УДК 534.1

СТАБИЛИЗАЦИЯ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ МАССЫ, ДВИЖУЩЕЙСЯ ВДОЛЬ СТРУНЫ

© Владимир Иванович Ерофеев[1,2], Алексей Олегович Мальханов[1], Владимир Михайлович Сандалов[2]
[1]*Институт проблем машиностроения Российской академии наук, Нижний Новгород, Россия*
[2]*Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия*
erof.vi@yandex.ru

Аннотация. *Поставлена и решена задача об упругой направляющей, несущей движущийся объект, как динамической управляемой системе.*
Ключевые слова: *движущаяся масса, струна, поперечные колебания, стабилизация.*

Работа выполнялась при поддержке Российского научного фонда (Грант № 14-19-01637).

STABILIZATION OF TRANSVERSE OSCILLATIONS OF MASS MOVING ALONG THE STRING

© V.I. Erofeev[1,2], A.O. Malkhanov[1], V.M. Sandalov[2]
[1]*Mechanical Engineering Research Institute, Russian Academy of Sciences, Nizhny Novgorod, Russia*
[2]*Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod, Russia*
erof.vi@yandex.ru

Abstract. *Set and solved the problem of elastic guide carrier high-speed moving object as a dynamic controllable system.*
Keywords: *mass moving, string, transverse oscillations, stabilization.*

Acknowledgements: *The work was supported by the Russian Science Foundation, project no 14-19-01637.*

Проблема взаимодействия распределенных упругих систем с движущимися по ним сосредоточенными объектами возникла более 150 лет назад в приложении к задачам динамики мостов [1]. Изначально подобные задачи решались в квазистатическом приближении, без учета инерционных свойств распределенной системы. С позиции динамики упругих систем эти задачи начал решать С.П. Тимошенко [2]. Несмотря на то, что предложенный им подход к решению указанного класса задач обусловил последующие успехи теории и ее технических приложений [3-5], он имеет и ряд недостатков, например, не позволяет проанализировать влияние распределенной системы на движущийся объект.

В конце прошлого века был предложен подход [6, 7], позволивший физически и математически корректно ставить задачи о самосогласованном движении распределенной и движущейся по ней сосредоточенной систем. Этот подход позволил выявить два ранее не учитываемых в задачах данного типа принципиально важных фактора: наличие в движущемся контакте инерциальных сил и сил давления упругих волн.

В настоящее время интерес к данной теме не уменьшается, о чем свидетельствует достаточное количество публикуемых работ, посвященных этой проблеме [8-20].

В настоящей работе рассматривается введение управления для стабилизации поперечных колебаний объекта, движущегося вдоль упругой струны. То есть, осуществляется постановка и проводится решение задачи об упругой направляющей (струна), несущей движущийся объект (масса), как динамической управляемой системе.

Рассмотрим массу m, движущуюся со скоростью V вдоль бесконечной струны (Рис. 1):

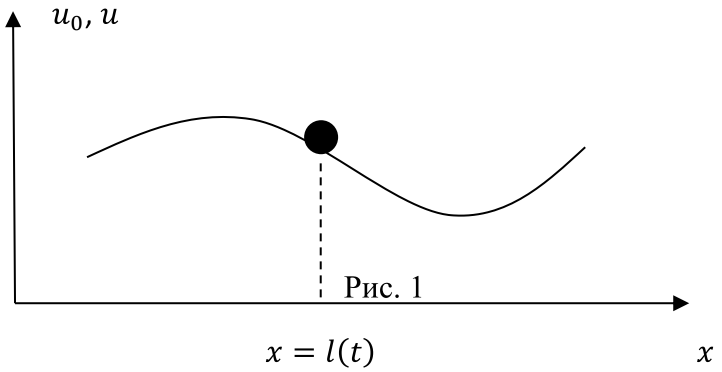

Рис. 1

Система уравнений, описывающая поперечные колебания струны, массы, а также соответствующие граничные условия имеют вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \tag{1}$$

$$m\frac{d^2 u_0}{dt^2} = \left[N\frac{\partial u}{\partial x} + \rho\frac{dl}{dt}\frac{\partial u}{\partial t}\right]_{x=l(t)}, \tag{2}$$

$$[u(x,t)]_{x=l(t)} = u(l(t)+0,t) - u(l(t)-0,t) = 0, \tag{3}$$

$$u_0(t) = u(l(t)-0,t) = u(l(t)+0,t), \tag{4}$$

$$l(t) = Vt, \tag{5}$$

$$\lim_{|x|\to\infty} |u(x,t)| < \infty. \tag{6}$$

$$c_0 = \sqrt{\frac{N}{\rho}}, \tag{7}$$

$$F(u_0) = \alpha u_0 + \beta\frac{du_0}{dt} \tag{8}$$

Здесь $u(x,t)$, $u_0(t)$ – функции, описывающие поперечные отклонения струны и массы, $x = l(t)$ – закон движения массы в продольном направлении (в нашем случае $l(t) = V(t)$, N – натяжение струны, ρ – плотность струны.

Известно, что динамика системы струна-масса будет иметь принципиально разный характер в зависимости от скорости V. В случае $V < c_0$ постоянный прогиб струны в точке контакта с массой распространяется с постоянной скоростью V вместе с массой. Данный случай не представляет особого интереса.

Случай, когда скорость движения массы превосходит скорость волны в струне, интересен излучением волн, обусловленным эффектом Вавилова-Черенкова. Будем полагать, что волны, возникающие вследствие сверхзвукового движения массы в продольном направлении, возбуждают ее поперечные колебания, которые могут неограниченно нарастать. Для гашения поперечных колебаний массы введем внешнюю силу $F(u_0)$, в предположении, что она линейно зависит от поперечного перемещения массы и от скорости этого перемещения. Попробуем подобрать параметры α и β внешней силы $F(u_0)$ так, чтобы погасить эффект неустойчивости. Тогда уравнение (2) примет вид

$$m\frac{d^2u_0}{dt^2} = \left[N\frac{\partial u}{\partial x} + \rho\frac{dl}{dt}\frac{\partial u}{\partial t}\right]_{x=l(t)} + F(u_0), \qquad (2')$$

Поперечные колебания струны и массы будем искать в виде

$$u(x,t) = Ae^{i(\omega t - kx)}, u_0(t) = Be^{i\Omega t} \qquad (9)$$

Подставив в (1) решения в таком виде, получим дисперсионное уравнение:

$$\omega^2 - c_0^2k^2 = 0, \qquad (10)$$

Дополним это уравнение кинематическим инвариантом, выражающим условие равенства фаз в точке контакта:

$$\omega - kV = \Omega, \qquad (11)$$

Решение кинематической задачи (10)-(11) допускает наглядную графическую интерпретацию. На плоскости (k,ω) дисперсионное уравнение (10) определяет некоторые кривые (в данном случае прямые), а кинематическому инварианту (11) соответствует прямая, наклон которой определяется скоростью движения (Рис. 2):

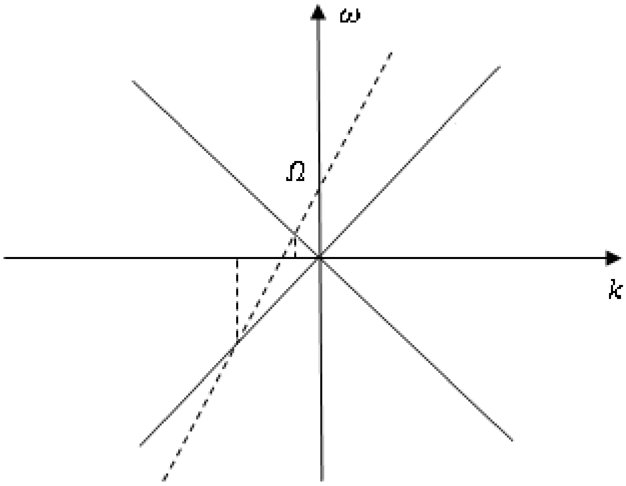

Рис. 2

Как видно из Рис. 2 в данном случае возбуждается две бегущие волны, распространяющиеся за массой и бегущие в разные стороны.
Решая совместно уравнения (10) и (11), получим:

$$k_1 = \frac{\Omega}{c_0 - V},$$
$$k_2 = -\frac{\Omega}{c_0 + V} \tag{12}$$

Далее рассмотрим случай, когда поперечные колебания массы нарастают. Это возможно, если предположить, что в решении (9) $Im(\Omega) < 0$. Тогда для закритического значения скорости $V > c_0$ получим

$$Im(k_1) > 0,$$
$$Im(k_2) > 0 \tag{13}$$

Используя условие конечности величины поперечных перемещений струны на бесконечности, примем следующее: волна с волновым числом k_1 распространяется позади массы в положительном направлении оси, и с k_2 – позади $(x < Vt)$ в отрицательном направлении оси . Таким образом, поперечное перемещение струны позади массы будет складываться из $u^1(x,t)$ и $u^2(x,t)$, которые имеют вид:

$$u^1(x,t) = A_1 e^{i(\omega_1 t - k_1 x)},$$
$$u^2(x,t) = A_2 e^{i(\omega_2 t - k_2 x)}, \;\; u^-(x,t) = u^1 + u^2, \tag{14}$$

где ω_j может быть найдено из (7) после подстановки соответствующего k.
Впереди массы возмущения нет:

$$u^+(x,t) = 0.$$

Заметим, что волна, распространяющаяся в положительном направлении оси, не затухнет на бесконечности при выполнении условий (13), т.е. условие (6) не будет выполнено. Обратимся здесь к постановке задачи о нахождении параметров внешней силы $F(u_0)$ для гашения колебаний массы. Оказывается, что подобрав нужным образом коэффициенты α и β, тем самым переведя мнимую часть частоты колебаний массы $Im(\Omega)$ из отрицательной полуплоскости в положительную, мы автоматически добьемся и выполнения условия (6).
Продифференцируем условие (3) по времени, получим

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{dl}{dt} + \frac{\partial u}{\partial t}\right]_{x=l(t)} = 0, \tag{15}$$

Откуда

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]_{x=l(t)} = -\frac{dl}{dt}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{x=l(t)}. \tag{16}$$

С учетом (5), соотношение (2) примет вид:

$$m\frac{d^2u_0}{dt^2} = (N - V^2\rho)\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{x=l(t)} + \alpha u_0 + \beta\frac{du_0}{dt}, \tag{17}$$

Подставляя найденные перемещения струны и массы, получим

$$-mB\Omega^2 = i(N - V^2\rho)(A_1k_1 + A_2k_2) + \alpha B + i\beta B\Omega, \tag{18}$$

или, принимая во внимание условие (4), которое можно переписать в виде

$$A_1 = A_2 = B, \tag{19}$$

где A_1 – амплитуда волны, бегущей впереди массы, A_2 – амплутуда волны, распространяющейся позади массы, и выражения волновых чисел через частоту колебаний массы, соотношение (8) перепишется в виде

$$-m\Omega^2 = i(N - V^2\rho)\left(\frac{\Omega}{c_0 - V} - \frac{\Omega}{c_0 + V}\right) + \alpha + i\beta\Omega, \tag{20}$$

или

$$m\Omega^2 + i(\beta + 2V\rho)\Omega + \alpha = 0. \tag{21}$$

Таким образом задача гашения нарастающих колебаний сводится к нахождению параметров α и β, таких, чтобы $Im(\Omega) \geq 0$. Сделав замену $\Omega = -\Theta$, задачу можно свести к поиску вышеупомянутых параметров таких, чтобы комплексный полином

$$m\Theta^2 - i(\beta + 2V\rho)\Theta + \alpha = 0 \tag{22}$$

был устойчив, т.е. чтобы $Im(\Theta) < 0$.

Для решения этой задачи удобно воспользоваться критерием Эрмита-Гурвица. Для полинома (22) матрица Эрмита-Гурвица имеет вид:

$$M = \begin{bmatrix} m & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & -(\beta + 2V\rho) & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & -(\beta + 2V\rho) & 0 \end{bmatrix} \tag{23}$$

Согласно критерию Эрмита-Гурвица, для устойчивости полинома (22) необходимо и достаточно, чтобы ряд, составленный из определителей:

$$\Delta_0 = m,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} m & 0 \\ 0 & -(\beta + 2V\rho) \end{vmatrix},$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} m & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & -(\beta + 2V\rho) & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & -(\beta + 2V\rho) & 0 \end{vmatrix}$$

был знакопеременным.
Откуда получаем:

$$-m(\beta + 2V\rho) < 0, -m(\beta + 2V\rho)^2\alpha > 0, \quad (24)$$

или

$$\beta > -2V\rho, \alpha < 0 \quad (25)$$

Таким образом, введение внешней силы $F(u_0)$, параметры которой находятся в области, определяемой соотношениями (25) позволяет затушить колебания массы, а вместе с тем добиться выполнения условий (6) для струны. Физически появление стабилизирующей силы, подобной $F(u_0)$ эквивалентно введению вязко-упругого элемента для массы.

Список литературы

1. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. - М.: Изд-во Ленанд, 2015. - 352 с.
2. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. - М.: Наука, 1967.
3. Филиппов А.П., Кохманюк С.С., Воробьев Ю.С. Воздействие динамических нагрузок на элементы конструкций. - Киев: Наукова думка, 1974. - 176 с.
4. Кохманюк С.С., Янютин В.Г., Романенко Л.Г. Колебания деформируемых систем при импульсных и подвижных нагрузках. - Киев: Наукова думка, 1980. - 232 с.
5. Иванченко И.И. Динамика транспортных сооружений: высокоскоростные подвижные, сейсмические и ударные нагрузки. - М.: Наука, 2011. - 574 с.
6. Весницкий А.И. Волны в системах с движущимися границами и нагрузками. - М.: Физматлит, 2001. - 320 с.
7. Весницкий А.И. Избранные труды по механике. - Нижний Новгород: ИД «Наш дом», 2010. - 248 с.
8. Анисимов В.Н., Литвинов В.Л. Резонансные свойства механических объектов с движущимися границами. - Самара: Самар.гос.техн.ун-т, 2009. - 132 с.
9. Литвинов В.Л., Анисимов В.Н. Математическое моделирование и исследование колебаний одномерных механических систем с движущимися границами. - Самара: Самар.гос.техн.ун-т, 2017. - 150 с.
10. Метрикин А.В., Веричев С.Н., Вострухов А.В. Фундаментальные задачи высокоскоростного наземного транспорта. - Saarbrucken, Germany: LAP Lambert Academic Publishing, 2014. - 208 с.
11. Денисов Г.Г., Новиков В.В., Смирнова М.Л. К вопросу об импульсе упругих волн и их воздействии на препятствие // Проблемы прочности и пластичности: Межвузовский сборник. Вып. 70. - Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2008. - С. 39-50.

12. Денисов Г.Г., Новиков В.В., Федоров А.Е., Смирнова М.Л. К задаче о движении тел в средах с минимальными энергетическими потерями // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. – 2009. - №5. - С. 128-136.
13. Денисов Г.Г., Новиков В.В., Смирнова М.Л. Об импульсе волн при продольных колебаниях упругого стержня // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. – 2010. - №5(1). - С. 134-137.
14. Лисенкова Е.Е. Движение объекта вдоль одномерной направляющей под действием реакции излучения упругих волн // Известия РАН. Механика твердого тела. - 2007. - № 6. - С. 25-37.
15. Lamb J.L. Critical velocities for rocket sled excitation of rail resonance // Johns Hopkins APL Technical Digest. - 2000. - Vol. 21, No 3. - P. 448–458.
16. Бутова С.В., Герасимов С.И., Ерофеев В.И., Камчатный В.Г. Устойчивость движения высокоскоростных объектов по направляющим ракетного трека // Проблемы машиностроения и надежности машин. - 2015. - № 1. - С.3-8.
17. Герасимов С.И., Ерофеев В.И., Камчатный В.Г., Каныгин И.И. Оценка резонансоопасных гармоник при колебаниях упругой направляющей с движущимся по ней двухопорным объектом // Проблемы прочности и пластичности. - 2015. - Т.77, № 4. - С.412-424.
18. Герасимов С.И., Ерофеев В.И. Расчет изгибно-крутильных колебаний рельсовой направляющей ракетного трека // Проблемы машиностроения и надежности машин. - 2016. - № 3. - С.25-27.
19. Герасимов С.И., Ерофеев В.И., Лисенкова Е.Е. Задачи волновой динамики систем, несущих движущиеся нагрузки, и их приложение к испытаниям на ракетном треке // Сборник трудов III международной школы-конференции молодых ученых "Нелинейная динамика машин" - SCHOOL-NDM 2016. - М.: ИМАШ РАН, 2016. - С. 45-54.
20. Герасимов С.И., Ерофеев В.И., Камчатный В.Г., Одзерихо И.А. Термомеханические и деформационные процессы при высокоскоростном скольжении нагрузок по рельсовым направляющим ракетного трека // Вестник научно-технического развития. - 2017. - № 10 (122). - С.3-7.