

УДК 621.01

ВЛИЯНИЕ ДЕФОРМИРУЕМОГО ОСНОВАНИЯ НА СИНХРОНИЗАЦИЮ РОТОРОВ ДВУХ ДВИГАТЕЛЕЙ В СИСТЕМЕ ТРЕХ ДВИГАТЕЛЕЙ

© Анна Викторовна Леонтьева, Николай Викторович Леонтьев

Институт проблем машиностроения РАН – филиал Федерального государственного бюджетного научного учреждения «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики Российской академии наук» (ИПМ РАН), Н. Новгород, Россия

aleonav@mail.ru

Аннотация. В работе рассматривается эффект синхронизации роторов двух двигателей, установленных на одной платформе, с которой связана другая платформа с установленным на ней третьим двигателем. Во втором приближении метода осреднения найден режим частотной синхронизации. Получены уравнения стационарных режимов движений. Получены зависимости амплитуд колебаний платформ от расстройки частот двух источников колебаний.

Ключевые слова: синхронизация, метод осреднения, резонанс, стационарный режим.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 16-38-00056 мол_а, № 17-08-01096).

INFLUENCE OF THE DEFORMABLE BASIS ON SYNCHRONIZATION OF TWO MOTORS IN SYSTEM OF THREE MOTORS

©A.V. Leonteva, N.V. Leontiev

Mechanical Engineering Research Institute of Russian Academy of Sciences, N. Novgorod, Russia

aleonav@mail.ru

Abstract. In this paper the effect of synchronization of two motors installed on one platform with which other platform is bound to the third motor installed on it is considered. The mode of the frequencies synchronization is found in the second approximation of averaging method. The equations of stationary mode of movements are received. Dependences of vibration amplitudes of platforms on a detuning of frequencies of two sources of fluctuations are received.

Keywords: synchronization, averaging method, resonance, stationary mode.

Acknowledgments: The work was supported by the Russian Foundation for Basic Research, projects no 16-38-00056, 17-08-01096.

Ранее в работах, посвященных изучению явления самосинхронизации с помощью метода осреднения рассматривалась задача синхронизации роторов в системе трех двигателей, установленных на общем основании [1, 2]. Результаты исследований показали, что при работе трех несбалансированных двигателей, установленных на общем упругом основании, возможно возникновение режима синхронизации роторов трех двигателей. В работе [3] отмечено, что режим синхронизации роторов двух двигателей, установленных на разных, но связанных платформах, невозможен.

В данной работе рассмотрим систему трех двигателей, жестко закрепленных на основании. В качестве модели основания выберем систему двух связанных между собой платформ. Физическая модель задачи представляет собой систему трех двигателей, установленных на двух вязкоупругих платформах. На одной платформе закреплены два двигателя, на другой – один. Все двигатели с одинаковыми статическими и механическими характеристиками. Для учета вязкости и упругости платформ используется стандартный закон Фойхта-Кельвина, описывающий поведение вязкоупругого твердого тела (рис. 1).

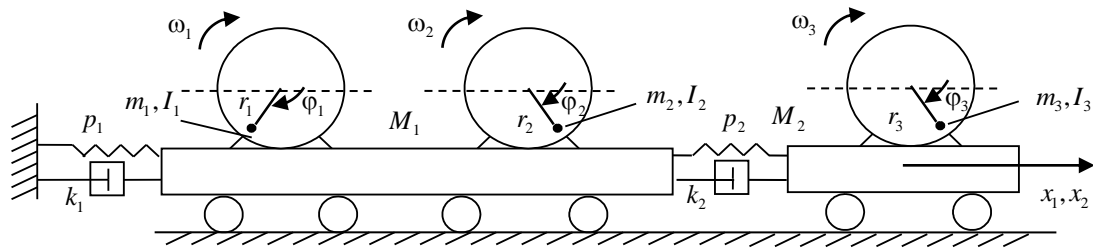


Рис. 1. Динамическая схема системы

На рисунке M_1 и M_2 – массы платформ абсолютно твердых тел с одной степенью свободы каждое, характеризуемые линейными горизонтальными смещениями x_1 и x_2 , p_1 , p_2 – коэффициенты упругости платформ, связанных с неподвижным основанием – фундаментом, k_1 , k_2 – коэффициенты диссипации платформ, m_i – массы эксцентриков с эксцентриситетами r_i соответственно, I_i – моменты инерции роторов в отсутствие дисбаланса, φ_i – углы поворота роторов и отсчитываются от направления оси x ($i = 1, 2, 3$).

Математическая модель задачи представляет собой систему пяти дифференциальных уравнений второго порядка

$$M_1 \ddot{x}_1 + k_1 \dot{x}_1 + p_1 x_1 + p_2 (x_1 - x_2) = m_1 r_1 (\ddot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 + \dot{\varphi}_1^2 \cos \varphi_1) + m_2 r_2 (\ddot{\varphi}_2 \sin \varphi_2 + \dot{\varphi}_2^2 \cos \varphi_2),$$

$$M_2 \ddot{x}_2 + k_2 \dot{x}_2 + p_2 (x_2 - x_1) = m_3 r_3 (\ddot{\varphi}_3 \sin \varphi_3 + \dot{\varphi}_3^2 \cos \varphi_3),$$

$$I_1 \ddot{\varphi}_1 + H_1(\varphi_1, \dot{\varphi}_1) = L_1(\varphi_1, \dot{\varphi}_1) + m_1 r_1 \ddot{x}_1 \sin \varphi_1, \quad (1)$$

$$I_2 \ddot{\varphi}_2 + H_2(\varphi_2, \dot{\varphi}_2) = L_2(\varphi_2, \dot{\varphi}_2) + m_2 r_2 \ddot{x}_1 \sin \varphi_2,$$

$$I_3 \ddot{\varphi}_3 + H_3(\varphi_3, \dot{\varphi}_3) = L_3(\varphi_3, \dot{\varphi}_3) + m_3 r_3 \ddot{x}_2 \sin \varphi_3,$$

которая описывает колебания оснований и вращения роторов двигателей. Рассматриваемая система имеет пять степени свободы, две из которых приходятся на колебательную часть системы. Первые два уравнения описывают колебания оснований, последние три – вращения роторов двигателей. Считаем, что массы платформ равны, $M_1 = M_2 = M$, и упругие характеристики платформ одинаковые, $p_1 = p_2 = p$. Движущий момент и момент сил сопротивления имеют линеаризованный вид, $L_i(\varphi_i, \dot{\varphi}_i) = M_{0i} - k_{0i} \dot{\varphi}_i$, $H_i(\varphi_i, \dot{\varphi}_i) = k_{li} \dot{\varphi}_i$, $i = 1, 2, 3$. Постоянные параметры M_{0i} , k_{li} и k_{0i} определяются из экспериментальных данных.

Считаем, что в системе (1) имеет место малый параметр, равный отношению неуравновешенной массы ротора к массе основания $\mu = m_i/M \ll 1$.

Введение малого параметра как отношение массы дебаланса к колеблющейся массе, предложено И.И. Блехманом [4] и В.О. Кононенко [5] для механической системы, состоящей из упругой платформы и взаимодействующим с ней ротором двигателя, колебания в которой возбуждаются силами инерции неуравновешенной вращающейся массы.

Квазилинейную систему (1) будем исследовать наиболее эффективным методом – методом осреднения, который подробно описан и применен к различным задачам динамики в работе В.Ф. Журавлева и Д.М. Климова [6].

Для удобства анализа вводим безразмерные переменные $\bar{x}_i = x_i/r$, $\bar{t} = t\omega_0$, где r – средний эксцентриситет, ω_0 – собственная частота колебаний одной из платформ, считаем равной единице. При этом используем новые обозначения: ε_i (коэффициенты при первых производных от перемещений) – безразмерные коэффициенты диссипации, которые считаем малой величиной порядка μ , $\varepsilon_i = \mu d_i$, d_i – новые коэффициенты диссипации, $\kappa_i = r_i/r$, $a_i = (k_{li} + k_{oi})/(\omega_0 I_i)$, $b_i = M_{oi}/(\omega_0^2 I_i)$, $\mu c_i = m_i r_i^2 / I_i$ ($i = 1, 2, 3$).

Представляя систему в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка ($\dot{x}_i = y_i$, $\dot{\phi}_i = \omega_i$) и разрешая относительно производных, находим порождающее решение обезразмеренной системы ($\mu = 0$):

$$\begin{aligned} x_1(t) &= A_1 \sin\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}t + \alpha_1\right) + A_2 \sin\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}t + \alpha_2\right), \\ x_2(t) &= \frac{\sqrt{5}+1}{2} A_1 \sin\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}t + \alpha_1\right) - \frac{\sqrt{5}-1}{2} A_2 \sin\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}t + \alpha_2\right), \\ y_1(t) &= \frac{\sqrt{5}-1}{2} A_1 \cos\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}t + \alpha_1\right) + \frac{\sqrt{5}+1}{2} A_2 \cos\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}t + \alpha_2\right), \\ y_2(t) &= A_1 \cos\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}t + \alpha_1\right) - A_2 \cos\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}t + \alpha_2\right), \\ \varphi_i(t) &= \Omega_i t + B_i + v_i \exp(-a_i t) \quad (i = 1, 2, 3), \\ \omega_i(t) &= \Omega_i - a_i v_i \exp(-a_i t) \quad (i = 1, 2, 3), \end{aligned} \tag{2}$$

где $\Omega_i = b_i/a_i$ – номинальная частота вращения i -го двигателя, A_i , α_i , v_i , B_i – произвольные постоянные, которые в дальнейшем считаем новыми переменными, зависящими от времени.

Процедура нахождения частотной синхронизации и применения метода осреднения в системе трех взаимодействующих роторов подробно описана в [1, 2, 7].

Система в новых переменных, учитывающая слагаемые только первого порядка малости, имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{A}_1 &= \mu \left(-(C_2 A_1 \cos \varphi_1 + C_1 A_2 \cos \varphi_2) d_1 + C_1 (-A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2) d_2 + C_0 \sum_{i=1}^2 \gamma_i^2 \kappa_i \cos \beta_i + \right. \\ &\left. + C_1 \gamma_3^2 \kappa_3 \cos \beta_3 + C_0 \sum_{i=1}^2 a_i^2 \kappa_i v_i \exp(-a_i t) \sin \beta_i + C_1 a_3^2 \kappa_3 v_3 \exp(-a_3 t) \sin \beta_3 \right) \cos \varphi_1, \\ \dot{A}_2 &= \mu \left(-(C_2 A_1 \cos \varphi_1 + C_1 A_2 \cos \varphi_2) d_1 + C_2 (A_1 \cos \varphi_1 - A_2 \cos \varphi_2) d_2 + C_0 \sum_{i=1}^2 \gamma_i^2 \kappa_i \cos \beta_i - \right. \\ &\left. - C_2 \gamma_3^2 \kappa_3 \cos \beta_3 + C_0 \sum_{i=1}^2 a_i^2 \kappa_i v_i \exp(-a_i t) \sin \beta_i - C_2 a_3^2 \kappa_3 v_3 \exp(-a_3 t) \sin \beta_3 \right) \cos \varphi_2, \\ \dot{\alpha}_1 &= \mu \frac{1}{A_1} \left[(C_2 A_1 \cos \varphi_1 + C_1 A_2 \cos \varphi_2) d_1 + C_1 (A_1 \cos \varphi_1 - A_2 \cos \varphi_2) d_2 - C_0 \sum_{i=1}^2 \gamma_i^2 \kappa_i \cos \beta_i - \right. \\ &\left. - C_1 \gamma_3^2 \kappa_3 \cos \beta_3 - C_0 \sum_{i=1}^2 a_i^2 \kappa_i v_i \exp(-a_i t) \sin \beta_i - C_1 a_3^2 \kappa_3 v_3 \exp(-a_3 t) \sin \beta_3 \right] \sin \varphi_1, \\ \dot{\alpha}_2 &= \mu \frac{1}{A_2} \left[(C_2 A_1 \cos \varphi_1 + C_1 A_2 \cos \varphi_2) d_1 + C_2 (-A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2) d_2 - C_0 \sum_{i=1}^2 \gamma_i^2 \kappa_i \cos \beta_i + \right. \\ &\left. + C_2 \gamma_3^2 \kappa_3 \cos \beta_3 - C_0 \sum_{i=1}^2 a_i^2 \kappa_i v_i \exp(-a_i t) \sin \beta_i + C_2 a_3^2 \kappa_3 v_3 \exp(-a_3 t) \sin \beta_3 \right] \sin \varphi_2, \\ \dot{v}_j &= \mu \frac{c_j}{a_j \kappa_j} \exp(a_j t) \left(\frac{1}{2} (3 - \sqrt{5}) A_1 \sin \varphi_1 + \frac{1}{2} (3 + \sqrt{5}) A_2 \sin \varphi_2 \right) \sin \beta_j \quad (j = 1, 2), \\ \dot{v}_3 &= \mu \frac{c_3}{a_3 \kappa_3} \exp(a_3 t) \left(\frac{1}{2} (\sqrt{5} - 1) A_1 \sin \varphi_1 - \frac{1}{2} (\sqrt{5} + 1) A_2 \sin \varphi_2 \right) \sin \beta_3, \\ \dot{B}_j &= -\mu \frac{c_j}{a_j \kappa_j} \left(\frac{1}{2} (3 - \sqrt{5}) A_1 \sin \varphi_1 + \frac{1}{2} (3 + \sqrt{5}) A_2 \sin \varphi_2 \right) \sin \beta_j \quad (j = 1, 2), \\ \dot{B}_3 &= -\mu \frac{c_3}{a_3 \kappa_3} \left(\frac{1}{2} (\sqrt{5} - 1) A_1 \sin \varphi_1 - \frac{1}{2} (1 + \sqrt{5}) A_2 \sin \varphi_2 \right) \sin \beta_3, \end{aligned} \quad (3)$$

где, для сокращения записи, введены обозначения $C_0 = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $C_1 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{5}}{5} \right)$, $C_2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{5} \right)$,

$$\beta_i = \Omega_i t + B_i + v_i \exp(-a_i t), \quad \varphi_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} t + \alpha_1, \quad \varphi_2 = \frac{\sqrt{5}+1}{2} t + \alpha_2, \quad \gamma_i = \Omega_i - a_i v_i \exp(-a_i t).$$

Систему (3) нетрудно преобразовать к системе в стандартной форме путем введения быстровращающихся фаз φ_1 , φ_2 , β_1 , β_2 , которые связаны со старыми фазами α_1 , α_2 , B_1 , B_2 соответственно следующими соотношениями:

$$\varphi_1(t) = \frac{\sqrt{5}-1}{2} t + \alpha_1(t), \quad \varphi_2(t) = \frac{\sqrt{5}+1}{2} t + \alpha_2(t), \quad \beta_1(t) = \Omega_1 t + B_1(t), \quad \beta_2(t) = \Omega_2 t + B_2(t).$$

Временное среднее, вычисленное для системы первого приближения в стандартной форме, не позволяет выявить эффект частотной синхронизации. Необходимо получить систему второго приближения.

Уравнения второго приближения находятся путем замены переменных

$$\begin{aligned}
 A_1(t) &= B_1(t) + \mu M_1(B_1(t), B_2(t), \phi_1(t), \phi_2(t), w_1(t), w_2(t), w_3(t), \alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t)) \\
 A_2(t) &= B_2(t) + \mu M_2(B_1(t), B_2(t), \phi_1(t), \phi_2(t), w_1(t), w_2(t), w_3(t), \alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t)) \\
 \varphi_1(t) &= \phi_1(t) + \mu M_3(B_1(t), B_2(t), \phi_1(t), \phi_2(t), w_1(t), w_2(t), w_3(t), \alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t)) \\
 \varphi_2(t) &= \phi_2(t) + \mu M_4(B_1(t), B_2(t), \phi_1(t), \phi_2(t), w_1(t), w_2(t), w_3(t), \alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t)) \\
 v_1(t) &= w_1(t) + \mu M_5(B_1(t), B_2(t), \phi_1(t), \phi_2(t), w_1(t), w_2(t), w_3(t), \alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t)) \\
 v_2(t) &= w_2(t) + \mu M_6(B_1(t), B_2(t), \phi_1(t), \phi_2(t), w_1(t), w_2(t), w_3(t), \alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t)) \\
 v_3(t) &= w_3(t) + \mu M_7(B_1(t), B_2(t), \phi_1(t), \phi_2(t), w_1(t), w_2(t), w_3(t), \alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t)) \\
 \beta_1(t) &= \alpha_1(t) + \mu M_8(B_1(t), B_2(t), \phi_1(t), \phi_2(t), w_1(t), w_2(t), w_3(t), \alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t)) \\
 \beta_2(t) &= \alpha_2(t) + \mu M_9(B_1(t), B_2(t), \phi_1(t), \phi_2(t), w_1(t), w_2(t), w_3(t), \alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t)) \\
 \beta_3(t) &= \alpha_3(t) + \mu M_{10}(B_1(t), B_2(t), \phi_1(t), \phi_2(t), w_1(t), w_2(t), w_3(t), \alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))
 \end{aligned}$$

в уравнениях первого приближения. Неизвестные функции M_i находятся из условия отсутствия членов первого порядка малости в системе второго приближения. Приравнявая нулю выражения при малом параметре в первой степени, получаем систему неоднородных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Уравнения линейны относительно производных, коэффициенты при производных – константы, у свободных членах нелинейности относительно переменных. Каждое из уравнений сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

Система уравнений второго приближения имеет вид:

$$\begin{aligned}
 \dot{B}_1 &= \mu^2 \left(-M_3 \left(C_0 \sum_{i=1}^2 \kappa_i \Omega_i^2 \cos \alpha_i + C_1 \kappa_3 \Omega_3^2 \cos \alpha_3 + (d_2 - d_1) C_1 B_2 \cos \phi_2 \right) \sin \phi_1 + \right. \\
 &+ ((C_2 d_1 - C_1 d_2) (M_1 \cos \phi_1 - 2M_3 B_1 \sin \phi_1) + C_1 (d_1 - d_2) (M_4 B_2 \sin \phi_2 - M_2 \cos \phi_2) + \\
 &- \sum_{i=1}^2 (D_2 B_1 \sin \phi_1 + D_1 B_2 \sin \phi_2) c_i \sin^2 \alpha_i + (D_1 B_2 \sin \phi_2 - C_0 B_1 \sin \phi_1) c_3 \sin^2 \alpha_3 - \\
 &\left. - C_0 M_8 \kappa_1 \Omega_1^2 \sin \alpha_1 - C_0 M_9 \kappa_2 \Omega_2^2 \sin \alpha_2 - C_1 M_{10} \kappa_3 \Omega_3^2 \sin \alpha_3 \right) \cos \phi_1
 \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{B}_2 &= \mu^2 \left(-M_4 \left(C_0 \sum_{i=1}^2 \kappa_i \Omega_i^2 \cos \alpha_i + C_2 \kappa_3 \Omega_3^2 \cos \alpha_3 + (d_1 - d_2) C_2 B_1 \cos \phi_1 \right) \sin \phi_2 + \right. \\
 &+ (C_2 (d_1 - d_2) (M_1 \cos \phi_1 - M_3 B_1 \sin \phi_1) + (C_2 d_2 - C_1 d_1) (M_2 \cos \phi_2 - 2M_4 B_2 \sin \phi_2) - \\
 &- \sum_{i=1}^2 (D_2 B_1 \sin \phi_1 + D_1 B_2 \sin \phi_2) c_i \sin^2 \alpha_i + (D_2 B_1 \sin \phi_1 - C_0 B_2 \sin \phi_2) c_3 \sin^2 \alpha_3 - \\
 &\left. - C_0 M_8 \kappa_1 \Omega_1^2 \sin \alpha_1 - C_0 M_9 \kappa_2 \Omega_2^2 \sin \alpha_2 - C_2 M_{10} \kappa_3 \Omega_3^2 \sin \alpha_3 \right) \cos \phi_2 \\
 \\
 \dot{\phi}_1 &= \frac{1}{2} (\sqrt{5} - 1) + \mu^2 \frac{1}{B_1} \left(B_1 \left(D_2 \sum_{i=1}^2 c_i \sin^2 \alpha_i + C_0 c_3 \sin^2 \alpha_3 \right) \sin^2 \phi_1 + M_3 B_1 (C_1 d_2 - C_2 d_1) \cos 2\phi_1 + \right. \\
 &+ \left(D_1 B_2 \left(\sum_{i=1}^2 c_i \sin^2 \alpha_i - c_3 \sin^2 \alpha_3 \right) \sin \phi_2 + C_1 B_2 M_4 (d_2 - d_1) \sin \phi_2 - C_0 M_8 \kappa_1 \Omega_1^2 \sin \alpha_1 - \right. \\
 &- C_0 M_9 \kappa_2 \Omega_2^2 \sin \alpha_2 - C_1 M_{10} \kappa_3 \Omega_3^2 \sin \alpha_3 + C_1 (d_2 - d_1) \left(\frac{M_1 B_2}{B_1} - M_2 \right) \cos \phi_2 \left. \right) \sin \phi_1 + \\
 &\left. + \left(C_0 \sum_{i=1}^2 \kappa_i \Omega_i^2 \cos \alpha_i + C_1 \kappa_3 \Omega_3^2 \cos \alpha_3 \right) \left(\frac{M_1}{B_1} \sin \phi_1 - M_3 \cos \phi_1 \right) + C_1 M_3 B_2 (d_1 - d_2) \cos \phi_1 \cos \phi_2 \right) \\
 \\
 \dot{\phi}_2 &= \frac{1}{2} (\sqrt{5} + 1) + \mu^2 \frac{1}{B_2} \left(B_2 \left(D_1 \sum_{i=1}^2 c_i \sin^2 \alpha_i + C_0 c_3 \sin^2 \alpha_3 \right) \sin^2 \phi_2 + M_4 B_2 (C_1 d_1 - C_2 d_2) \cos 2\phi_2 + \right. \\
 &+ \left(D_2 B_1 \left(\sum_{i=1}^2 c_i \sin^2 \alpha_i - c_3 \sin^2 \alpha_3 \right) \sin \phi_1 + C_2 M_3 B_1 (d_1 - d_2) \sin \phi_1 + C_0 M_8 \kappa_1 \Omega_1^2 \sin \alpha_1 + \right. \\
 &+ C_0 M_9 \kappa_2 \Omega_2^2 \sin \alpha_2 + C_2 M_{10} \kappa_3 \Omega_3^2 \sin \alpha_3 + C_2 (d_1 - d_2) \left(\frac{M_2 B_1}{B_2} - M_1 \right) \cos \phi_1 \left. \right) \sin \phi_2 + \\
 &\left. + \left(C_0 \sum_{i=1}^2 \kappa_i \Omega_i^2 \cos \alpha_i + C_2 \kappa_3 \Omega_3^2 \cos \alpha_3 \right) \left(\frac{M_2}{B_2} \sin \phi_2 - M_4 \cos \phi_2 \right) + C_2 M_4 B_1 (d_2 - d_1) \cos \phi_1 \cos \phi_2 \right) \\
 \\
 \dot{w}_1 &= -\mu^2 \left(a_1 c_1 w_1 \sin^2 \alpha_1 + \frac{c_1 \exp(a_1 t)}{a_1} \left(\Omega_1^2 \cos \alpha_1 \sin \alpha_1 + \frac{1}{\kappa_1} \left(\kappa_2 \left(\Omega_2 - \frac{a_2 w_2}{\exp(a_2 t)} \right) \right)^2 \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 + \right. \right. \\
 &+ \frac{a_2^2 \kappa_2 w_2}{\exp(a_2 t)} \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 - (E_2 M_1 \sin \phi_1 + E_1 M_2 \sin \phi_2 + E_2 B_1 M_3 \cos \phi_1 + E_1 B_2 M_4 \cos \phi_2) \sin \alpha_1 - \\
 &\left. \left. - M_8 (E_2 B_1 \sin \phi_1 + E_1 B_2 \sin \phi_2) \cos \alpha_1 - \frac{d_1}{2} \left((\sqrt{5} - 1) B_1 \cos \phi_1 + (\sqrt{5} + 1) B_2 \cos \phi_2 \right) \sin \alpha_1 \right) \right)
 \end{aligned}$$

$$\dot{w}_2 = -\mu^2 \left(a_2 c_2 w_2 \sin^2 \alpha_2 + \frac{c_2 \exp(a_2 t)}{a_2} \left(\Omega_2^2 \cos \alpha_2 \sin \alpha_2 + \frac{1}{\kappa_2} \left(\kappa_1 \left(\Omega_1 - \frac{a_1 w_1}{\exp(a_1 t)} \right) \right)^2 \sin \alpha_2 \cos \alpha_1 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{a_1^2 \kappa_1 w_1}{\exp(a_1 t)} \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 - (E_2 M_1 \sin \phi_1 + E_1 M_2 \sin \phi_2 + E_2 B_1 M_3 \cos \phi_1 + E_1 B_2 M_4 \cos \phi_2) \sin \alpha_2 - \right. \right. \\ \left. \left. - M_9 (E_2 B_1 \sin \phi_1 + E_1 B_2 \sin \phi_2) \cos \alpha_2 - \frac{d_1}{2} \left((\sqrt{5} - 1) B_1 \cos \phi_1 + (\sqrt{5} + 1) B_2 \cos \phi_2 \right) \sin \alpha_2 \right) \right)$$

$$\dot{w}_3 = \mu^2 \left(-a_3 c_3 w_3 \sin^2 \alpha_3 + \frac{c_3 \exp(a_3 t)}{a_3 \kappa_3} \left(-\Omega_3^2 \kappa_3 \cos \alpha_3 \sin \alpha_3 + d_2 (B_1 \cos \phi_1 - B_2 \cos \phi_2) \sin \alpha_3 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} \left((\sqrt{5} - 1) M_1 \sin \phi_1 - (\sqrt{5} + 1) M_2 \sin \phi_2 + (\sqrt{5} - 1) B_1 M_3 \cos \phi_1 - (\sqrt{5} + 1) B_2 M_4 \cos \phi_2 \right) \sin \alpha_3 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} M_{10} \left((\sqrt{5} - 1) B_1 \sin \phi_1 - (\sqrt{5} + 1) B_2 \sin \phi_2 \right) \cos \alpha_3 \right) \right)$$

$$\dot{\alpha}_1 = \Omega_1 + \mu^2 \frac{c_1}{a_1 \kappa_1} \left(\Omega_1^2 \kappa_1 \cos \alpha_1 \sin \alpha_1 - M_8 (E_2 B_1 \sin \phi_1 + E_1 B_2 \sin \phi_2) \cos \alpha_1 - \right. \\ \left. - (E_2 M_1 \sin \phi_1 + E_1 M_2 \sin \phi_2 + E_2 B_1 M_3 \cos \phi_1 + E_1 B_2 M_4 \cos \phi_2) \sin \alpha_1 + \right. \\ \left. + \kappa_2 \Omega_2^2 \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 - d_1 \left((\sqrt{5} - 1) B_1 \cos \phi_1 + (\sqrt{5} + 1) B_2 \cos \phi_2 \right) \sin \alpha_1 \right)$$

$$\dot{\alpha}_2 = \Omega_2 + \mu^2 \frac{c_2}{a_2 \kappa_2} \left(\Omega_2^2 \kappa_2 \cos \alpha_2 \sin \alpha_2 - M_9 (E_2 B_1 \sin \phi_1 + E_1 B_2 \sin \phi_2) \cos \alpha_2 - \right. \\ \left. - (E_2 M_1 \sin \phi_1 + E_1 M_2 \sin \phi_2 + E_2 B_1 M_3 \cos \phi_1 + E_1 B_2 M_4 \cos \phi_2) \sin \alpha_2 + \right. \\ \left. + \kappa_1 \Omega_1^2 \sin \alpha_2 \cos \alpha_1 - d_1 \left((\sqrt{5} - 1) B_1 \cos \phi_1 + (\sqrt{5} + 1) B_2 \cos \phi_2 \right) \sin \alpha_2 \right)$$

$$\dot{\alpha}_3 = \Omega_3 - \mu^2 \frac{c_3}{a_3 \kappa_3} \left(-\Omega_3^2 \kappa_3 \cos \alpha_3 \sin \alpha_3 + \frac{1}{2} M_{10} \left((\sqrt{5} - 1) B_1 \sin \phi_1 - (\sqrt{5} + 1) B_2 \sin \phi_2 \right) \cos \alpha_3 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left((\sqrt{5} - 1) M_1 \sin \phi_1 - (\sqrt{5} + 1) M_2 \sin \phi_2 + (\sqrt{5} - 1) B_1 M_3 \cos \phi_1 - (\sqrt{5} + 1) B_2 M_4 \cos \phi_2 \right) \sin \alpha_3 + \right. \\ \left. + d_2 (B_1 \cos \phi_1 - B_2 \cos \phi_2) \sin \alpha_3 \right)$$

здесь

$$M_1 = C_0 \sum_{i=1}^2 \kappa_i \Omega_i^2 \left(\frac{\sin(\alpha_i + \phi_1)}{\sqrt{5} - 1 + 2\Omega_i} - \frac{\sin(\alpha_i - \phi_1)}{\sqrt{5} - 1 - 2\Omega_i} \right) + C_1 \kappa_3 \Omega_3^2 \left(\frac{\sin(\alpha_3 + \phi_1)}{\sqrt{5} - 1 + 2\Omega_3} - \frac{\sin(\alpha_3 - \phi_1)}{\sqrt{5} - 1 - 2\Omega_3} \right) + \\ + \frac{1}{2} C_1 B_2 (d_1 - d_2) (\sin(\phi_1 - \phi_2) - C_0 \sin(\phi_1 + \phi_2)) - 2B_1 (E_1 d_2 + d_1) \left(\frac{\sqrt{5}}{40} \sin 2\phi_1 + \frac{C_2 \phi_1}{(\sqrt{5} - 3)(\sqrt{5} + 1)} \right)$$

$$\begin{aligned}
 M_2 &= C_0 \sum_{i=1}^2 \kappa_i \Omega_i^2 \left(\frac{\sin(\alpha_i + \phi_2)}{\sqrt{5+1+2\Omega_i}} - \frac{\sin(\alpha_i - \phi_2)}{\sqrt{5+1-2\Omega_i}} \right) + C_2 \kappa_3 \Omega_3^2 \left(\frac{\sin(\alpha_3 + \phi_2)}{\sqrt{5+1+2\Omega_3}} - \frac{\sin(\alpha_3 - \phi_2)}{\sqrt{5+1-2\Omega_3}} \right) + \\
 &+ \frac{1}{2} C_2 B_1 (d_2 - d_1) (\sin(\phi_1 - \phi_2) - C_0 \sin(\phi_1 + \phi_2)) - \frac{\sqrt{5}}{10} B_2 (E_2 d_2 + d_1) \left(\frac{1}{2} \sin 2\phi_2 + \phi_2 \right) \\
 M_3 &= \frac{C_0}{B_1} \sum_{i=1}^2 \kappa_i \Omega_i^2 \left(\frac{\cos(\alpha_i + \phi_1)}{\sqrt{5-1+2\Omega_i}} + \frac{\cos(\alpha_i - \phi_1)}{\sqrt{5-1-2\Omega_i}} \right) + \frac{C_1 \kappa_3 \Omega_3^2}{B_1} \left(\frac{\cos(\alpha_3 + \phi_1)}{\sqrt{5-1+2\Omega_3}} + \frac{\cos(\alpha_3 - \phi_1)}{\sqrt{5-1-2\Omega_3}} \right) + \\
 &+ \frac{1}{2} \frac{C_1 B_2}{B_1} (d_1 - d_2) (\cos(\phi_1 - \phi_2) - C_0 \cos(\phi_1 + \phi_2)) - \frac{\sqrt{5}}{20} (E_1 d_2 + d_1) \cos 2\phi_1 \\
 M_4 &= \frac{C_0}{B_2} \sum_{i=1}^2 \kappa_i \Omega_i^2 \left(\frac{\cos(\alpha_i + \phi_2)}{\sqrt{5+1+2\Omega_i}} + \frac{\cos(\alpha_i - \phi_2)}{\sqrt{5+1-2\Omega_i}} \right) + \frac{C_2 \kappa_3 \Omega_3^2}{B_2} \left(\frac{\cos(\alpha_3 + \phi_2)}{\sqrt{5+1+2\Omega_3}} + \frac{\cos(\alpha_3 - \phi_2)}{\sqrt{5+1-2\Omega_3}} \right) + \\
 &+ \frac{1}{2} \frac{C_2 B_1}{B_2} (d_1 - d_2) (\cos(\phi_1 - \phi_2) + C_0 \cos(\phi_1 + \phi_2)) - \frac{\sqrt{5}}{20} (E_2 d_2 + d_1) \cos 2\phi_2 \\
 M_5 &= \frac{c_1 \exp(a_1 t)}{a_1 \kappa_1} \left(\frac{B_2 \left((3 + \sqrt{5}) \Omega_1 - (\sqrt{5} + 1) \right) \sin(\alpha_1 + \phi_2) - B_1 \left((3 - \sqrt{5}) \Omega_1 + \sqrt{5} - 1 \right) \sin(\alpha_1 - \phi_1)}{(\sqrt{5} + 1 + 2\Omega_1) (\sqrt{5} - 1 - 2\Omega_1)} + \right. \\
 &+ \left. \frac{B_1 \left((3 - \sqrt{5}) \Omega_1 - (\sqrt{5} - 1) \right) \sin(\alpha_1 + \phi_1) - B_2 \left((3 + \sqrt{5}) \Omega_1 + \sqrt{5} + 1 \right) \sin(\alpha_1 - \phi_2)}{(\sqrt{5} + 1 - 2\Omega_1) (\sqrt{5} - 1 + 2\Omega_1)} \right) \\
 M_6 &= \frac{c_2 \exp(a_2 t)}{a_2 \kappa_2} \left(\frac{B_2 \left((3 + \sqrt{5}) \Omega_2 - (\sqrt{5} + 1) \right) \sin(\alpha_2 + \phi_2) - B_1 \left((3 - \sqrt{5}) \Omega_2 + \sqrt{5} - 1 \right) \sin(\alpha_2 - \phi_1)}{(\sqrt{5} + 1 + 2\Omega_2) (\sqrt{5} - 1 - 2\Omega_2)} + \right. \\
 &+ \left. \frac{B_1 \left((3 - \sqrt{5}) \Omega_2 - (\sqrt{5} - 1) \right) \sin(\alpha_2 + \phi_1) - B_2 \left((3 + \sqrt{5}) \Omega_2 + \sqrt{5} + 1 \right) \sin(\alpha_2 - \phi_2)}{(\sqrt{5} + 1 - 2\Omega_2) (\sqrt{5} - 1 + 2\Omega_2)} \right) \\
 M_7 &= \frac{c_3 \exp(a_3 t)}{a_3 \kappa_3} \left(- \frac{B_2 \left((\sqrt{5} + 1) \Omega_2 - 2 \right) \sin(\alpha_3 + \phi_2) + B_1 \left((\sqrt{5} - 1) \Omega_2 + 2 \right) \sin(\alpha_3 - \phi_1)}{(\sqrt{5} + 1 + 2\Omega_3) (\sqrt{5} - 1 - 2\Omega_3)} + \right. \\
 &+ \left. \frac{B_1 \left((\sqrt{5} - 1) \Omega_2 - 2 \right) \sin(\alpha_3 + \phi_1) + B_2 \left((\sqrt{5} + 1) \Omega_2 + 2 \right) \sin(\alpha_3 - \phi_2)}{(\sqrt{5} + 1 - 2\Omega_3) (\sqrt{5} - 1 + 2\Omega_3)} \right) \\
 M_8 &= \frac{(3 - \sqrt{5}) c_1 B_1}{2 a_1 \kappa_1} \left(\frac{\sin(\alpha_1 - \phi_1)}{\sqrt{5 - 1 - 2\Omega_1}} + \frac{\sin(\alpha_1 + \phi_1)}{\sqrt{5 - 1 + 2\Omega_1}} \right) + \frac{(3 + \sqrt{5}) c_1 B_2}{2 a_1 \kappa_1} \left(\frac{\sin(\alpha_1 - \phi_2)}{\sqrt{5 + 1 - 2\Omega_1}} + \frac{\sin(\alpha_1 + \phi_2)}{\sqrt{5 + 1 + 2\Omega_1}} \right) \\
 M_9 &= \frac{(3 - \sqrt{5}) c_2 B_1}{2 a_2 \kappa_2} \left(\frac{\sin(\alpha_2 - \phi_1)}{\sqrt{5 - 1 - 2\Omega_2}} + \frac{\sin(\alpha_2 + \phi_1)}{\sqrt{5 - 1 + 2\Omega_2}} \right) + \frac{(3 + \sqrt{5}) c_2 B_2}{2 a_2 \kappa_2} \left(\frac{\sin(\alpha_2 - \phi_2)}{\sqrt{5 + 1 - 2\Omega_2}} + \frac{\sin(\alpha_2 + \phi_2)}{\sqrt{5 + 1 + 2\Omega_2}} \right) \\
 M_{10} &= \frac{(\sqrt{5} - 1) c_3 B_1}{2 a_3 \kappa_3} \left(\frac{\sin(\alpha_3 - \phi_1)}{\sqrt{5 - 1 - 2\Omega_3}} + \frac{\sin(\alpha_3 + \phi_1)}{\sqrt{5 - 1 + 2\Omega_3}} \right) - \frac{(\sqrt{5} + 1) c_3 B_2}{2 a_3 \kappa_3} \left(\frac{\sin(\alpha_3 - \phi_2)}{\sqrt{5 + 1 - 2\Omega_3}} + \frac{\sin(\alpha_3 + \phi_2)}{\sqrt{5 + 1 + 2\Omega_3}} \right),
 \end{aligned}$$

где, для сокращения записи, введены обозначения $C_0 = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $C_1 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$, $C_2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$,
 $D_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{3\sqrt{5}}{5} + 1\right)$, $D_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3\sqrt{5}}{5} - 1\right)$, $E_1 = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})$, $E_2 = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$.

Исследование временного среднего для уравнений второго приближения (4) показывает наличие резонансного соотношения, которое характеризует эффект синхронизации роторов двух двигателей, установленных на общей платформе.

Рассмотрим систему вблизи резонанса $\Omega_1 - \Omega_2 = 0$, номинальные частоты вращения двигателей близки между собой, но далеки от частот колебаний платформ. Вводим расстройку по частоте $\Delta = \Omega_1 - \Omega_2$ и медленную фазу, характеризующую разность быстровращающихся фаз $\theta(t) = \alpha_1(t) - \alpha_2(t)$. В системе второго приближения переходим к новой переменной θ .

Уравнения для медленных переменных, осредненные по быстрым переменным $\phi_1, \phi_2, \alpha_1, \alpha_3$ принимают вид:

$$\begin{aligned} \dot{B}_1 &= -n_{11} \frac{\Delta \sin \theta}{B_1} + n_{12} B_1, \\ \dot{B}_2 &= -n_{21} \frac{\Delta \sin \theta}{B_2} + n_{22} B_2, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\dot{\theta} = \Delta + p_0 \sin \theta + p_1 B_1^2 + p_2 B_2^2$$

где

$$n_{11} = \frac{2}{5} \mu_2 (3 - \sqrt{5} + 2\Omega_1 \Omega_2) \kappa_1 \kappa_2 n_{011} n_{012}$$

$$n_{21} = \frac{2}{5} \mu_2 (3 + \sqrt{5} + 2\Omega_1 \Omega_2) \kappa_1 \kappa_2 n_{021} n_{022}$$

$$n_{12} = -\frac{1}{5} (5 - 2\sqrt{5}) \mu_2 \sum_{i=1}^2 \frac{c_i}{a_i} n_{01i} - \frac{1}{10} (5 - \sqrt{5}) \mu_2 \frac{c_3}{a_3} n_{013} + \frac{1}{20} \left(\frac{1}{2} (\sqrt{5} - 1) d_1^2 + (\sqrt{5} + 1) d_1 d_2 + (\sqrt{5} + 2) d_2^2 \right) \pi \mu_2$$

$$n_{22} = -\frac{1}{5} (5 + 2\sqrt{5}) \mu_2 \sum_{i=1}^2 \frac{c_i}{a_i} n_{02i} - \frac{1}{10} (5 + \sqrt{5}) \mu_2 \frac{c_3}{a_3} n_{023} + \frac{1}{20} \left(\frac{1}{2} (\sqrt{5} + 1) d_1^2 + (\sqrt{5} - 1) d_1 d_2 + (\sqrt{5} - 2) d_2^2 \right) \pi \mu_2$$

$$p_0 = 8\mu^2 \left(\frac{c_2}{a_2 \kappa_2} \kappa_1 (\Omega_1^2 - 1) n_{011} n_{021} + \frac{c_1}{a_1 \kappa_1} \kappa_2 (\Omega_2^2 - 1) n_{012} n_{022} \right)$$

$$p_1 = \mu^2 \left(\frac{1}{2} (7 - 3\sqrt{5}) \left(\frac{c_1}{a_1 \kappa_1} \right)^2 \frac{n_{011}}{\Omega_1} - \frac{1}{2} (7 - 3\sqrt{5}) \left(\frac{c_2}{a_2 \kappa_2} \right)^2 \frac{n_{012}}{\Omega_2} \right) = \frac{1}{2} (7 - 3\sqrt{5}) \mu^2 \sum_{i=1}^2 \left(\frac{c_i}{a_i \kappa_i} \right)^2 \frac{n_{01i}}{\Omega_i}$$

$$p_2 = \mu^2 \left(\frac{1}{2} (7 + 3\sqrt{5}) \left(\frac{c_1}{a_1 \kappa_1} \right)^2 \frac{n_{021}}{\Omega_1} - \frac{1}{2} (7 + 3\sqrt{5}) \left(\frac{c_2}{a_2 \kappa_2} \right)^2 \frac{n_{022}}{\Omega_2} \right) = \frac{1}{2} (7 + 3\sqrt{5}) \mu^2 \sum_{i=1}^2 \left(\frac{c_i}{a_i \kappa_i} \right)^2 \frac{n_{02i}}{\Omega_i}$$

$$n_{0ji} = \frac{\Omega_i^2}{\left(\sqrt{5} + (-1)^j + 2\Omega_i \right) \left(\sqrt{5} + (-1)^j - 2\Omega_i \right)}, \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2.$$

В системе (5) B_1 , B_2 – медленные амплитуды колебаний оснований первого, на котором установлены два двигателя, и второго соответственно, θ – медленная фаза.

Далее рассмотрим стационарные режимы движений. Зависимости квадратов амплитуд колебаний платформ и фазы стационарных колебаний от расстройки по частоте имеют вид:

$$B_1^2 = - \frac{n_{11} n_{22} \Delta^2}{p_0 n_{12} n_{22} + p_1 n_{11} n_{22} \Delta + p_2 n_{12} n_{21} \Delta},$$

$$B_2^2 = - \frac{n_{12} n_{21} \Delta^2}{p_0 n_{12} n_{22} + p_1 n_{11} n_{22} \Delta + p_2 n_{12} n_{21} \Delta},$$

$$\sin \theta = - \frac{n_{12} n_{22} \Delta}{p_0 n_{12} n_{22} + p_1 n_{11} n_{22} \Delta + p_2 n_{12} n_{21} \Delta}.$$

Графики зависимостей амплитуд колебаний от расстройки по частоте изображены на рис. 2-3.

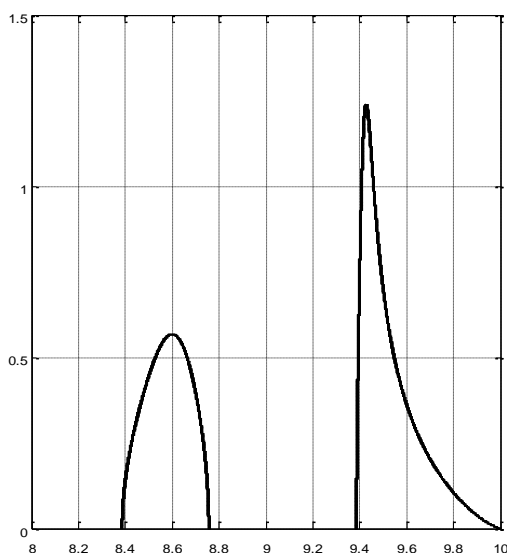


Рис. 2. Амплитудно-частотная характеристика $B_1(\Delta)$ ($d_1 = d_2 = 10$)

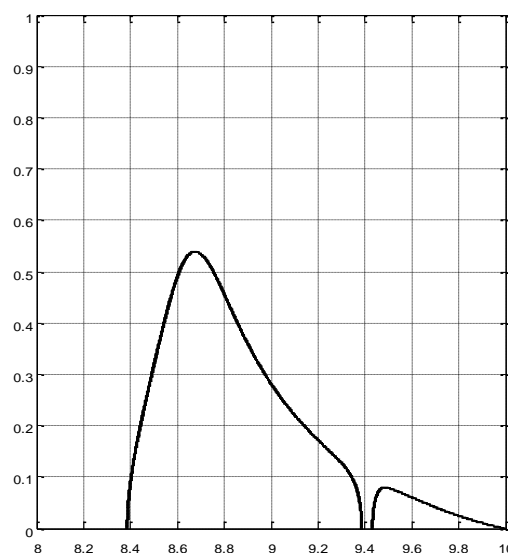


Рис. 3. Амплитудно-частотная характеристика $B_2(\Delta)$ ($d_1 = d_2 = 10$)

Из графиков (рис. 2, 3) видно, что в модели присутствует нелинейность, несмотря на то, что моментная характеристика и момент сопротивления двигателей считаются линейными. В

рассматриваемой системе слабая нелинейность возникает за счет малой нелинейной вынуждающей силы, которая обусловлена работой трех двигателей с неуравновешенными роторами. Обе характеристики представлены в виде двух частей различной амплитуды.

На рис. 2, 4 и рис. 3, 5 изображены амплитудно-частотные характеристики при изменении коэффициентов диссипации первого (с двумя двигателями) и второго (с одним двигателем) оснований соответственно. Из рисунков видно, что увеличение коэффициента линейного демпфирования уменьшает амплитуду колебаний оснований. Частотный диапазон одной из частей амплитудной характеристики первого основания сужается при увеличении коэффициента диссипации. Расстояние между частями кривой увеличивается. У амплитудно-частотной характеристики второго основания расстояние между частями кривой уменьшается, затем происходит слияние обеих частей кривой в общую характеристику.

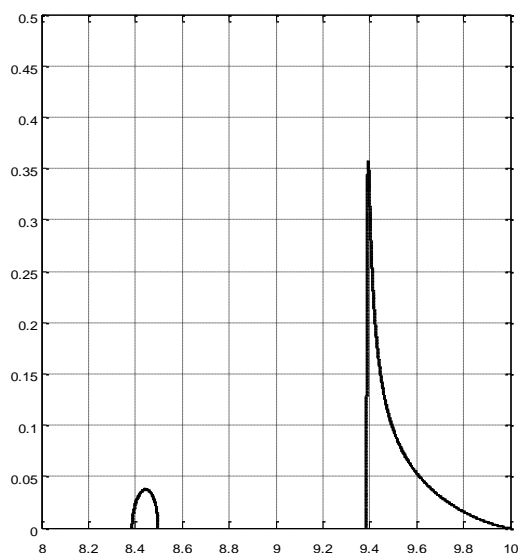


Рис. 4. Амплитудно-частотная характеристика

$$B_1(\Delta) (d_1 = d_2 = 100)$$

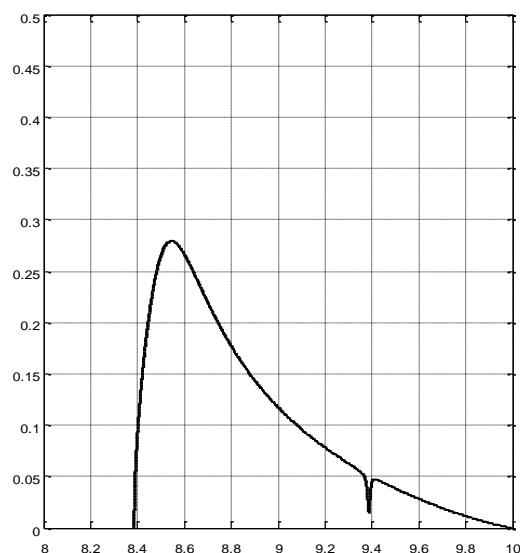


Рис. 5. Амплитудно-частотная характеристика

$$B_2(\Delta) (d_1 = d_2 = 100)$$

Список литературы

1. Гордеев Б.А., Леонтьева А.В. Задача о вращении трех асинхронных двигателей на упругом основании // Вестник машиностроения. – 2012. – № 9. – С. 32-40.
2. Леонтьева А.В., Гордеев Б.А. Самосинхронизация динамических объектов. Системы двух и трех двигателей, установленные на вязкоупругом основании. LAP LAMBERT Academic Publishing, 2016. - 76 с.
3. Леонтьева А.В., Леонтьев Н.В. Влияние деформируемого основания на установление режима синхронизации в системе двух двигателей // Труды X Всероссийской научной конференции «Нелинейные колебания механических систем» (Нижний Новгород, 26-29 сентября 2016 г.). - Нижний Новгород, 2016. - С. 532-538.
4. Блехман И.И. Самосинхронизация вибраторов некоторых вибрационных машин. – Инженерный сборник. – 1953. - т. 16. - С. 75-80.

5. Кононенко В.О. Колебательные системы с ограниченным возбуждением. – М.: Наука, 1964. – 254 с.
6. Журавлев В.Ф., Климов Д.М. Прикладные методы в теории колебаний. – М.: Наука, 1988. – 328 с.
7. Леонтьева А.В., Леонтьев Н.В. Об эффекте синхронизации роторов в системах двух и трех двигателей // III Международная Школа-конференция молодых ученых "Нелинейная динамика машин" – School-NDM 2016: сборник трудов, 12-15 апреля 2016 г. – М: ИМАШ РАН, 2016. - С. 211-219.