование и краевые задачи: Труды восьмой Всероссийской научной конференции с международным участием. Ч.1: Математические модели механики, прочности и надежности элементов конструкций. – Самара: СамГТУ, 2011. – С. 15–20.
16. *Литвинов В.Л.* Поперечные колебания вязкоупругого каната, лежащего на упругом основании, с учетом влияния сил сопротивления среды // Вестник научно–технического развития. - 2015. - № 4 (92). – С. 29–33.
17. *Литвинов В.Л., Анисимов В.Н.* Исследование резонансных свойств струны переменной длины, лежащей на упругом основании, с учетом влияния сил сопротивления среды // Вестник научно–технического развития. – 2015. - № 11 (99). – С. 38–43.
18. *Литвинов В.Л.* Решение краевых задач с движущимися границами при помощи метода замены переменных в функциональном уравнении // Журнал Средневолжского математического общества. – 2013. - Т. 15, № 3. – С. 112–119.
19. *Анисимов В.Н., Литвинов В.Л.* Анализ влияния движения границ при исследовании резонансных свойств систем с демпфированием // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. «Физико–математические науки». – 2009. - 2 (19). - 147–152.
20. *Анисимов В.Н., Литвинов В.Л.* Вычисление собственных частот поперечных колебаний вязкоупругого каната, движущегося в продольном направлении и имеющего изгибную жесткость // Математическое моделирование и краевые задачи: Труды Пятой Всероссийской научной конференции с международным участием. Ч. 1: Математические модели механики, прочности и надежности элементов конструкций. – Самара: СамГТУ, 2008. – 358 с.
21. *Литвинов В.Л., Анисимов В.Н.* Математическое моделирование и исследование колебаний одномерных механических систем с движущимися границами: монография // Самар. гос. техн. ун–т, 2017. – 149 с.
22. *Анисимов В. Н., Литвинов В.Л.* Вычисление собственных частот каната движущегося в продольном направлении // Журнал Средневолжского математического общества. — 2017. — Т. 19, № 1. — С. 130–139.