УДК 534.11

ТОЧНОЕ И ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О КОЛЕБАНИЯХ СТЕРЖНЯ ПЕРЕМЕННОЙ ДЛИНЫ

© Владислав Львович Литвинов
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Самарский государственный технический университет" СамГТУ, Самара, Россия
vladlitvinov@rambler.ru

Аннотация. *С помощью приближенного метода Канторовича – Галеркина и аналитического метода замены переменных в системе функционально–разностных уравнений находятся приближенное и точное решения задачи о продольных колебаниях стержня с движущейся границей. Решение задачи методом Канторовича – Галеркина получено с точностью до величин второго порядка малости относительно малого параметра, характеризующего медленный характер движения границы. Произведена оценка погрешности метода. В работе получено выражение для амплитуды напряжений, соответствующих колебаниям на n–ной динамической моде. Резонансные явления исследуются для наиболее распространенного на практике случая, когда внешние возмущения носят гармонический характер.*
Ключевые слова: *стержень переменной длины, движущиеся границы, резонансные свойства, динамическая мода, амплитуда колебаний.*

EXACT AND APPROXIMATE SOLUTIONS THE PROBLEM OF OSCILLATIONS OF A ROD OF VARIABLE LENGTH

© Vladislav L. Litvinov
Samara State Technical University, Samara, Russia
vladlitvinov@rambler.ru

Abstract. *With an approximate method of Kantorovich – Galerkin and analytical method for change of variables in the system of functional–difference equations are approximate and exact solutions of the problem of transverse vibrations of a rod with a moving boundary. Solution of the problem by Kantorovich – Galerkin received up to the second order in the small parameter characterizing the slow nature of the movement of the border. The error of the method is estimated. We obtain the expression for the amplitude of the oscillations corresponding to the n–th dynamic mode. Resonance phenomena are investigated for the most common practice in the case when external disturbances are harmonic character.*
Key words: *rod of variable length, moving boundaries, resonance properties, dynamic mode, the amplitude of oscillation.*

1. Введение. Колебательные процессы в системах с движущимися границами в настоящее время изучены недостаточно в связи со сложностью решения таких задач. Однако такие задачи представляют интерес для анализа и исследования всевозможных технических объектов. Если затухание поперечных колебаний обусловлено, главным образом, действием

внешних демпфирующих сил, то в случае продольных колебаний основное влияние на затухание оказывают упругие несовершенства материала колеблющегося объекта.
В данной работе с помощью приближенного и аналитического методов исследовано явление установившегося резонанса и явление прохождения через резонанс стержня переменной длины с возмущениями, действующими на подвижном конце. Объект исследования относится к широкому кругу колеблющихся одномерных объектов с движущимися границами [1–6, 9–11, 16–20] и нагрузками [4, 5, 7]. Для описания колебаний использована классическая математическая модель, учитывающая вязкоупругость на основе структурной модели Фойгта [10].

2. Постановка задачи. Задачу по описанию продольных колебаний вязкоупругого стержня, один конец которого движется по закону $x = l(v_0 t)$, а другой неподвижен, можно поставить следующим образом.
Найти решение дифференциального уравнения

$$\rho Z_{tt}(x,t) - EZ_{xx}(x,t) - \mu Z_{xxt}(x,t) = 0 \tag{1}$$

при граничных условиях

$$Z(0,t) = 0; \tag{2}$$

$$ES\, Z_x(l(v_0 t),t) = F_0(t). \tag{3}$$

В задаче (1) – (3) обозначено: $Z(x,t)$ – продольное смещение точки стержня с координатой x в момент времени *t*; E – модуль упругости; ρ – объемная плотность материала стержня; μ – коэффициент, характеризующий свойство вязкоупругости материала стержня на основе структурной модели Фойгта; S – площадь поперечного сечения стержня; $l(v_0 t)$ – закон движения границы стержня, v_0 – скорость движения границы; $F_0(t)$ – функция класса C^3, характеризующая внешнее возмущение.
Начальные условия не оказывают влияния на резонансные свойства линейных систем [11, 17], поэтому в данной задаче они не рассматриваются.
Примем закон движения границы равномерным $\left(l(v_0 t) = L_0 - v_0 t\right)$ и введем безразмерные переменные:

$$\xi = \frac{x}{L_0};\ \tau = \frac{a}{L_0}t;\ a = \sqrt{\frac{E}{\rho}};\ Z\left(x,t\right) = \frac{L_0}{ES}U\left(\xi,\tau\right).$$

Здесь L_0 – начальная длина стержня.
После преобразований получим:

$$U_{\tau\tau}(\xi,\tau) - U_{\xi\xi}(\xi,\tau) - \varepsilon_1 U_{\xi\xi\tau}(\xi,\tau) = 0; \tag{4}$$

$$U(0,\tau) = 0; \tag{5}$$

$$U_{\xi}(l(\varepsilon_0\tau),\tau) = F(\tau), \tag{6}$$

где

$$\varepsilon_1 = \frac{\mu}{a\rho L_0};\ l(\varepsilon_0\tau) = 1 + \varepsilon_0\tau;\ \varepsilon_0 = -\frac{v_0}{a};\ F\left(\tau\right) = F_0\left(\frac{L_0}{a}\tau\right).$$

Здесь ε_1, ε_0 – малые параметры. Параметр ε_1 характеризует малость сил внутреннего трения по сравнению с упругими силами. Параметр ε_0 характеризует медленность движения границы по сравнению со скоростью звука в стержне.

3. Решение задачи приближенным методом Канторовича–Галеркина. При решении задачи (4) – (6) будем следовать методике, изложенной в [12, 17], поэтому членами, содержащими коэффициенты вида $\varepsilon_0^n\varepsilon_1^k$ при $n+k\geq 2$, и членами вида $\varepsilon_0 F'(\tau)$, которые на резонансные свойства системы влияют как члены порядка ε_0^2, будем пренебрегать.

Чтобы применить метод Канторовича–Галеркина, необходимо преобразовать граничные условия к однородному виду. Для этого введём новую функцию:

$$U(\xi,\tau)=V(\xi,\tau)+H(\xi,\tau),$$

где $V(\xi,\tau)$ удовлетворяет уравнению:

$$[V(\xi,\tau)+H(\xi,\tau)]_{\tau\tau}-V_{\xi\xi}(\xi,\tau)-\varepsilon_1 V_{\xi\xi\tau}(\xi,\tau)=0 \quad (7)$$

и граничным условиям

$$V(0,\tau)=0;\ V_\xi(l(\varepsilon_0\tau),\tau)=0. \quad (8)$$

а $H(\xi,\tau)$ находится как решение следующей задачи:

$$H_{\xi\xi}(\xi,\tau)=0; \quad (9)$$

$$H(0,\tau)=0; \quad (10)$$

$$H_\xi(l(\varepsilon_0\tau),\tau)=F(\tau). \quad (11)$$

Решая уравнение (9) при условиях (10), (11), нетрудно получить

$$H(\xi,\tau)=F(\tau)\xi.$$

Для решения задачи (7), (8) воспользуемся методом Канторовича–Галеркина [12, 21]. Решение будем искать в виде

$$V(\xi,\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(\tau)X_n(\xi,\varepsilon_0\tau). \quad (12)$$

Здесь $X_n(\xi,\varepsilon_0\tau)=\sin\left(\omega_n(\varepsilon_0\tau)\xi\right)-$ собственные функции задачи:

$$X_{n\xi\xi}(\xi,\varepsilon_0\tau)+\omega_n^2(\varepsilon_0\tau)X_n(\xi,\varepsilon_0\tau)=0; \quad (13)$$

$$X_n(0,\varepsilon_0\tau)=0;\ X_{n\xi}(l(\varepsilon_0\tau),\varepsilon_0\tau)=0, \quad (14)$$

где $\omega_n(\varepsilon_0\tau)=\dfrac{\pi n-\pi/2}{l(\varepsilon_0\tau)}$ – собственные частоты задачи (13), (14); $\varepsilon_0\tau$ – рассматривается как параметр.

Заметим, что функции $X_n(\xi,\varepsilon_0\tau)$ при неподвижной границе $(\varepsilon_0=0)$ являются собственными формами колебаний (динамическими модами). В этом случае метод Канторовича–Галеркина дает точное решение. При увеличении ε_0 точность уменьшается. В реальных технических объектах при продольных колебаниях ε_0 не превосходит 0,05.

Статья посвящена анализу резонансных явлений наблюдаемых на одной из собственных частот. Амплитуда колебаний на резонансной частоте многократно увеличивается. Амплитуда колебаний на нерезонансных частотах соизмерима с амплитудой возмущающего воздействия. При этом нерезонансными членами ряда (12) можно пренебречь и рассматривать решение только на одной резонансной моде.

Подставляя *n*–ный член ряда (12) в уравнение (7) получим:

$$\left[f_n(\tau)X_n(\xi,\varepsilon_0\tau)+\xi F(\tau)\right]_{\tau\tau}+\omega_n^2(\varepsilon_0\tau)f_n(\tau)X_n(\xi,\varepsilon_0\tau)+\varepsilon_1\omega_n^2(\varepsilon_0\tau)f_n'(\tau)X_n(\xi,\varepsilon_0\tau)=0. \quad (15)$$

Применим метод Галеркина. Как и в [12], функцию $f_n(\tau)$ будем определять из условия ортогональности левой части уравнения (15) с функцией $X_n(\xi,\varepsilon_0\tau)$ на интервале $[0,l(\varepsilon_0\tau)]$. В этом случае будем иметь:

$$\begin{gathered}\int\limits_0^{l(\varepsilon_0\tau)} \left[f_n(\tau)X_n(\xi,\varepsilon_0\tau)+\xi F(\tau)\right]_{\tau\tau} X_n(\xi,\varepsilon_0\tau)d\xi + \\ +A_{1n}(\varepsilon_0\tau)\omega_n^2(\varepsilon_0\tau)f_n(\tau)+\varepsilon_1 A_{1n}(\varepsilon_0\tau)\omega_n^2(\varepsilon_0\tau)f_n'(\tau)=0,\end{gathered} \tag{16}$$

где $A_{1n}(\varepsilon_0\tau)=\int\limits_0^{l(\varepsilon_0\tau)} X_n^2(\xi,\varepsilon_0\tau)d\xi=\dfrac{l(\varepsilon_0\tau)}{2}.$

Для того чтобы избавиться в уравнении (16) от второй производной функции $F(\tau)$, введем в уравнение (16) новую функцию

$$f_n(\tau)=\mu_n(\tau)+Q_n(\varepsilon_0\tau)F_n(\tau), \tag{17}$$

где

$$Q_n(\varepsilon_0\tau)=-\int\limits_0^{l(\varepsilon_0\tau)} \xi X_n(\xi,\varepsilon_0\tau)d\xi \,/\, A_{n1}(\varepsilon_0\tau)=-\frac{2(-1)^{n+1}l(\varepsilon_0\tau)}{(\pi n-\pi/2)^2}.$$

С учетом (17) уравнение (16) с точностью до величин порядка малости ε_0^2 будет иметь вид

$$\mu_n''(\tau)+2A_n(\varepsilon_0\tau)\mu_n'(\tau)+\omega_n^2(\varepsilon_0\tau)\mu_n(\tau)=-\omega_{0n}^2(\varepsilon_0\tau)Q_n(\varepsilon_0\tau)F(\tau), \tag{18}$$

где

$$A_n(\varepsilon_0\tau)=\frac{\varepsilon_0 A_{2n}(\varepsilon_0\tau)}{A_{1n}(\varepsilon_0\tau)}+\frac{\varepsilon_1}{2}\frac{(\pi n-\pi/2)^2}{l^2(\varepsilon_0\tau)}; \tag{19}$$

$$\varepsilon_0 A_{2n}(\varepsilon_0\tau)=\int\limits_0^{l(\varepsilon_0\tau)} X_{n,\tau}(\xi,\varepsilon_0\tau)X_n(\xi,\varepsilon_0\tau)d\xi=-\frac{\varepsilon_0 l'(\varepsilon_0\tau)}{4}; \tag{20}$$

Подставляя (20) в (19) получим

$$A_n(\varepsilon_0\tau)=-\frac{\varepsilon_0 l'(\varepsilon_0\tau)}{2l(\varepsilon_0\tau)}+\frac{\varepsilon_1}{2}\frac{(\pi n-\pi/2)^2}{l^2(\varepsilon_0\tau)}.$$

Второй член ряда (17) слабо влияет на точность [11] (как величина порядка ε_0^2), поэтому вместо (12) можно записать:

$$V(\xi,\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n(\tau)X_n(\xi,\varepsilon_0\tau).$$

Отсюда следует, что колебания системы можно рассматривать как суперпозицию колебаний, соответствующих отдельным динамическим модам.
Если ввести в уравнение (18) новую функцию

$$\mu_n(\tau)=A_{0n}(\varepsilon_0\tau)y_n(\tau),$$

где

$$A_{0n}(\varepsilon_0\tau)=\exp\left[-\int\limits_0^{\tau} A_n(\varepsilon_0\zeta)d\zeta\right]=\sqrt{l(\varepsilon_0\tau)}\exp\left[-\frac{\varepsilon_1}{2}\frac{(\pi n-\pi/2)^2\tau}{(1+\varepsilon_0\tau)}\right],$$

то уравнение (18) можно преобразовать так, что оно не будет содержать члена с $y_n'(\tau)$:

$$y_n''(\tau)+\omega_{0n}^2(\varepsilon_0\tau)y_n(\tau)=-\frac{\omega_{0n}^2(\varepsilon_0\tau)Q_n(\varepsilon_0\tau)}{A_{0n}(\varepsilon_0\tau)}F(\tau).$$

Пусть внешнее воздействие на систему носит гармонический характер, т.е. $F(\tau)=B\cos W(\tau)$, где $W(\tau)$ – функция класса C^2, B – постоянная величина. С учетом того, что $l(\varepsilon_0\tau)=1+\varepsilon_0\tau,$ получим

$$y_n''(\tau)+\frac{(\pi n-\pi/2)^2}{(1+\varepsilon_0\tau)^2}y_n(\tau)=\frac{2B(-1)^{n+1}}{(1+\varepsilon_0\tau)^{3/2}}e^{\frac{\varepsilon_1}{2}\frac{(\pi n-\pi/2)^2\tau}{(1+\varepsilon_0\tau)}}\cos W(\tau). \tag{21}$$

Два линейно независимых решения однородного уравнения, соответствующего уравнению (21), с точностью до величин порядка ε_0^2 имеют вид:

$$y_{n1}(\tau)=a_n(\varepsilon_0\tau)\cos(w_n(\tau));\ y_{n2}(\tau)=a_n(\varepsilon_0\tau)\sin((w_n\tau)),$$

где

$$w_n(\tau)=\int_0^\tau\omega_{0n}(\varepsilon_0\varsigma)d\varsigma=\frac{1}{\varepsilon_0}\left(\pi n-\frac{\pi}{2}\right)\ln(1+\varepsilon_0\tau)\ ;a_n(\varepsilon_0\tau)=\frac{1}{\sqrt{\omega_{0n}(\varepsilon_0\tau)}}.$$

Выполняя преобразования, аналогичные преобразованиям [12, 17], для амплитуды колебаний, соответствующих *n*–ной динамической моде, получим следующее выражение:

$$A_n^2(\varepsilon_0\tau)=E_n^2(\tau)\left\{\left[\int_0^\tau F_n(\zeta)\cos\Phi_n(\zeta)d\zeta\right]^2+\left[\int_0^\tau F_n(\zeta)\sin\Phi_n(\zeta)d\zeta\right]^2\right\}, \tag{22}$$

где

$$E_n^2(\tau)=\frac{(1+\varepsilon_0\tau)^2}{(\pi n-\pi/2)^2}e^{-\varepsilon_1\frac{(\pi n-\pi/2)^2\tau}{(1+\varepsilon_0\tau)}};\ F_n(\tau)=\frac{B(-1)^{n+1}}{l(\varepsilon_0\tau)}e^{\frac{\varepsilon_1}{2}\frac{(\pi n-\pi/2)^2\tau}{(1+\varepsilon_0\tau)}};$$

$$\Phi_n(\tau)=\frac{\pi n-\pi/2}{\varepsilon_0}\ln(1+\varepsilon_0\tau)-W(\tau).$$

Для получения выражения (22) можно использовать и несколько иной подход. Заметим, что в связи с медленным движением границ при исследовании резонансных свойств, функция $W(\tau)$ имеет вид [11, 17]:

$$W(\tau)=\Omega\tau+\theta_0(\varepsilon_0\tau),$$

где $\theta_0(\varepsilon_0\tau)-$ функция, характеризующая медленное изменение частот возмущающих воздействий, а $\Omega-$ частота внешнего воздействия. Поэтому членами вида $\varepsilon_0\theta_0'(\varepsilon_0\tau)$, которые на резонансные свойства влияют, как величины порядка малости ε_0^2, можно пренебречь:

$$(\cos W(\tau))''=-\Omega^2\cos W(\tau). \tag{23}$$

С учетом выражения (23) отпадает необходимость вводить в уравнение (16) новую функцию $\mu_n(\tau)$. С точностью до величин порядка ε_0^2 получим следующее уравнение для определения функций $f_n(\tau)$:

$$f_n''(\tau)+2A_n(\varepsilon_0\tau)f_n'(\tau)+\omega_n^2(\varepsilon_0\tau)f_n(\tau)=\frac{2B(-1)^{n+1}l(\varepsilon_0\tau)}{(\pi n-\pi/2)^2}\Omega^2\cos W(\tau).$$

Принимая $f_n(\tau)=A_{0n}(\varepsilon_0\tau)y_n(\tau),$ получим

$$y_n''(\tau)+\omega_{0n}^2(\varepsilon_0\tau)y_n(\tau)=\frac{2B(-1)^{n+1}\sqrt{l(\varepsilon_0\tau)}}{(\pi n-\pi/2)^2}e^{\frac{\varepsilon_1}{2}\frac{(\pi n-\pi/2)^2\tau}{(1+\varepsilon_0\tau)}}\Omega^2\cos W(\tau).$$

Выполняя преобразования, аналогичные преобразованиям, описанным выше для амплитуды колебаний, соответствующих n–ной динамической моде, получим выражение вида (22). При этом:

$$E_n^2(\tau)=\frac{(1+\varepsilon_0\tau)^2}{\left(\pi n-\pi/2\right)^6}e^{-\varepsilon_1\frac{(\pi n-\pi/2)^2\tau}{(1+\varepsilon_0\tau)}};\ F_n(\tau)=B(-1)^{n+1}l(\varepsilon_0\tau)e^{\frac{\varepsilon_1}{2}\frac{(\pi n-\pi/2)^2\tau}{(1+\varepsilon_0\tau)}}\Omega^2.$$

Явление установившегося резонанса в рассматриваемой системе наблюдается, если скорость изменения функции $\Phi_n(\zeta)$ равна нулю, т.е.

$$W(\tau)=\frac{\pi n-\pi/2}{\varepsilon_0}\ln(1+\varepsilon_0\tau).$$

Возрастание амплитуды при этом описывается следующим выражением:

$$A_n(\tau)=E_n(\tau)\int_0^{\tau}F_n(\zeta)d\zeta.$$

Если $W(\tau)=\tau,$ то в области, содержащей точку $\tau_0=\frac{1}{\varepsilon_0}\left(\pi n-\frac{\pi}{2}-1\right)$ наблюдается явление прохождения через резонанс. Максимально возможная амплитуда определяется по формуле

$$A_n^2(\tau_1,\tau_2)=E_n^2(\tau_2)\left\{\left[\int_{\tau_1}^{\tau_2}F_n(\zeta)\cos\Phi_n(\zeta)d\zeta\right]^2+\left[\int_{\tau_1}^{\tau_2}F_n(\zeta)\sin\Phi_n(\zeta)d\zeta\right]^2\right\}.$$

Амплитуда напряжений, соответствующих колебаниям на n–ной динамической моде имеет вид:

$$B_n(\tau_1,\tau_2)=\omega_n(\varepsilon_0\tau)A_n(\tau_1,\tau_2). \qquad (24)$$

4. Аналитическое решение. Решим задачу по описанию продольных колебаний стержня переменной длины (без учета вязкоупругости) при помощи аналитического метода (метода замены переменных в системе функционально–разностных уравнений).

Найдем решение волнового уравнения

$$U_{\tau\tau}(\xi,\tau)-U_{\xi\xi}(\xi,\tau)=0 \qquad (25)$$

при граничных условиях

$$U(0,\tau)=0; \qquad (26)$$

$$U_{\xi}(l(\tau),\tau)=B\cos W(\tau). \qquad (27)$$

Для решения задачи используем метод Даламбера. Общее решение уравнения (25) имеет вид:

$$U(\xi,\tau) = g(\tau+\xi) + G(\tau-\xi), \tag{28}$$

где $g(z)$ и $G(z)-$ произвольные функции, которые необходимо определить из граничных условий, $z-$независимая переменная.

Подставляя решение (28) в граничные условия (26), (27) нетрудно получить следующую задачу:

$$\begin{cases} g(\tau) + G(\tau) = 0; \\ g'(\tau+\ell(\tau))] - G'(\tau-\ell(\tau)) = B\cos W(\tau). \end{cases} \tag{29}$$

Введем в систему (29) новые обозначения $h(z) = g'(z)$; $H(z) = G'(z)$ и новые функции

$$h(z) = r(\varphi(z)); \; H(z) = R(\psi(z)),$$

где функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ определяются из следующей системы функциональных уравнений:

$$\begin{cases} \varphi(\tau) = \psi(\tau); \\ \varphi(\tau+\ell(\tau)) = \psi(\tau-\ell(\tau)) + 1. \end{cases} \tag{30}$$

Введем обозначения в первом уравнении системы (30)

$$\varphi(\tau) = \psi(\tau) = z \tag{31}$$

и во втором уравнении этой системы

$$\varphi(\tau+\ell(\tau)) = z; \; \psi(\tau-\ell(\tau)) = z-1. \tag{32}$$

Из (31), (32) следует, что в первом уравнении системы (30)

$$\tau = 0,5(\overline{\varphi}(z) + \overline{\psi}(z)),$$

а во втором уравнении

$$\tau = 0,5(\overline{\varphi}(z) + \overline{\psi}(z-1)),$$

где $\overline{\varphi}(z), \overline{\psi}(z)-$функции, обратные к $\varphi(z)$ и $\psi(z)$.

С учетом сделанной замены система (29) примет вид

$$\begin{cases} r(z) + R(z) = 0; \\ r(z) - R(z-1) = \theta(z), \end{cases} \tag{33}$$

где $\theta(z) = B\cos W(0,5\overline{\varphi}(z) + 0,5\overline{\psi}(z-1))$.

Из первого уравнения системы (33) получим:

$$R(z) = -r(z). \tag{34}$$

После подстановки (34) во второе уравнение системы (33) будем иметь:

$$r(z) + r(z-1) = \theta(z). \tag{35}$$

Таким образом, задача сведена к решению разностного уравнения (35). Используем для решения задачи интегральное преобразование Лапласа. В результате получим:

$$r(z)=2\sum_{n=1}^{\infty}\int_{0}^{z}\theta(\zeta)\cos[k_n(z-\zeta)]d\zeta+2\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-1}^{0}r(\zeta)\cos[k_n(z-\zeta)]d\zeta,$$

где $k_n=\pi(2n-1)$.

Как и в предыдущем случае нас интересует только функция напряжений

$$U_{\xi}(\xi,\tau)=h(\tau+\xi)-H(\tau-\xi).$$

Используя методику, описанную в [14, 22], получим:

$$U_{\xi}(\xi,\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}V_n(\xi,\tau)+D(\xi,\tau), \tag{36}$$

где

$$V_n(\xi,\tau)=\cos\left\{\frac{k_n}{2}[\varphi(\tau+\xi)-\psi(\tau-\xi)]\right\}\times$$

$$\times\left(\cos\left\{\frac{k_n}{2}[\varphi(\tau+\xi)+\psi(\tau-\xi)]\right\}4\int_{0}^{\psi(\tau-\xi)}\theta(\zeta)\cos(k_n\zeta)d\zeta+\right.$$

$$\left.+\sin\left\{\frac{k_n}{2}[\varphi(\tau+\xi)+\psi(\tau-\xi)]\right\}4\int_{0}^{\psi(\tau-\xi)}\theta(\zeta)\sin(k_n\zeta)d\zeta\right).$$

Функция $\cos\left\{\frac{k_n}{2}[\varphi(\tau+\xi)-\psi(\tau-\xi)]\right\}$ – n–ная динамическая мода системы, $\omega(\xi,\tau)=\frac{\partial}{\partial\tau}\{\frac{k_n}{2}[\varphi(\tau+\xi)+\psi(\tau-\xi)]\}$ – мгновенная собственная частота n–ного собственного колебания.

Функцией $D(\xi,\tau)$ в выражении (36) можно пренебречь [11, 17]. Тогда вынужденные колебания представляют собой суперпозицию колебаний, соответствующих различным динамическим модам.

Применив к задаче (25) – (27) методику решения, описанную в работах [17, 22], получим следующее выражение для амплитуды напряжений, соответствующих колебаниям на n–ной динамической моде:

$$A_n^2(\tau)=4B^2\left\{\left[\int_{0}^{b(\tau)}\cos\Phi_n(\zeta)\,d\zeta\right]^2+\left[\int_{0}^{b(\tau)}\sin\Phi_n(\zeta)\,d\zeta\right]^2\right\},$$

где $b(\tau)=\psi(\tau-\xi_n(\tau))$, а функция $\xi_n(\tau)$ определяется как ближайший к точке $\xi=0$ корень уравнения:

$$\cos\left\{\frac{k_n}{2}[\varphi(\tau+\xi)-\psi(\tau-\xi)]\right\}=\pm1.$$

В рассматриваемом случае функции φ,ψ,Φ_n имеют вид

$$\varphi(z)=\psi(z)=\frac{\ln[(\varepsilon_0 z+1)/(1-\varepsilon_0)]}{\ln[(1+\varepsilon_0)/(1-\varepsilon_0)]}-1;\ \ \Phi_n(\zeta)=k_n\zeta-W\left(\frac{1}{\varepsilon_0}\left(\frac{1+\varepsilon_0}{1-\varepsilon_0}\right)^{\zeta}-\frac{1}{\varepsilon_0}\right).$$

Явление установившегося резонанса в рассматриваемой системе наблюдается, если

$$W(\tau)=\frac{k_n\ln(1+\varepsilon_0\tau)}{\ln[(1+\varepsilon_0)/(1-\varepsilon_0)]}+\gamma,$$

где $\gamma-$ постоянная величина.

Исследуем колебания стержня под действием нагрузки постоянной частоты. В этом случае $W(\tau)=\tau$. Явление прохождения через резонанс здесь наблюдается в области, содержащей точку ζ_0, которая определяется по следующей формуле:

$$\zeta_0=\frac{\ln\left\{\dfrac{k_n\varepsilon_0}{\ln[(1+\varepsilon_0)/(1-\varepsilon_0)]}\right\}}{\ln[(1+\varepsilon_0)/(1-\varepsilon_0)]}.$$

Если амплитуда в начале резонансной области (точка $\zeta_1=\psi(\tau_1-\xi_n(\tau_1))$) равна амплитуде возмущающего действия, то амплитуда в конце резонансной области (точка $\zeta_2=\psi(\tau_2-\xi_n(\tau_2))$) определяется выражением

$$A_n^2(\zeta_1,\zeta_2)=4B^2\left\{\left[\int_{\zeta_1}^{\zeta_2}\cos\Phi_n(\zeta)d\zeta\right]^2+\left[\int_{\zeta_1}^{\zeta_2}\sin\Phi_n(\zeta)d\zeta\right]^2\right\}. \tag{37}$$

Заметим, что точки τ_0,τ_1,τ_2, соответствующие точкам ζ_0,ζ_1,ζ_2, определяются по формуле

$$\tau_i=\frac{1}{\varepsilon_0}\exp\left\{\zeta_i\ln\left[(1+\varepsilon_0)/(1-\varepsilon_0)\right]\right\}-\frac{1}{\varepsilon_0};\ i=0,1,2.$$

5. Оценка погрешности метода Канторовича–Галеркина. Выражения для амплитуды напряжений, соответствующей колебаниям на *n*–ой динамической моде, при прохождении через резонанс получены как приближенным (24), так и аналитическим (37) методами. Результаты численных исследований данных выражений на максимум (при $\varepsilon_1=0$) занесем в таблицу 1, отображающую зависимость величины амплитуды напряжений от относительной скорости движения границы ε_0 (отношение скорости движения границы к скорости распространения колебаний в стержне) при прохождении через резонанс на первой и второй динамических модах.

Таблица 1. Зависимость величин A_n, B_n от относительной скорости ε_0 при прохождении через резонанс на первой и второй динамических модах

	ε_0	0,01	0,10	0,20	0,30	0,40
1 мода	$A_{1точн.}$	26,9	8,5	6,0	4,9	4,2
	$B_{1прибл.}$	26,9	8,5	6,1	5,0	4,4
2 мода	$A_{2точн.}$	15,5	4,9	3,4	2,8	2,4
	$B_{2прибл.}$	15,5	4,9	3,5	2,8	2,5

Сравнение результатов вычислений максимальной амплитуды напряжений при прохождении через резонанс на первой и второй динамических модах в зависимости от относительной скорости движения границы ε_0 (таблица 1) подтверждает вывод о том, что максимальная погрешность метода Канторовича–Галеркина не превышает 5 % для величины $\varepsilon_0 < 0,37$ [17].

Исследуем погрешность приближенного метода Канторовича – Галёркина применительно к оценке величины вызывающего резонанс внешнего возмущения. Сравним точную и приближенную частоты возмущающего действия, при которых возникает установившийся резонанс:

$$W_{точн.}(\tau) = \frac{\pi(2n-1)\ln(1+\varepsilon_0\tau)}{\ln[(1+\varepsilon_0)/(1-\varepsilon_0)]},$$

$$W_{прибл.}(\tau) = \frac{\pi n - \pi/2}{\varepsilon_0}\ln(1+\varepsilon_0\tau).$$

Относительная погрешность метода Канторовича–Галеркина определяется выражением

$$R_W = \left|\frac{W_{точн.}(\tau) - W_{прибл.}(\tau)}{W_{точн.}(\tau)}\right| \cdot 100\% = \left|1 - \frac{\ln[(1+\varepsilon_0)/(1-\varepsilon_0)]}{2\varepsilon_0}\right| \cdot 100\%. \quad (38)$$

Результаты (38) при различных значениях ε_0 сведем в таблицу 2.

Таблица 2. Оценка погрешности (%) метода Канторовича–Галеркина в зависимости от относительной скорости движения границ ε_0

ε_0	0,001	0,005	0,01	0,05	0,1	0,2	0,3	0,37
R_W, %	$3,33\cdot10^{-5}$	0,001	0,003	0,083	0,335	1,367	3,173	4,980

Величина R_W также не превосходит 5% при $\varepsilon_0 < 0,37$ (таблица 2). При увеличении скорости движения границы погрешность метода Канторовича–Галеркина увеличивается.

6. Заключение. Таким образом, выражения для амплитуд напряжений системы на *n*–ой динамической моде, полученные с помощью метода Канторовича–Галеркина (24) и метода замены переменных в функциональном уравнении (37) имеют аналогичный вид. Приведенные результаты позволяют произвести количественный анализ установившегося резонанса и явления прохождения через резонанс аналитическим и приближенным способами для систем, колебания в которых описываются соотношениями (1) – (3). Рассмотренная модель может быть использована, например, для анализа колебаний стержня твердого топлива, сгорающего с одного конца.

Список литературы

1. *Горошко О. А., Савин Г. Н.* Введение в механику деформируемых одномерных тел переменной длины. - Киев: Наукова думка, 1971. - 270 с.
2. *Савин Г.Н., Горошко О.А.* Динамика нити переменной длины. – Киев: Наукова думка, 1962, - 332 с.
3. *Лежнева А.А.* Изгибные колебания балки переменной длины // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. - 1970. - №1. - С. 159–161.

4. *Весницкий А.И.* Волны в системах с движущимися границами и нагрузками. – М.: Физматлит, 2001. – 320 с.
5. *Весницкий А.И., Потапов А.И.* Поперечные колебания канатов в шахтных подъемниках // Динамика систем. Горьковский университет. – 1975. – №7. – С. 84–89.
6. *Кечеджиян Л.О., Пинчук Н.А., Столяр А.М.* Об одной задаче математической физики с подвижной границей // Извест. вузов. Сев.–Кавк. регион. Естеств. науки. - 2008. — № 1. — С. 22–27.
7. *Ерофеев В.И., Колесов Д.А., Лисенкова Е.Е.* Исследование волновых процессов в одномерной системе, лежащей на упруго–инерционном основании, с движущейся нагрузкой // Вестник научно–технического развития. – 2013. - № 6 (70). – С. 18–29.
8. *Самарин Ю.П.* Об одной нелинейной задаче для волнового уравнения в одномерном пространстве // Прикладная математика и механика. – 1964. – Т. 26, В. 3. – С. 77–80.
9. *Самарин Ю.П., Анисимов В.Н.* Вынужденные поперечные колебания гибкого звена при разгоне // Изв. вузов. Машиностроение. – 1986. - (12). – С. 17–21.
10. *Анисимов В.Н., Литвинов В.Л.* Математические модели продольно–поперечных колебаний объектов с движущимися границами // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. «Физико–математические науки». – 2015. - 2 (19). – С. 382–397.
11. *Анисимов В.Н., Литвинов В.Л.* Резонансные свойства механических объектов с движущимися границами: монография. – Самара: Самар. гос. техн. ун–т, 2009. – 131 с.
12. *Анисимов В.Н., Литвинов В.Л.* Исследование резонансных свойств механических объектов с движущимися границами при помощи метода Канторовича–Галеркина // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. «Физико–математические науки», 2009. - 1 (18). – С. 149–158.
13. *Анисимов В.Н., Литвинов В.Л., Корпен И.В.* Об одном методе получения аналитического решения волнового уравнения, описывающего колебания систем с движущимися границами // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. «Физико–математические науки». - 2012. - 3 (28). – С. 145–151.
14. *Литвинов В.Л.* Решение краевых задач с движущимися границами при помощи метода замены переменных в функциональном уравнении // Журнал Средневолжского математического общества. – 2013. - Т. 15, № 3. – С. 112–119.
15. *Анисимов В.Н., Литвинов В.Л.* Анализ влияния движения границ при исследовании резонансных свойств систем с демпфированием // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. «Физико–математические науки». – 2009. - 2 (19). – С. 147–152.
16. *Анисимов В.Н., Литвинов В.Л.* Вычисление собственных частот поперечных колебаний вязкоупругого каната, движущегося в продольном направлении и имеющего изгибную жесткость // Математическое моделирование и краевые задачи: Труды Пятой Всероссийской научной конференции с международным участием. Ч. 1: Математические модели механики, прочности и надежности элементов конструкций. – Самара: СамГТУ, 2008. – 358 с.
17. *Литвинов В.Л., Анисимов В.Н.* Математическое моделирование и исследование колебаний одномерных механических систем с движущимися границами: монография // Самар. гос. техн. ун–т, 2017. – 149 с.
18. *Литвинов В.Л.* Поперечные колебания вязкоупругого каната, лежащего на упругом основании, с учетом влияния сил сопротивления среды // Вестник научно–технического развития. – 2015. - № 4 (92). — С. 29–33.

19. *Анисимов В. Н., Литвинов В.Л.* Вычисление собственных частот каната движущегося в продольном направлении // Журнал Средневолжского математического общества. — 2017. — Т. 19, № 1. — С. 130–139.
20. *Литвинов В.Л.* Продольные колебания каната переменной длины с грузом на конце // Вестник научно–технического развития. – 2016. - № 1 (101). — С. 19–24.
21. *Литвинов В.Л.* Применение метода Канторовича-Галеркина при исследовании резонансных свойств систем с демпфированием // Вестник научно–технического развития. – 2017. - № 2 (114). — С. 37–46.
22. *Анисимов В. Н., Литвинов В.Л* Аналитический метод решения волнового уравнения с широким классом условий на движущихся границах // Вестник научно–технического развития. – 2016. - № 2 (102). — С. 28–35.
23. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики, 4. - М.: Физматгиз, 1958.
24. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. - М.: Наука, 1976. - *576 с.*
25. *Мышкис А.Д.* Математика для технических вузов. - СПб.: Лань, 2002. - 640 с.