

УДК 534.1

## ДВИЖЕНИЕ ДВУХОПОРНОГО ЭКИПАЖА ПО НАПРАВЛЯЮЩЕЙ РАКЕТНОГО ТРЕКА

© Владимир Иванович Ерофеев<sup>1</sup>, Даниил Александрович Колесов<sup>1</sup>,  
Елена Евгеньевна Лисенкова<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Институт проблем машиностроения Российской академии наук, Нижний Новгород, Россия

<sup>2</sup>Нижегородский институт управления – филиал РАНХиГС, Нижний Новгород, Россия  
[erof.vi@yandex.ru](mailto:erof.vi@yandex.ru)

**Аннотация.** Рассматривается излучение волн источником, действующим на движущийся по направляющей ракетного трека двухопорный экипаж. Находятся условия на параметры объекта и источника, при которых сопротивление движению будет минимальным.

**Ключевые слова:** двухопорный экипаж, высокоскоростное движение, ракетный трек, излучение волн.

Работа выполнялась при поддержке Российского научного фонда (Грант № 14-19-01637).

## THE MOVEMENT OF THE TWO-TRACK CREW ON THE ROCKET TRACK GUIDE

© V.I. Erofeev<sup>1</sup>, D.A. Kolesov<sup>1</sup>, E.E. Lissenkova<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Mechanical Engineering Research Institute, Russian Academy of Sciences, Nizhny Novgorod,  
Russia

<sup>2</sup>Nizhegorodsky Institute of Management, Nizhny Novgorod, Russia  
[erof.vi@yandex.ru](mailto:erof.vi@yandex.ru)

**Abstract.** The radiation of waves by a source acting on a two-track crew moving along a rocket track is considered. There are conditions for the parameters of the object and the source, at which the resistance to movement will be minimal.

**Keywords:** two-track crew, high-speed movement, rocket track, wave radiation.

**Acknowledgments:** The work was supported by the Russian Science Foundation, project no 14-19-01637.

Движению грузов по упругим направляющим традиционно уделяется большое внимание исследователей [1 – 7], что связано с широким спектром практических приложений. Особый интерес представляют задачи об излучении волн движущимися источниками и прежде всего в связи с исследованиями эффектов волнообразования, которые наблюдаются в скоростных железнодорожных магистралях и направляющих ракетного трека [3, 6, 8 – 14].

Ниже рассматривается излучение волн источником, действующим на движущийся по направляющей ракетного трека двухопорный экипаж, и находятся условия на параметры объекта и источника, при которых сопротивление движению будет минимальным.

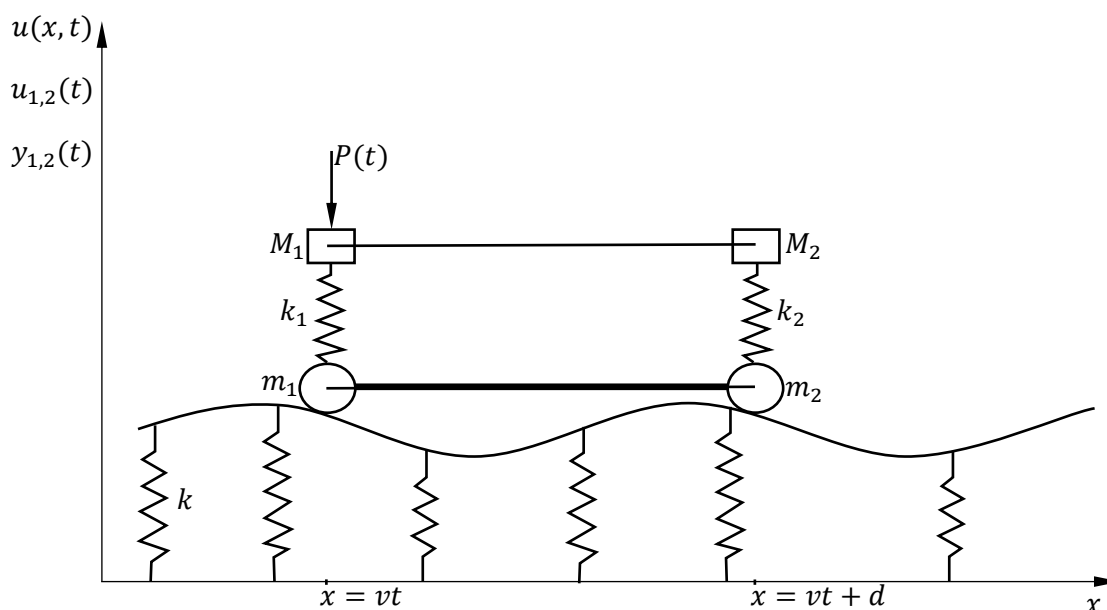


Рис. 1

В качестве модели направляющей ракетного трека будем использовать струну, лежащую на упругом основании модели Винклера. Экипаж представляет собой два осциллятора, связанных невесомой связью так, что рассмотрение между ними в процессе движения не меняется (рис. 1). Пусть на верхнюю массу одного из осцилляторов действует гармонический источник силы  $P(t) = p_0 e^{i\Omega t}$ . Динамическое поведение струны с равномерно движущимся вдоль нее экипажем описывается следующими уравнениями:

$$\rho u_{tt} - Nu_{xx} + ku = 0, \tag{1}$$

$$u(vt - 0, t) = u(vt + 0, t) = u_1(t),$$

$$u(vt + d - 0, t) = u(vt + d + 0, t) = u_2(t),$$

$$\Omega_{01}^2(u_1 - y_1) + \ddot{u}_1 = \mu_1^2(c^2 - v^2)[u_x]_{vt-0}^{vt+0},$$

$$\Omega_{02}^2(u_2 - y_2) + \ddot{u}_2 = \mu_2^2(c^2 - v^2)[u_x]_{vt+d-0}^{vt+d+0}, \tag{2}$$

$$\Omega_1^2(u_1 - y_1) + \dot{y}_1 = -\frac{P(t)}{M_1},$$

$$\Omega_2^2(u_2 - y_2) + \dot{y}_2 = 0.$$

Здесь  $u(x, t)$  – малые поперечные отклонения струны,  $\rho$ ,  $N$  – погонная плотность и натяжение струны,  $k$  – коэффициент упругости основания,  $y_j(t)$ ,  $u_j(t)$  – вертикальные смещения верхней ( $M_j$ ) и нижней ( $m_j$ ) масс соответственно  $j$ -го осциллятора ( $j = 1, 2$ ),  $k_j$  – жесткость пружины;  $\Omega_j^2 = \frac{k_j}{M_j}$ ,  $\Omega_{0j}^2 = \frac{k_j}{m_j}$ ,  $\mu_j^2 = \frac{\rho}{m_j}$ ; квадратные скобки означают разность предельных значений стоящих в них величин.

Анализ линейных задач в предположении равномерности движения объекта по направляющей, как правило, оказывается возможным разбить на два этапа:

- 1) решение задачи кинематики (отыскание частот и волновых чисел, возникающих в направляющей волн);
- 2) отыскание амплитуд этих волн и сил взаимодействия направляющей и объекта.

Используя разработанный в [3, 8] подход к исследованию подобного рода задач, вынужденное решение задачи (1)-(2) будем искать в форме:

$$\begin{aligned} u_v(x, t) &= A_v e^{i(\omega_v t - k_v x)}, \\ u_j(t) &= u_{0j} e^{i\Omega t}, \\ y_j(t) &= y_{0j} e^{i\Omega t}, \quad j = 1, 2. \end{aligned}$$

Тогда частоты  $\omega_v$  и волновые числа  $k_v$  определяются из системы уравнений:

$$\begin{cases} \omega_v^2 - c^2 k_v^2 - \omega_*^2 = 0, \\ \omega_v - k_v v = \Omega, \end{cases} \quad c = \sqrt{\frac{N}{\rho}}, \quad \omega_* = \sqrt{\frac{k}{\rho}}. \quad (3)$$

Первое из уравнений системы (3) является дисперсионным уравнением, а второе – условием равенства частот волн частоте источника в движущейся системе отсчета.

В зависимости от скорости движения экипажа  $v$  и частоты источника колебаний  $\Omega$ , частоты и волновые числа, определяемые (3), могут быть как действительными, так и комплексными. В случаях комплексных  $\omega_v, k_v$  среди решений задачи следует оставить лишь те, которые удовлетворяют условию ограниченности прогибов направляющей на бесконечности

$$|u(x, t)| < \infty, \quad x \rightarrow \pm\infty$$

При действительных же  $\omega_v, k_v$  выбор физически реализуемых решений производится с помощью условия излучения Мандельштама (волны должны отводить энергию от движущегося экипажа) [15].

Все возможные качественно различные случаи возбуждения волн при движении экипажа схематично представлены в таблице 1.

Таблица 1

	$0 < v < v_* = c \sqrt{1 - \frac{\Omega^2}{\omega_*^2}}$	$v < c$	$v > c$
$\Omega = 0$			
$\Omega < \omega_*$			
$\Omega > \omega_*$			

Рассмотрим ситуации, когда скорость движения экипажа не превышает скорости волн в струне без упругого основания ( $v < c$ ). Представляя решение в форме

$$u(x, t) = \begin{cases} A_1 e^{i(\omega_1 t - k_1 x)} & \text{при } x < vt \\ A_2 e^{i(\omega_2 t - k_2 x)} + A_3 e^{i(\omega_1 t - k_1 x)} & \text{при } vt < x < vt + d \\ A_4 e^{i(\omega_2 t - k_2 x)} & \text{при } x > vt + d \end{cases}$$

$$\omega_{1,2} = \frac{c^2 \Omega \mp v \sqrt{c^2(\Omega^2 - \omega_*^2) + v^2 \omega_*^2}}{c^2 - v^2}; \quad k_{1,2} = \frac{\Omega v \mp \sqrt{c^2(\Omega^2 - \omega_*^2) + v^2 \omega_*^2}}{c^2 - v^2}$$

и подставляя в граничные условия (2), получим систему алгебраических уравнений для определения амплитуд

$$\begin{aligned} A_1 &= A_2 + A_3 = u_{01}, \\ A_2 e^{-ik_2 d} + A_3 e^{-ik_1 d} &= A_4 e^{-ik_2 d} = u_{02}, \\ \Omega_{01}^2 (u_{01} - y_{01}) - \Omega^2 u_{01} &= \mu_1^2 (c^2 - v^2) i (k_1 A_1 - k_2 A_2 - k_1 A_3), \\ \Omega_{02}^2 (u_{02} - y_{02}) - \Omega^2 u_{02} &= \mu_2^2 (c^2 - v^2) i (k_2 A_2 e^{-ik_2 d} - k_1 e^{-ik_1 d} - k_2 A_4 e^{-ik_2 d}), \\ \Omega_1^2 (u_{01} - y_{01}) + \Omega^2 y_{01} &= -\frac{p_0}{M_1}, \\ \Omega_2^2 (u_{02} - y_{02}) + \Omega^2 y_{02} &= 0, \end{aligned}$$

из которой имеем

$$\begin{aligned} A_1 &= u_{01} = [(\alpha_2 \tau_2 - \beta_2) e^{i(k_2 - k_1)d} + \beta_2] \Omega_{01}^2 p_0 / M_1 \Delta, \\ A_2 &= (\alpha_2 \tau_2 - \beta_2) e^{i(k_2 - k_1)d} \Omega_{01}^2 p_0 / M_1 \Delta, \\ A_3 &= \beta_2 \Omega_{01}^2 p_0 / M_1 \Delta, \\ A_4 &= \alpha_2 \tau_2 e^{i(k_2 - k_1)d} \Omega_{01}^2 p_0 / M_1 \Delta, \\ u_{02} &= \alpha_2 \tau_2 e^{-ik_1 d} \Omega_{01}^2 p_0 / M_1 \Delta, \\ y_{02} &= \alpha_2 \Omega_{01}^2 \Omega_2^2 e^{-ik_1 d} p_0 / M_1 \Delta, \\ y_{01} &= [(\alpha_2 \tau_2 - \beta_2) (\Omega_{01}^2 - \Omega^2 + \alpha_1) e^{i(k_2 - k_1)d} + \beta_2 (\Omega_{01}^2 - \Omega^2)] p_0 / M_1 \Delta, \\ \Delta &= (\alpha_1 \tau_1 - \beta_1) (\alpha_2 \tau_2 - \beta_2) e^{i(k_2 - k_1)d} - \beta_1 \beta_2, \\ \alpha_j &= 2i \mu_j^2 \sqrt{c^2(\Omega^2 - \omega_*^2) + v^2 \omega_*^2}, \\ \tau_j &= \Omega_j^2 - \Omega^2, \\ \beta_j &= \Omega^2 (\Omega_{0j}^2 + \Omega_j^2 - \Omega^2), \quad j = 1, 2. \end{aligned}$$

Амплитуды колебаний масс и прогиба направляющей, конечно, существенно зависят от частоты источника силы и их зависимости носят резонансный характер, но, вследствие потерь на излучение, амплитуды на резонансных частотах ограничены.

Каждая из возбуждаемых волн, излучаясь, оказывает на экипаж давление, вызывая тем самым ответную реакцию, приводящую к сопротивлению движению [16]. Полная сила волнового сопротивления движению складывается из суммы волновых давлений возбуждаемых волн и вычисляется здесь для заданного закона движения по формуле

$$R(t) = -F_{pr} = -([F]_{vt+0}^{vt-0} + [F]_{vt+d+0}^{vt+d-0})$$

где  $F = \frac{1}{2} (\rho u_t^2 + N u_x^2 - k u^2) + \rho v u_x u_t$ .

Наличие частоты  $\Omega$  вынужденных колебаний нагрузки в результате эффекта Доплера ( $\Omega > \omega_*$ ) и «тормозного» излучения ( $\Omega < \omega_*$ ) приводит к сопротивлению движению и при  $v < c$ . С другой стороны, сила волнового сопротивления движению является гармонической функцией  $d$ , т.е. возможны режимы «торможения» и «ускорения» экипажа. Причем есть интервал значений, где сопротивление минимально для каждой опоры. Известно, что

направленное излучение способствует движению объекта [17, 18], что осуществимо при докритических скоростях движения объекта.

В данном случае направленное излучение, когда за экипажем  $x < vt$  излучается только одна, бегущая в  $-x$  направлении волна, можно реализовать при  $\Omega = \Omega_2 = \sqrt{k_2/M_2}$ , если  $(k_2 - k_1)d \neq 2\pi n$ ,  $n = 0, 1, 2 \dots$ . Впереди экипажа ( $x > vt + d$ ) волны не излучаются  $u(x, t) = 0$ , а в области  $vt < x < vt + d$  распространяются две волны, амплитуды которых

$$\begin{aligned} A_2 &= -e^{i(k_2-k_1)d} \Omega_{01}^2 p_0 / M_1 \delta, \\ A_3 &= \Omega_{01}^2 p_0 / M_1 \delta, \\ \delta &= -[(\alpha_1 \tau_1 - \beta_1) e^{i(k_2-k_1)d} + \beta_1]. \end{aligned}$$

Если расстояние между осцилляторами  $d = 2\pi n / (k_2 - k_1)$ , ( $n = 0, 1, 2 \dots$ ), то волны излучаются только в области  $vt < x < vt + d$ , амплитуды которых ограничены при  $\Omega \neq \Omega_2$ . Заметим, что при  $\Omega = \Omega_2$  нижняя масса  $m_2$  второго осциллятора не смещается вертикально  $u_2(t) = 0$ , хотя именно к ней приложены сила (поперечная составляющая силы реакции со стороны направляющей). Такое состояние системы называют часто «антирезонансом», возможность которого используется на практике при устройстве динамического гасителя [19].

Подсчитаем среднее значение за период действия источника  $T = 2\pi/\Omega$  силы давления волн на экипаж. При направленном излучении, когда  $\Omega = \Omega_2 = \sqrt{k_2/M_2}$  постоянная составляющая силы реакции со стороны ракетного трека имеет вид

$$\langle F_{pr} \rangle = \frac{\sqrt{\Omega_2^2 - 1 + \bar{v}^2} \bar{\Omega}_{01}^4 F_0 (\sqrt{\Omega_2^2 - 1 + \bar{v}^2} - \bar{v} \bar{\Omega}_2) \sin^2 \frac{\sqrt{\Omega_2^2 - 1 + \bar{v}^2}}{1 - \bar{v}^2} \bar{d}}{2(1 - \bar{v}^2) \delta \delta^*},$$

$$\begin{aligned} \delta \delta^* &= \bar{\mu}_1^4 \bar{\tau}_1^2 (\bar{\Omega}_2^2 - 1 + \bar{v}^2) + \bar{\beta}_1^2 \sin^2 \frac{\sqrt{\Omega_2^2 - 1 + \bar{v}^2}}{1 - \bar{v}^2} \bar{d} - \sqrt{\Omega_2^2 - 1 + \bar{v}^2} \bar{\mu}_1^2 \bar{\tau}_1 \bar{\beta}_1 \sin^2 \frac{\sqrt{\Omega_2^2 - 1 + \bar{v}^2}}{1 - \bar{v}^2} \bar{d}, \\ F_0 &= \frac{p_0^2 \rho}{M_1^2 \omega_*^2}. \end{aligned}$$

Здесь введены безразмерные параметры

$$\begin{aligned} \bar{\mu}_1 &= \rho c / m_1 \omega_*, & \bar{v} &= v / c, & \bar{\Omega}_j &= \Omega_j / \omega_* \quad (j = 1, 2), & \bar{\Omega}_{01} &= \Omega_{01} / \omega_*, \\ \bar{d} &= d \omega_* / c, & \bar{\tau}_1 &= \bar{\Omega}_1^2 - \bar{\Omega}_2^2, & \bar{\beta}_1 &= \bar{\Omega}_2^2 (\bar{\Omega}_{01}^2 + \bar{\Omega}_1^2 - \bar{\Omega}_2^2). \end{aligned}$$

Эта постоянная составляющая во многом зависит от расстояния между осцилляторами. Так,

если  $\bar{d} = \frac{n\pi(1-\bar{v}^2)}{2\sqrt{\bar{\Omega}_2^2-1-\bar{v}^2}}$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , то  $\langle F_{pr} \rangle = 0$ . Если же  $\bar{d} = \frac{(1-\bar{v}^2)}{\sqrt{\bar{\Omega}_2^2-1-\bar{v}^2}} \arctg \frac{\bar{\mu}_1^2 \bar{\tau}_1 \sqrt{\bar{\Omega}_2^2-1+\bar{v}^2}}{\bar{\beta}_1}$ , то

постоянная составляющая силы давления волн максимальная, что соответствует наиболее эффективному преобразованию энергии источника вибрации в энергию поступательного движения экипажа.

## Список литературы

1. Филиппов А.П., Кохманюк С.С., Воробьев Ю.С. Воздействие динамических нагрузок на элементы конструкций. - Киев: Наукова думка, 1974. - 176 с.
2. Кохманюк С.С., Янютин В.Г., Романенко Л.Г. Колебания деформируемых систем при импульсных и подвижных нагрузках. - Киев: Наукова думка, 1980. - 232 с.
3. Весницкий А.И. Волны в системах с движущимися границами и нагрузками. - М.: Физматлит, 2001. - 320 с.
4. Анисимов В.Н., Литвинов В.Л. Резонансные свойства механических объектов с движущимися границами. - Самара: Самар.гос.техн.ун-т, 2009. - 132 с.
5. Иванченко И.И. Динамика транспортных сооружений: высокоскоростные подвижные, сейсмические и ударные нагрузки. - М.: Наука, 2011. - 574 с.
6. Метрикин А.В., Веричев С.Н., Вострухов А.В. Фундаментальные задачи высокоскоростного наземного транспорта. - Saarbrücken, Germany: LAP Lambert Academic Publishing, 2014. - 208 с.
7. Литвинов В.Л., Анисимов В.Н. Математическое моделирование и исследование колебаний одномерных механических систем с движущимися границами. - Самара: Самар.гос.техн.ун-т, 2017. - 150 с.
8. Весницкий А.И. Избранные труды по механике. - Нижний Новгород: ИД «Наш дом», 2010. - 248 с.
9. Lamb J.L. Critical velocities for rocket sled excitation of rail resonance// Johns Hopkins APL Technical Digest. - 2000. - Vol. 21, No 3. - P. 448–458.
10. Бутова С.В., Герасимов С.И., Ерофеев В.И., Камчатный В.Г. Устойчивость движения высокоскоростных объектов по направляющим ракетного трека // Проблемы машиностроения и надежности машин. - 2015. - № 1. - С.3-8.
11. Герасимов С.И., Ерофеев В.И., Камчатный В.Г., Каныгин И.И. Оценка резонансоопасных гармоник при колебаниях упругой направляющей с движущимся по ней двухопорным объектом // Проблемы прочности и пластичности. 2015. Т.77. № 4. С.412-424.
12. Герасимов С.И., Ерофеев В.И. Расчет изгибно-крутильных колебаний рельсовой направляющей ракетного трека // Проблемы машиностроения и надежности машин. - 2016. - № 3. - С.25-27.
13. Герасимов С.И., Ерофеев В.И., Лисенкова Е.Е. Задачи волновой динамики систем, несущих движущиеся нагрузки, и их приложение к испытаниям на ракетном треке // Сборник трудов III международной школы-конференции молодых ученых "Нелинейная динамика машин" - SCHOOL-NDM 2016. - М.: ИМАШ РАН, 2016. - С. 45-54.
14. Герасимов С.И., Ерофеев В.И., Камчатный В.Г., Одзерихо И.А. Термомеханические и деформационные процессы при высокоскоростном скольжении нагрузок по рельсовым направляющим ракетного трека // Вестник научно-технического развития. - 2017. - № 10 (122). - С. 3-7.
15. Мандельштам Л.И. Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике. - М.: Наука, 1972. - 440 с.
16. Быченков В.А., Крысов С.В., Холуев В.В. Волновое сопротивление движению нагрузок вдоль деформируемых систем // Машиноведение. - 1998. - № 3. - С. 60-63.
17. Болдин В.П., Весницкий А.И., Лисенкова Е.Е. Элементарный волновой движитель // ДАН СССР. - 1991. - Т.318, №4. - С. 849-852.
18. Лисенкова Е.Е. Движение объекта вдоль одномерной направляющей под действием реакции излучения упругих волн // Известия РАН. Механика твердого тела. - 2007. - № 6. - С. 25-37.
19. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. - М.: Изд-во Ленанд, 2015. - 352 с.