

УДК 534.1

О ВИЗУАЛИЗАЦИИ СТОЯЧИХ ВОЛН В ВИБРИРУЮЩЕЙ РЕШЕТЧАТОЙ КОНСТРУКЦИИ

© Виталий Львович Крупенин, Николай Алексеевич Андрианов,
Константин Борисович Саламандра

Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия

krupeninster@gmail.com

Аннотация. Приводятся результаты экспериментов, позволяющих визуализировать движения струнной решётки - объекта, состоящего из системы перекрещивающихся натянутых струн, образующих решетку с квадратными ячейками, в узлах которой помещены массивные точечные тела. Даются полученные ранее результаты линейной теории и описание разработанного экспериментального стенда. Приводятся видеосюжеты с результатами качественных экспериментов и амплитудно-частотные характеристики. Описаны некоторые возможные режимы движения решеток различной размерности при кинематическом возбуждении стоячих волн.

Ключевые слова: струнная решетка, узел, экспериментальный стенд, стоячая волна, собственные частоты, геометрическая нелинейность, формы колебаний.

Работа выполнена за счет гранта Российского Научного Фонда, проект № 15-19-30026.

TO THE EXPERIMENTAL STUDIES OF STRING LATTICES VIBRATIONS

© Vitaly L. Krupenin, Nikolay A. Andrianov, Konstantin B. Salamandra

IMASH RAN, Moscow, Russia

krupeninster@gmail.com

Abstract. The results of experiments are given that allow visualizing the movements of a string lattice - an object consisting of a system of crisscrossed strings forming a grid with square cells, at whose nodes massive point bodies are placed. The results of the linear theory obtained earlier and the description of the developed experimental stand are given. Video clips are presented with the results of qualitative experiments. Some possible regimes for the motion of lattices of various dimensions are described under kinematic excitation of standing waves.

Key words: string lattice, node, experimental stand, standing wave, natural frequencies, geometric nonlinearity, vibration modes.

Acknowledgements. The work was supported by the Russian Science Foundation, project no. 15-19-30026.

1. Струнные решетки. По разным причинам струнные решетки до последнего времени изучались не очень обстоятельно. В то же время они представляют собой не только очевидный модельный интерес как двумерный аналог классической системы «нить с бусинками». Они могут использоваться при проведении моделирования многочисленных двумерных объектов – мембран, тонких пластин, панелей, решетчатых конструкций, армирующих систем. В свою очередь, решетчатые конструкции широко используются при

конструировании различных сортировочных и просеивающих машин и устройств [1]. Кроме того, при их посредстве могут анализироваться колебания в кристаллах и наноструктурах [2]. Линейные модели струнных решеток представляют собой системы взаимно перпендикулярных семейств безынерционных упругих струн, образующих прямоугольные ячейки, в вершине каждой из которых помещены точечные абсолютно твердые тела. Соответствующие модели изучались впервые, по-видимому, Р.Ф. Нагаевым и К.Ш. Ходжаевым [3] и в работе [4]. В работах [5, 6] рассматривалась динамика струнной решетки в присутствии ограничителей хода. Нелинейные модели с геометрическими нелинейностями могут быть исследованы при помощи методов возмущений. Экспериментальные данные о колебаниях данных систем, достаточно редки.

Данная работа призвана продолжить восполнение этого пробел. Она существенно перекликается с работами [7, 8], являясь их продолжением.

2. Об уравнениях движения и результатах их исследования. Рассмотрим прямоугольную решетку [3, 4], составленную из двух взаимно перпендикулярных семейств упругих одинаковых линейных струн, заземленных на концах и имеющих соответственно длины l_1 и l_2 (рис 1). Каждая струна нумеруется при помощи индексов $k = 0, 1, 2, \dots, N_1$ и $q = 0, 1, 2, \dots, N_2$. Узлы решетки - суть точечные твердые тела с одинаковыми массами m .

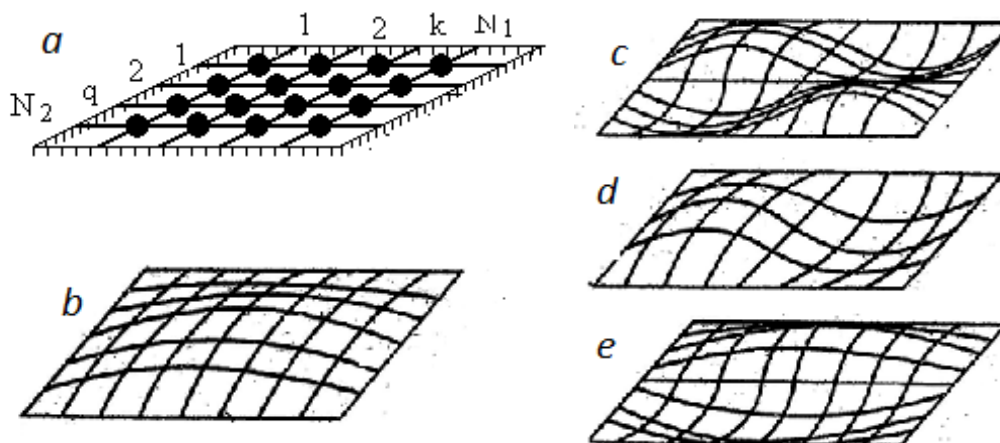


Рис 1. Модель решетки 4×4 (a); колебания по формам: Θ_{11} (b); Θ_{22} (c); Θ_{12} (d); Θ_{21} (e).

Пусть прямоугольные ячейки решетки одинаковы, а струнные элементы безынерционны. Крепления струн в узлах - абсолютно жесткие, а натяжения - настолько большими, что возможными изменениями при линейных колебаниях можно пренебречь.

Каждая «горизонтальная сторона» ячеек имеет длину ΔL_1 ; «вертикальная» - ΔL_2 . Кроме того, пусть безынерционные «горизонтальные участки» имеют натяжение T_1 , а «вертикальные» - T_2 .

Состояние решетчатой конструкции может быть описано посредством функций смещения узлов решетки $u_{kq}(t)$, где $k=0, 1, 2, \dots, N_1$; $q=0, 1, 2, \dots, N_2$. При этом каждая из функций $u_{kq}(t)$ изменяется вдоль некоторой оси, перпендикулярной плоскости статического равновесия решетки. Первый индекс (в данном случае k - нумерует струну, расположенную «слева-направо»), а второй индекс (в данном случае q - «снизу-вверх»).

Обозначим $g_{kq}(p; t, u_{kq})$ - любые внешние или отнесенные к таковым (например, геометрически-нелинейные) силы; $p \equiv d/dt$. Каждый узел лежит одновременно на двух струнах, и для всех значений индексов имеем N уравнений [$N=(N_1-1)(N_2-1)$]:

$$m\ddot{u}_{kq} + c_1(2u_{kq} - u_{(k-1,q)} - u_{(k+1,q)}) + c_2(2u_{kq} - u_{(k,q-1)} - u_{(k,q+1)}) = g_{kq}(p; t, u_{kq}); c_{1,2} = \frac{\Delta L_{1,2}}{T_{1,2}}. \quad (1)$$

Граничные условия заземления на концах можно записать как $u_{kq}=0$, при $k=0; N_1; q=0; N_2$. Приведем операторные уравнения движения, следующие из уравнений (1). В соответствии с общими методиками [3-6] при $g_{kq}(p; t, u_{kq}) \equiv 0$ можно определить наборы собственных частот $\{\Omega_{kq}\}$ и, кроме того, нормированных коэффициентов собственных форм $\{\Theta_{kq}\}$ линейной системы:

$$\Omega_{kq}^2 = \frac{2T_1}{m\Delta L_1} [1 - \cos(k\pi N_1^{-1})] + \frac{2T_2}{m\Delta L_2} [1 - \cos(q\pi N_2^{-1})], \quad (2)$$

$$\Theta_{kq} = C \sin(kn\pi N_1^{-1}) \sin(qj\pi N_2^{-1}),$$

где $C=4[(N_1-1)(N_2-1)]^{-2}$.

В итоге определяются параметры колебаний в линейном случае и проведены необходимые предварительные построения для анализа в случае присутствия нелинейностей.

На Рис.1. (b) – (e) показаны огибающие поверхности четырех низших формы свободных колебаний решетки 7×5 ; узловые тела – не показаны.

Отметим, что при рассмотрении изотропных решеток ($N_1=N_2 \equiv N_0; T_1=T_2 \equiv T_0; \Delta L_1 = \Delta L_2 \equiv \Delta L_0; c_1=c_2 \equiv c_0$) из-за симметрии системы происходит уменьшение числа различных собственных частот и соответствующих форм: $\Omega_{kq} = \Omega_{qk}; \Theta_{kq} = \Theta_{qk}$:

$$\Omega_{kq}^2 = 2c_0 \frac{2T_0}{m\Delta L_0} [2 - \cos k\pi/N_0 - \cos q\pi/N_0]; \quad \Theta_{kq} = 4N_0^4 \sin k\pi/N_0 \sin q\pi/N_0. \quad (3)$$

3. Экспериментальный стенд. Для экспериментального изучения струнных решеток был разработан и создан экспериментальный стенд «Аллигатор Квадрат», описанный в работах [7, 8] и состоящий из рабочей установки (рис.2) и системы управления и регистрации. Рабочая установка состоит из вибровозбудителя, системы квадратных сменных решеток, состоящих из квадратных рамок (300×300 мм), выполненных из ДВП и взаимно перпендикулярных натянутых резиновых жгутов диаметром 1мм.

Натяжение жгутов осуществлялось при помощи методики вывешенных тел; размеры ячеек контролировались при помощи прецизионных линеек. Рамка решетки прикреплена к штоку вибровозбудителя. Были изготовлены решетки $2 \times 2, 3 \times 3, 4 \times 4$. Узлы решеток образованы помещенными в местах пересечения жгутов тороидальными шайбами массой 1,1 г, выполненные из латуни. При этом шайбы не фиксируются жестко.

Удобство экспериментирования с резиновыми распределенными элементами описано в статье [9]. Установка допускает использование односторонних или двусторонних ограничителей хода.

Принцип работы стенда ясен из рис. 3. См. также [7, 8]. Регистрация профилей стоячих волн осуществлялась при помощи видеокамеры, работающей как в режиме фотографирования, так и в режиме ускоренной киносъемки. Лампа стробоскопа создает освещение решетки.

С помощью встроенного блок управления стробоскопа фазовращателя можно «остановить» и сфотографировать решетку в любой момент времени. При наличии малой расстройки 0,3 – 5, 7 Гц можно добиться картины медленного эволюционирования профиля стоячей двумерной волны.

Цель описываемых экспериментов - качественный экспериментальный анализ режимов движения струнных решеток при периодическом возбуждении колебаний и их визуализация.



Рис. 2. Рабочая установка экспериментального стенда.

4. Результаты экспериментов. Регистрация стоячих волн в проведенных экспериментах определялась спецификой систем и особенностями механизма возбуждения колебаний. В данном случае возбуждение является кинематическим: рамка вибрирует по синусоидальному закону и все узлы решетки получают заданное движение. «Проходя» определенные частотные диапазоны, получаем возможность регистрировать резонансные явления.

Были исследованы решетки 2×2 и 3×3 . В линейной системе соотношения между собственными частотами оценивались в соответствии с первой формулой (2). Во всех решетках собственные частоты лежат внутри отрезков $[\Omega_{11}, \Omega_{KK}]$. В данном случае

$K=2, 3$. Распределение собственных частот внутри этих отрезков - неравномерное.

Эксперименты выявили заметное отклонение рассматриваемой системы от линейной. Вследствие этого наблюдаемые движения иногда отличаются от предсказываемых линейной теорией. Демонстрация именно таких движений обусловлена неизбежным проявлением

геометрической нелинейности при достижении амплитудами колебаний значений пригодных для эффективной демонстрации динамических явлений, а также описании в последующих работах виброударных процессов, устанавливающихся в рассматриваемых решетчатых системах.

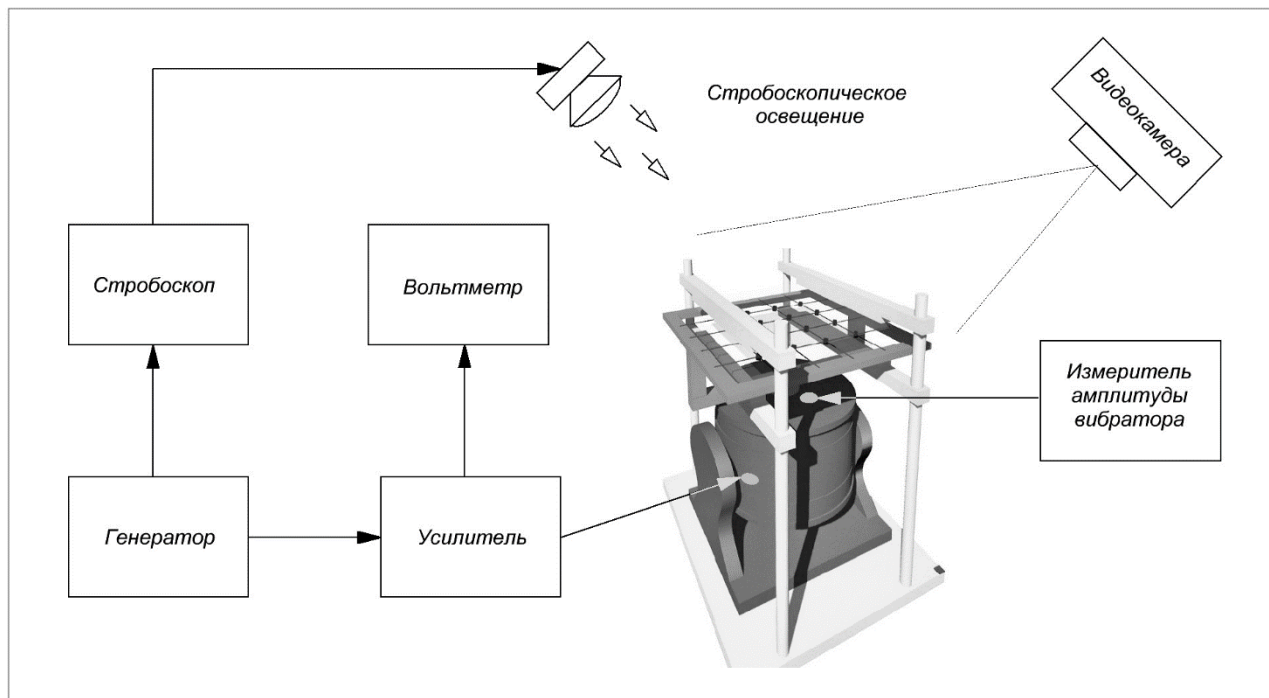


Рис.3. Схема экспериментального стенда «Аллигатор Квадрат».

Видеосюжеты файлов №1 (https://youtu.be/8EmHI_ADI5k) и №2 (<https://youtu.be/zpDdkEuvMz4>) демонстрируют движения решеток 2x2 при реализации форм типа Θ_{11} и Θ_{12} . В-первом случае амплитуда вибратора $a=1,24$ мм; частота возбуждения и соответственно стоячей волны $f=14,45$ Гц. Во-втором случае: $a=3,4$ мм; $f=20,88$ Гц. В силу отсутствия жесткого крепления узлов можно наблюдать отклонения форм ячеек решетки от квадратной.

Следующие видеосюжеты касаются решеток 3x3: файлы №3 (<https://youtu.be/pOJ4eyRR-5A>) и №4 (<https://youtu.be/WxQmBCvVUjg>) демонстрируют соответственно формы типа Θ_{11} и Θ_{33} . В первом случае $a=2$ мм; $f=12,9$ Гц; во-втором: $a=4,4$ мм; $f=24,51$ Гц. Зависимости амплитуды колебаний центрального узла при реализации формы Θ_{11} для различных значений амплитуды штока вибратора показаны на рис. 4 (см. ниже).

Способность реализовывать низшие формы колебаний в таких системах оказывается весьма ярко выраженной (см. также [7, 8]). Файл №5 (<https://youtu.be/1pWZHqwur4>) показывает решетку 3x3 в случае, когда приграничные ячейки обладают существенно большей площадью, чем «центральные» (здесь $a=4$ мм; $f=20,88$ Гц).

Сюжеты файлов № 6 (https://youtu.be/H70N_5c0UWg) и № 7 (<https://youtu.be/C5pwm2yUsDg>) дают формы колебаний при $a=3,6$ мм; $f=18,8$ Гц и $a=4,5$ мм; $f=20,88$ Гц. Хорошо видны нелинейные искажения форм. Указанные искажения проявляются и при построении амплитудно-частотных характеристик рассматриваемых решёток. На рис. 4 показано семейство амплитудных кривых $A(f)$ для решётки 3x3.

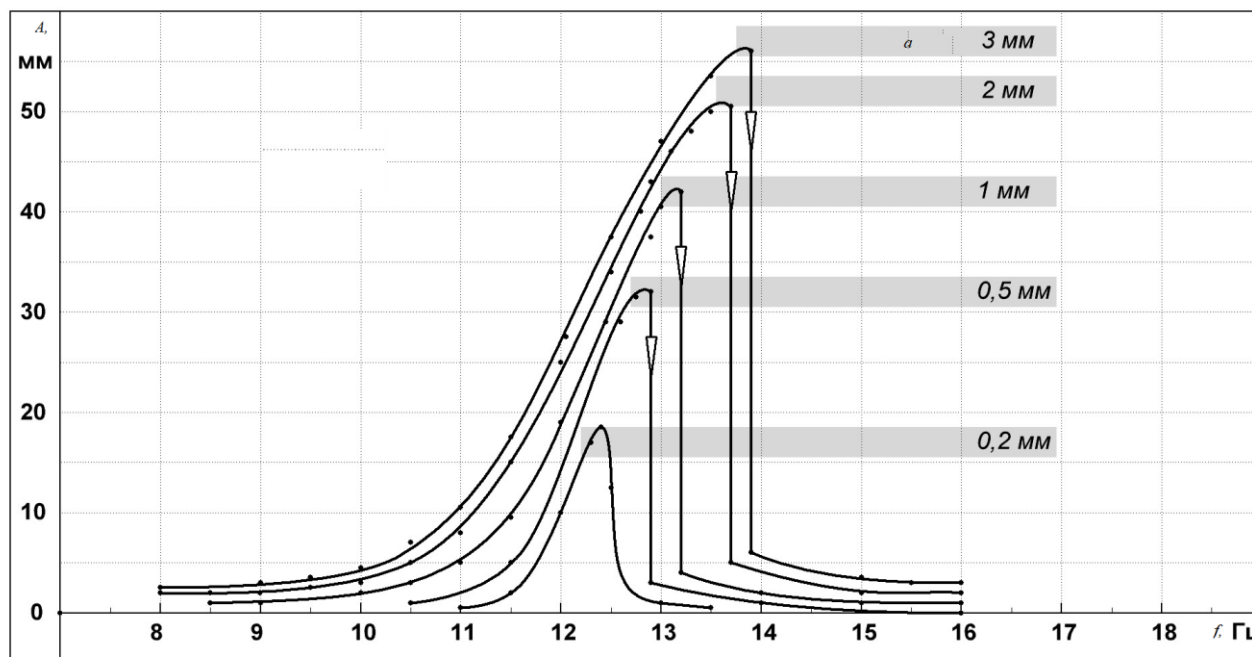


Рис.4. Семейство амплитудно-частотных характеристик решётки 3x3.

Амплитуда измерялась для центрального узла решетки при реализации стоячих волн, отвечающих первой форме колебаний. Видно, что система ведет себя как жестко анизохронная. С увеличением частоты амплитуда нарастает, а затем «внезапно» срывается. Для возврата к колебаниям после срыва необходимо несколько уменьшить частоту возбуждения и придать системе запускающий импульс или провести существенное уменьшение частоты вплоть до значения $f \approx 12$ Гц.

При малых амплитудах вибратора система близка к линейной.

5. Об исследовании виброударных процессов. Были проведены эксперименты по изучению виброударных режимов движения решеток 2×2 и 3×3 . Исследования проводились при частоте возбуждения большей, чем частоты $\Omega_{11}/2\pi$ для решеток разных типов. Визуально наблюдались режимы движения типа синхронных хлопков [4-6]. Исчерпывающая интерпретация этих результатов будет проделана в последующих работах.

6. Заключение. Эксперименты с решетчатыми двумерными конструкциями показывают, что даже в линейных моделях усложнение задачи по сравнению с аналогичной одномерной (знаменитая задача «о нити с бусинками») оказывается весьма существенным. Поэтому требуется создание более общих теорий, основанных на использовании специфических численных, а также асимптотических методах [10]. Для проведения более подробных экспериментов необходимо оснащение стенда дополнительной регистрирующей и анализирующей аппаратурой.

Следует ещё раз подчеркнуть, что при реализации важнейших для теории и практики низших форм стоячих волн, все предложенные ранее модели и методики работают удовлетворительно.

Список литературы

1. Вибрации в технике: Справочник. Т. 4. Вибрационные процессы и машины /Под. ред. Э.Э. Лавендела. - 1981. - 509 с.
2. Асташев В.К., Андрианов Н.А., Крупенин В.Л., Привезенцев В.Н., Колик Л.В., Свойства поверхностных слоев, наноструктурированных в результате авторезонансного ультразвукового течения // Проблемы машиностроения и надежности машин. - 2011. - № 5. - С. 68-72.
3. Нагаев Р.Ф., Ходжаев К.Ш. Колебания механических систем с периодической структурой. - Ташкент: ФАН, 1973. – 272 с.
4. Крупенин В.Л. О расчете вибрационных процессов в решетчатых двумерных конструкциях //Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2006. - № 2. - С.20-26.
5. Крупенин В.Л. Виброударные процессы в двухмерных решетчатых конструкциях //Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2006. - № 3. – С.16-22.
6. Крупенин В.Л. Анализ сингуляризованных уравнений движения решетчатых виброударных 2D-систем при отказе от гипотезы Ньютона // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2016. - № 2. - С.13-22.
7. Astashev V., Andrianov N., Krupenin V. Vibration of string lattice // Vibroengineering PROCEDIA. 2016.Vol.8.P.97-101
8. Асташев В.К., Андрианов Н.А. Крупенин В.Л. К экспериментальному исследованию колебаний струнных решеток//Вестник научно-технического развития (www.vntr.ru). – 2016. - №9. - С.3-10.
9. Веприк А.М., Крупенин В.Л. О резонансных колебаниях системы с распределенным ударным элементом // Машиноведение. – 1988. - № 6. – С.10-18.
10. Ланда П.С. Автоколебания в распределенных системах. - М.: Наука, 1983. – 320 с.