

УДК 534.1

О КОЛЕБАНИЯХ СТРУНЫ, СОУДАРЯЮЩЕЙСЯ С ОГРАНИЧИТЕЛЕМ, СОСТОЯЩИМ ИЗ ПРЯМОЙ И ТОЧКИ

© Виталий Львович Крупенин^{1,2}¹ИМАШ РАН, Москва, Россия²Московский Политехнический Университет, Москва, Россияkrupeninster@gmail.com

Аннотация. Изучается струна, находящаяся между двумя ограничителями хода: прямым протяженным и точечным. Струна совершает плоские колебательные движения с соударениями. Данная виброударная система с распределенными ударными элементами исследуется в рамках консервативной модели, а затем – в условиях действия автоколебательного, а также силового механизмов возбуждения. Показана важная роль стоячих волн типа «хлопок». Описываются динамические эффекты. Предлагаются расчетные схемы струнных систем, которые можно использовать при конструировании струнных датчиков и специальных измерительных устройств.

Ключевые слова: распределенные ударные элементы, струна, стоячие волны, уравнение Клейна-Гордона с правой частью, негладкое преобразование, почти периодические колебания, авторезонансные колебания, вынужденные колебания.

Работа выполнена за счет гранта Российского Научного Фонда, проект № 15-19-30026.

ON THE VIBRATIONS OF A STRING IMPACTING AN OBSTACLE, CONSISTING OF A STRAIGHT LINE AND A POINT

© Vitaly Krupenin^{1,2}¹IMASH RAN, Moscow, Russia² Moscow Polytechnic University, Moscow, Russiakrupeninster@gmail.com

Abstract. The string, which is located between two obstacles: a straight long and a point, is studied. The string performs plane oscillatory movements with collisions. This vibro-impact system with distributed impact elements is investigated within the framework of the conservative model, and then under the conditions of the self-oscillatory, and the force excitation mechanisms. The important role of standing waves of the "cotton" type is shown. Dynamic effects are described. Schematic diagrams of string systems that can be used in constructing string sensors and special measuring devices are proposed.

Keywords: distributed impact elements, string, standing waves, Klein-Gordon equation with right-hand side, nonsmoothed transformation, almost periodic oscillations, autoresonance oscillations, forced oscillations.

Acknowledgements. The work was supported by the Russian Science Foundation, project no. 15-19-30026.

1. Введение и краткий обзор. Проблемы динамики виброударных систем с распределенными ударными элементами становятся актуальными всякий раз, когда необходим учет собственных волновых свойств ударной пары. Виброударные системы с распределенными ударными элементами, и теоретически, и посредством постановки экспериментов изучались, в частности, в работах [1-13] и др.

В случае одномерных распределенных элементов была установлена, в частности, особая роль периодических стоячих волн с трапециевидными или политрапециевидными профилями, названными "хлопками". Возможность существования хлопков была установлена теоретически и позже хлопки были описаны по результатам экспериментов. При реализации хлопков или подобных им волн с изломанными профилями, относительно удаленные части ударных элементов могут синхронно взаимодействовать с соответствующими частями различного рода ограничителей или друг с другом.

Ниже, в частности, будет показана роль таких режимов движения в системе, представляющей собой натянутую струну, вибрирующую в плоскости между двумя преградами – прямой стенкой и точечным препятствием. Предполагается, что взаимодействие – упругое, а движение происходит благодаря приданию струне начальной энергии, достаточной в отсутствие трения для установления периодических стоячих волн. Кроме того, рассмотрены автоколебания струны, а также описана схема анализа вынужденных резонансных колебаний.

Изучаемая система может отвечать колебаниям с соударениями каких-либо тонких натянутых нитей, проводов, шлангов, ремней, трубок и т. п., движения которых ограничиваются. При этом система может, например, находиться в набегающем потоке жидкости или газа, возбуждающем её автоколебания [13].

2. Постановка задачи. Рассмотрим натянутую, защемленную на концах струну (рис.1), совершающую колебания в плоскости (u, x) , которые могут ограничивать два препятствия. Первое представляет собой точечный ограничитель, расположенный напротив её середины, вторая - прямой плоский ограничитель, расположенный параллельно оси статического равновесия. Механизм возбуждения колебаний рассмотрен ниже.

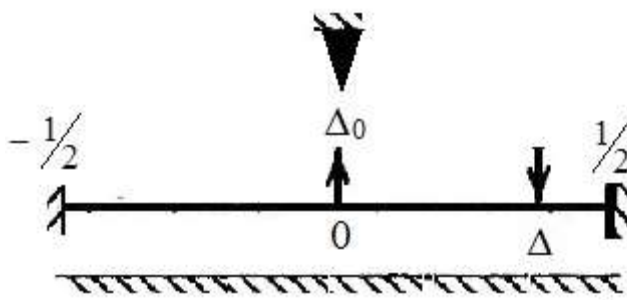


Рис.1. Модель системы.

Предположим, что $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$; $t \in \mathbf{R}$. Пусть координаты точечного ограничителя $(0, \Delta_0)$, причем $\Delta_0 > 0$, а прямой ограничитель расположен на расстоянии $|\Delta|$, $\Delta < 0$ от оси статического равновесия.

Таким образом

$$u(-\frac{1}{2}, t) = u(\frac{1}{2}, t) = 0; u(x, t) \geq \Delta, \Delta < 0; u(0, t) \leq \Delta_0, \Delta_0 > 0. \quad (1)$$

Два первых равенства (1) дают граничные условия; первое неравенство описывает связи, накладываемые протяженным ограничителем; третье – точечным. Без ограничения общности полагаем плотность и натяжение струны единичными, тогда единичной будет и скорость

звука. Уравнение движения, записанное относительно прогиба $u(x, t)$ – суть нелинейное уравнение Клейна -Гордона с правой частью [13]:

$$u_{tt} - u_{xx} - \Phi(u) = \varepsilon h(t, u, u_t), \quad (2)$$

где обобщенная функция $\Phi(u)$ – плотность силы взаимодействия струны с ограничителями: $\Phi(u) = \Phi_{\Delta}(u) + \Phi_{\Delta 0}(u)$ – представима в виде суммы плотностей сил взаимодействия с нижним (прямым) и верхним (точечным) ограничителями (рис.1) – см. далее. Конкретизируем возбуждение $\varepsilon h(t, u, u_t)$ ниже. Будем сейчас предполагать, что при взаимодействии струны с ограничителями энергия не теряется. Тогда при достаточно малых $\varepsilon > 0$ система квазиконсервативна, а при $\varepsilon = 0$ – консервативна. Этот случай и исследуем вначале.

Взаимодействие струны с ограничителями опишем в два этапа. Рассмотрим, во-первых, взаимодействие с плоским ограничителем [3, 5, 7].

При реализации во втором соотношении (1) строгого неравенства система описывается линейным волновым уравнением $\square u \equiv u_{tt} - u_{xx} = 0$, где « \square » - оператор Д’Аламбера. При достижении точками струны плоских частей прямого ограничителя (при реализации в соотношении во втором неравенстве (1) равенства) ограничитель действуют на струну «от себя». Поэтому:

$$u \leq 0, \rightarrow \square u \geq 0. \quad (3)$$

Оперируя с обобщенными решениями, необходимо потребовать, чтобы носитель обобщенной функции (множество точек, на котором обобщенная функция отлична от нуля [14])

$$\text{supp } \square u \subset \{(x, t); x=0; u(x, t) = \Delta\} \quad (4)$$

Так как принимаемая гипотеза предполагает, что при взаимодействии потери энергии не происходит, но теперь (как и для линейной струны) в смысле обобщенных функций выполняется закон сохранения энергии, записываемы в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} (|u_x|^2 + |u_t|^2) = \frac{\partial}{\partial x} (2u u_x). \quad (5)$$

где дифференцирование понимается в обобщенном смысле.

Это соотношение в данном, уже нелинейном случае постулируется и, отсюда непосредственно выводится аналог классической гипотезы об абсолютно упругом ударе:

$$u_t(x, t=0) = -u_t(x, t+0), (x, t) \in \text{supp } \square u; u(x, t) = \Delta. \quad (6)$$

Соотношения (2), (3), (4) [(5)] и определяют обобщенную функцию $\Phi_{\Delta}(u)$. При некоем n -м подходе струны к ограничителю [5, 10]

$$\Phi_{\Delta}(u) = J(x) \delta[t - t_n(x)] \gamma(x; \Delta). \quad (7)$$

Здесь $J(x)$ – плотность ударного импульса, $t_n(x)$ – распределение n -й «фазы» удара, определяемой как решение уравнения $u[x, t_n(\xi)] = \Delta < 0$; $\delta(t)$ - δ - функция Дирака. Индикаторная функция $\gamma(x; \Delta) = 0$ при тех x , когда струна не взаимодействует с плоской частью ограничителя и $\gamma(x; \Delta) = 1$, при взаимодействии.

Нетривиальный вопрос о возможности построения каких-либо континуальных аналогов гипотезы о коэффициенте восстановления сейчас не рассматривается.

Рассмотрим теперь описание взаимодействия струны с точечным ограничителем. При взаимодействии, когда при $x=0$, образуются временные выстои струны. При этом в течение выстоев на струну при $u(0, t) = \square \Delta_0$ ($t \in [t_j, \theta_j]$) действует сила реакции «точечной части» ограничителя $R_j(t)$. Здесь t_j и θ_j - моменты начала и конца выстоя; индекс j - отвечает какому-то j -му взаимодействию:

$$\Phi_0(u)=R_j(t)\delta(x)[\eta(t-t_j) - \eta(t-\theta_j)], R_j(t)=u_x(-0,t)-u_x(+0,t)\leq 0,; t\in[t_j, \theta_j], \quad (8)$$

где $\eta(t)$ – единичная функция.

Соотношения (7) и (8) определяют плотность силы взаимодействия струны с двойным ограничителем: $\Phi(u)=\Phi_{\Delta}(u)+\Phi_{\Delta_0}(u)$.

Дальнейшая цель – анализ системы (2), (1) при заданном возбуждения $\varepsilon h(t, u, u_t)$. Вначале будет рассмотрена консервативная модель, когда $\varepsilon=0$.

3. Консервативная система. Будем искать стоячие периодические волны некоторого периода $T(E)=2\pi/\omega$, где ω - частота вибрации струны; E – полная энергия или её взаимно-однозначная функция. Воспользуемся методами частотно-временного анализа виброударных процессов [5-9] и перейдем к интегральному уравнению T- периодических колебаний

$$u(x,t)=\int_0^T \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \chi(x,y;t-s)\Phi[u(x,t-s)]dsdy; \quad (9)$$

При этом периодическая функция Грина (ПФГ) струны [5-7, 9, 10]

$$\chi(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty} \sin\pi n(x+1/2)\sin\pi n(y+1/2)\chi_n(t); \chi_n(t)=(2\Omega_n\sin 0,5\Omega_n T)^{-1}\cos[\Omega_n(t-0,5t)] \quad (10)$$

Здесь $0\leq t\leq T$; и функции $\chi_n(t)$ – «элементарные» ПФГ линейных осцилляторов с частотами, отвечающими спектру струны $\{\Omega_n\}=\{\pi n\}$. Если переменная t лежит вне интервала периодичности $[0, T]$, то это конечное представление корректируется. Любые ПФГ всегда могут быть представлены некоторыми рядами Фурье [15]. Внося (7) и (8) в (9), находим, предполагая, что за каждый период искомого движения происходит лишь одно взаимодействие с каждым из ограничителей:

$$u(x,t)=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 2J(y) \gamma(y;\Delta) \chi(x,y;t-\varphi(y))dy + \int_{t_1}^{\theta_1} R(s)\chi(x,0;t-s)ds, \quad (11)$$

где $\varphi(x)$ – распределение фазы удара. Представление решения в виде (11) называется трехфункциональным [10]: три функции $J(x)$, $\varphi(x)$ и $R(t)$, определяемые сформулированными выше условиями и дают описание искомой периодической волны.

Рассмотрим построение одного решения специального вида. Поставим начальные условия вида

$$u(x, 0)=0, u_t(x, 0)=v_0(x)=-2V_0=\text{const}, V_0>0; x\in[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]. \quad (12)$$

Тогда полная энергия струны $E=2V_0^2$. Пусть ограничители отсутствуют. Линейные колебания имеют период $T_L=2$. Все профили струны укладываются внутрь ромба $|u|=V_0(1-2|x|)$ с вершинами $\{(-\frac{1}{2},0); (0, -V_0); (\frac{1}{2},0); (0, V_0)\}$ и имеют трапецевидную (или треугольную) форму (см. рис.2 при $u<0$). Пусть ограничители одновременно лежат внутри этого параллелограмма: при всех значениях $V_0: |\Delta|, \Delta_0 < V_0$.

По условию задачи, исходя из знака начальной скорости, вначале будет происходить взаимодействие струны с плоским ограничителем. Таким образом при $t=0$ струна находится в состоянии равновесия. При $t=\tau_1=|\Delta|V_0^{-1}$ происходит мгновенное взаимодействие с отскоком [см.(5)] участка струны длиной $l=1-|\Delta|V_0^{-1}$. Координаты концов этого участка $l_{\mp}=\mp\frac{1}{2}(1-|\Delta|V_0^{-1})$. После мгновенного отскока, координата u – возрастает. При $t=\tau_2=2|\Delta|/V_0$ струна проходит положение равновесия и скорость плоского участка профиля волны меняет

знак: $u(x, \tau_2)=0$, $u_t(x, \tau_2)= 2V_0=\text{const}$, $V_0>0$; $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. В момент времени $t_1=\tau_3=\tau_2+\Delta_0/2V_0$ середина струны касается точечного ограничителя. За время выстоя $\tau_* = \theta_1 - t_1$, (при $t=\theta_1$ происходит окончание выстоя) профиль струны сохраняет характерную «двухзубцовую» форму (см. рис.2 при $u>0$). При $t=T$ процесс повторяется. Таким образом данная стоячая волна- периодическая. В соответствии с расчетами, проведенными в [16], имеем $\tau_* = \theta_1 - t_1 = 1 - \Delta_0/2V_0$. Тогда можно получить $T(V_0)=1 + (2|\Delta| + \Delta_0)/2V_0$.

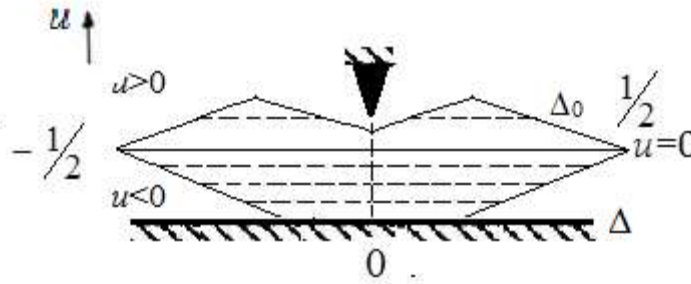


Рис.2. Профиль стоячей волны.

Если $T(V_0)=T_L=2$, то струна совершает линейные колебания с трапециевидными профилями и может разве что касаться и нижнего, и верхнего ограничителей в серединной точке $x=0$. По условию рассматриваются движения, когда взаимодействия происходят с обоими ограничителями, то есть необходимо чтобы $T(V_0)<2$ или $2|\Delta| + \Delta_0 < 2V_0$. Из формулы для периода $T(V_0)$ также получаем зависимость значений одного из интегралов движения от частоты стоячей волны:

$$V_0(\omega) = \omega \frac{2|\Delta| + \Delta_0}{4\pi - 2\omega} \quad (13)$$

Найденный режим (обозначим его $W(V_0; x, t)$) оказывается жестко анизохронным. Полуинтервал собственных частот $(\pi, 2\pi)$ – см. рис. 3, где обозначено значение $V_0(\pi) = |\Delta| + 0,5\Delta_0$ (см. также далее).

Таким образом, все функции и параметры движения, определяющие представление (11) для $u(x, t) \equiv W(V_0; x, t)$ определены. Учитывая выбранные направления изменения величин, найдем $J(y)=4V_0=\text{const}$; $\varphi(y)=|\Delta|/2V_0 = \text{const}$; $\gamma(y; \Delta)=\eta[y - \frac{1}{2}(1 - |\Delta|V_0^{-1})] - \eta[y + \frac{1}{2}(1 - |\Delta|V_0^{-1})]$; $t_1=C_1 + \Delta_0/2V_0$; $\theta_1 = C_1 + 1, C_1 = \text{const}$; $R(s)=-4V_0$. При этом $\Omega_n = \pi n$ и для длины отрезка струны, взаимодействующего с нижним ограничителем, вводится обозначение $l = \frac{1}{2}(1 - |\Delta|V_0^{-1}) > 0$.

Внося вычисленное и (10) в представление (11) найдем после ряда преобразований на периоде стоячей волны ($0 < t \leq T$).

$$W(V_0; x, t) = 8V_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\Omega_{2n-1}} \sin \Omega_{2n-1} (x + \frac{1}{2}) \sin \frac{1}{2} \Omega_{2n-1} (1 - |\Delta|V_0^{-1}) \chi_{2n-1} (t - |\Delta|/2V_0)^{\square};$$

$$+ 4V_0 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin \pi(2n-1)(x+1/2) \frac{2\sin[\Omega_{2n-1} \frac{1}{2}(t_1 - \theta_1)] \cos[\Omega_{2n-1} (t - 0,5T - \frac{1}{2}(t_1 + \theta_1))]}{2\sin \Omega_{2n-1} \frac{T}{2}} \quad (14)$$

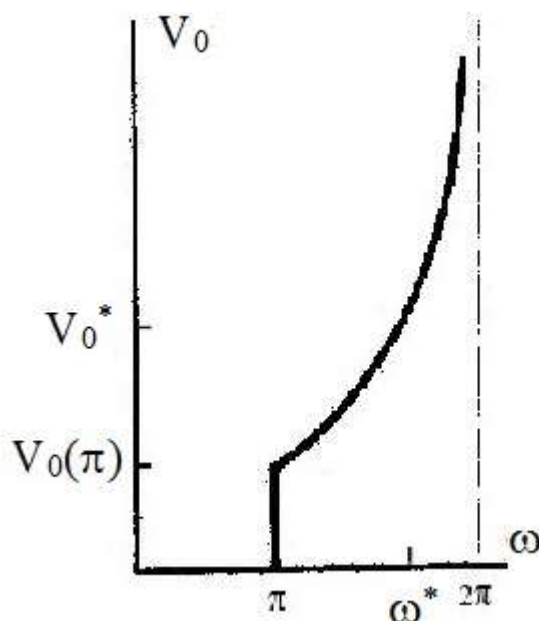


Рис.3. Жесткий анизохронизм хлопка.

Представление (14) с начальными условиями специального вида (12) может быть заменено равносильным конструктивным описанием профиля волны в любой момент времени, как, собственно говоря, и было проделано выше при нахождении её определяющих параметров. Ясно, что функция $W(x,t)$ удовлетворяет условиям (1), (3)-(6) и (8). Например, при проверке выполнимости условия (5) легко получить, что $W_t W_x = 0$, $W_x^2 + W_t^2 = 4V_0^2$.

Стоячие волны типа полученных были названы хлопками [7]. Легко видеть, что при определенных соотношениях между величинами Δ и Δ_0 возможны режимы с взаимодействиями струны с каким-то одним ограничителем. Эти случаи [7, 16] здесь не рассматриваются.

4. Уникальность хлопков. Пусть система по-прежнему консервативна. Рассмотрим более общие начальные условия стандартного вида. Ограничимся условиями в определенном смысле подобным тем, что порождают стандартные формы собственных колебаний струны в линейном случае, когда начальные условия [см. (12)] $u(x,0)=0$; $v_0(x) = -2V_0\pi\sin[\pi(x+1/2)]$. Положим теперь:

$$u(x,0)=0; v_0(x) \leq 0; -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}; \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |v_0(x)| dx = 2V_0 > 0 \quad (15)$$

Воспользуемся методиками, развитыми, например, в [2, 4, 7, 16], предположив, что функция $v_0(x)$ - четная. Идея состоит в преобразовании исходной задачи к виду, при реализации которого, сформулированные выше условия взаимодействия, могли бы удовлетвориться автоматически. При этом преобразованию подлежат и искомая функция, и независимые переменные.

Для того чтобы последующие построения были бы математически корректными, сделаем дополнительное предположение. Пусть нечетная функция $V(x) = \int v_0(x) dx$ – дважды непрерывно дифференцируема на отрезке $[-1/2, 1/2]$, причем $V''(-1/2) = V''(1/2) = 0$. Из сделанных предположений выводится, что $V'(x) \leq 0$.

Будем искать решение задачи (1), (2) [(12)] в следующем виде:

$$u(x, t) \equiv W[V_0; y_1(x,t), y_2(x,t)]; \quad y_{1,2}(x,t) = g(x+t) \pm g(x-t); \quad (16)$$

вид функции $g(x)$ определяется ниже. Интересуясь качественной стороной вопроса, положим сейчас $V_0=1$.

Функцию g определим в три этапа, «построив» ее при помощи начальных условий (15). Вначале, при $x \in [-1/2, 1/2]$ положим, во-первых:

$$g(x) = \frac{1}{4} \int |v_0(x)| dx + C_0 \equiv -\frac{1}{4} V(x) + C_0, \quad (17)$$

где величина $C_0 = \text{const}$ определяется далее. Из сказанного следует, что функция $g(x)$ – дважды непрерывно дифференцируема. Во-вторых, доопределим эту функцию вне отрезка $[-1/2, 1/2]$. При для $x \in [1/2, 3/2]$ положим

$$g(x) = 1/2 - g(1-x). \quad (18)$$

Вычисления дают: $g(1/2) = 1/4$; $C_0 = 1/4 V(1/2)$; $g(-1/2) = -1/4$; $g''(1/2) = 0$. И таким образом функция $g(x)$ оказывается дважды непрерывно дифференцируемой и на отрезке $[-1/2, 3/2]$. Наконец, в-третьих, положим для всех $x \in \mathbf{R}^1$

$$g(x+2) = 1 + g(x). \quad (19)$$

Из сделанных выше предположений и формулы (17) следует, что функция $g(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на всей числовой оси. Кроме того, в соответствии с построением функции $g(x)$ [см. (17) – (19)], можно заключить, что функция g – не убывает на всей числовой оси, так как

$$g'(x) = -1/4 V'(x) \geq 0$$

Можно легко получить, что соотношение (18) остается верным для всех $x \in \mathbf{R}^1$. Возвращаясь к представлениям (16), исходя из свойств функции g установим свойства функций $y_{1,2}(x,t)$. Имеем, после преобразований:

$$y_1(x,t+2) = y_1(x,t); \quad y_2(x,t+2) = y_2(x,t)+2; \quad (20)$$

$$-1/2 \leq y_1(x,t) \leq 1/2, \quad y_2(\pm 1/2, t) = \pm 1/2. \quad (21)$$

Таким образом функция y_1 – периодична с периодом колебаний линейной струны $T_L=2$, а функция y_2 – эволюционирует.

Покажем, что представление (16) как раз и определяет решение поставленной задачи. Для этого необходимо показать, что функция (16) удовлетворяет всем, соотношениям, определяющим задачу ($\epsilon=0$).

В соответствии с видом представления (16) конфигурационные ограничения, входящие в (1), очевидно, выполняются. Проверим выполнимость начальных условий. Для первого, тривиального условия, входящего в (15) с учетом свойств функции $W(V_0; x,t)$, удовлетворяющей (12) имеем, используя (16): $u(x, 0) \equiv W[1; 2g(x), 0] = 0$. Для второго начального условия (15) при помощи (16), (17) и только что описанного способа построения функции $g(x)$ найдем при помощи очевидных преобразований: $u_t(x, 0) \equiv W[1; y_1(x,0), y_2(x,0)] = -4 g'(x) = v(x) \leq 0$. Далее проверяем выполнимость граничных условий. Используя (18) и (19) находим: $y_1(\pm 1/2, t) = \pm 1/2$, следовательно, $u(\pm 1/2, t) = W[1; \pm 1/2, y_2(\pm 1/2, t)] = 0$.

Перейдем к проверке выполнимости условий взаимодействия. В соответствии с видом преобразования (16), функции $y_{1,2}(x,t)$, удовлетворяют волновому уравнению. Поэтому, подставляя в него первое равенство (16), получим, выполняя дифференцирование в смысле обобщенных функций:

$\square u = 2 g'(x+t) g'(x-t) \square W$. С учетом неубывания функции $g(x)$ и выполнения условия (3) для стоячей волны W , получаем, что при $u \leq 0$ имеет место неравенство $\square u \geq 0$, то есть соотношение (3) имеет место и при использовании преобразования (16). Скачок скорости

наступает при $W=\Delta$, поэтому подобное утверждение относится и к выполнимости условия (4).

Выполнимость постулируемого условия (5) можно получить, исходя из описания эволюции профиля струны или, сложнее, напрямую из найденных аналитических решений (14). Используя вид преобразования (16), получим:

$$W_x^2 + W_t^2 = 8[g'^2(x+t) + g'^2(x-t)]; \quad W_t W_x = 4[g'^2(x+t) - g'^2(x-t)].$$

Дифференцируя здесь первое соотношение по t , второе – по x , получаем в обоих случаях: $16[g'(x+t)g''(x+t) - g'(x-t)g''(x-t)]$ и приходим к тождеству.

Осталось проверить соотношения, входящие в (8). Выполняя с учетом построения профилей хлопков W дифференцирование, имеем для реакции точечного ограничителя $R_0 = W_x(-0, t) + W_x(0, t) = -4$. Ввиду возрастания функции $g(t)$, получаем выполнение неравенства, входящего в (7) в виде $R_0 = -8g'(t) < 0$.

Следовательно, представление (16) определяет решение задачи при $\varepsilon=0$ и с начальными условиями (15). Теперь в формуле (14) необходимо заменить: $x \rightarrow y_1(x, t)$, $t \rightarrow y_2(x, t)$. Ввиду громоздкости полный вид окончательного представления не приводится. Он, впрочем, может быть выписан без труда. Его структура определяется рядами, входящими в (14), то есть решение строится как ряд, каждый член которого – произведение T -периодической функции времени D_{1k} , множимой на некоторую функцию D_{2k} координаты:

$$u(x, t) = W[V_0; y_1(x, t), y_2(x, t)] = \sum_{k=1}^{\infty} D_{1k}[V_0; y_1(x, t)] D_{2k}[V_0; y_2(x, t)], \quad (22)$$

где все функции D_{1k} – T -периодичны по переменной y_1 и в то же время $y_1(x, t+2) \equiv y_1(x, t)$; $y_2(x, t+2) \equiv y_2(x, t) + 2$. В соответствии с найденным в п.3. период $T = 1 + (2|\Delta| + \Delta_0)/2V_0$ и для того, чтобы формула (22) определяла бы периодический процесс необходимо и достаточно, чтобы величины T и $T_L = 2$ были бы соизмеримы. Таким образом, изучаемая нами задача может иметь периодическое решение тогда и только тогда, когда период T дается рациональным числом. В остальных случаях решение оказывается почти периодическим (ср. [2, 4, 7, 10, 16]). Ясно, что такое условие физически нереализуемо. Поэтому хлопок, отвечающий специальным начальным условиям, оказывается здесь единственным виброударным процессом, сохраняющим периодичность вне зависимости от значения зазора. При посредстве хлопков разумно описывать процесс взаимодействия, например, в квазиконсервативном случае при $\varepsilon \neq 0$ (п.6). Для многих систем указанное обстоятельство получило экспериментальное обоснование [6, 7, 9, 12, 16].

Отметим, что описанный факт остается в силе и при более общих, чем (15), начальных условиях. При исследовании этого вопроса можно воспользоваться, в частности, результатами работ [2, 4], однако, проблема, вообще говоря, носит чисто математический характер.

5. Автоколебания. При помощи структурно устойчивого решения (14) можно проводить анализ данной системы при различных типах внешних воздействий. Пусть в уравнении движения (2) возбуждение представимо в виде $h(t, u, u_t) = h_1(t, u, u_t)h_0(u_t)$, где h_1 достаточно гладкая по совокупности переменных функция, а $h_0(z) = \alpha z - \beta z^3 + \dots$ – полином нечетной степени.

Ограничимся лишь кубическим членом. В дальнейшем, для простоты остановимся на случае $h(t, u, u_t) \equiv h_0(u_t)$ (см. также далее). Задачи такого рода неоднократно обсуждались в нескольких работах автора, но наиболее подробно – в статьях [13, 17]

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что при

$$V = V_0^* = \sqrt{\frac{\alpha}{4\beta}} \tag{23}$$

ряд (14), дающий стоячую волну $W(V_0^*; x, t)$, описанную в п.3, удовлетворяет уравнению (2) с введенной только что правой частью, поскольку одновременно имеют место два тождества

$$\square W(V_0^*; x, t) + \Phi[W(V_0^*; x, t)] \equiv 0, h[W(V_0^*; x, t)] = \alpha W_t - \beta W_t^3 \equiv 0. \tag{24}$$

Так как частоты возможных стоячих волн совпадают с собственными частотами нелинейной системы (лежат в интервале $(\pi, 2\pi)$), то устанавливающиеся режимы движения оказываются авторезонансными [13].

Методика решения рассматриваемой задачи и отыскания решений и семейств решений, подобным режиму $W(V_0^*; x, t)$, основана на одном примечательном обстоятельстве [17].

Предположим, что нечётная функция $h_0(z)$ непрерывна при всех $z \in \mathbf{R}^1$. Рассмотрим алгебраическое уравнение $h_0(z) = 0$. Пусть, кроме корня $z_0 = 0$, оно имеет ещё по крайней мере одно нетривиальное решение. Ввиду нечетности функции $h_0(z)$, структура множества Z_h корней этого уравнения оказывается такой: $Z_h = \{0; \pm z_1; \pm z_2; \dots\}$ (все $z_k > 0$).

Всякая непрерывная по совокупности переменных функция $u(x, t)$, являющаяся обобщенным решением нелинейного уравнения Клейна-Гордона $\square u + \Phi(u) = 0$ с граничными условиями (1) – первое и второе равенства – будет также и обобщенным решением задачи (2) с правой частью $h_0(u_t)$, если при каждом x , лежащем в отрезке $[-1/2, 1/2]$ в каждый момент времени t : $u(x, t) \in Z_h$.

Рассмотрим разрывный профиль скорости (рис. 4) рассматриваемой стоячей волны $u_t(x, t) = W_t(V_0^*; x, t)$, который даётся кусочно-постоянной функцией. На рис 4, а показан случай $u < 0$; на рис. 4, б и с – $u > 0$. Можно увидеть, что всегда можно подобрать числа $\alpha, \beta > 0$ так, чтобы второе тождество (24) непременно бы выполнялось (рис. 4, д).

Из сказанного также следует, что в данной системе, очевидно существует и тривиальный режим $V_0^* = 0$.

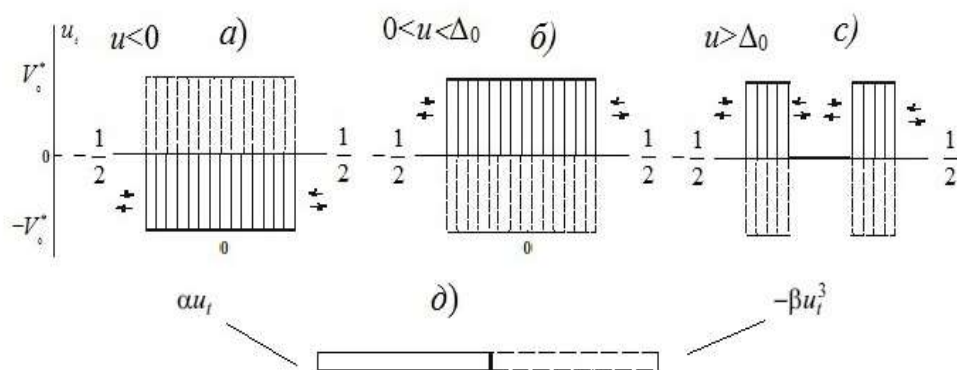


Рис.4. Профили скоростей.

Таким образом, искомое решение получается из представления (12), в котором все параметры, зависящие от величины V_0 выбираются при $V_0 = V_0^*$ (отмечено на рис. 3). Параметры этого процесса найдем из формул, полученных в п. 3, внося в них указанное значение величины V_0 (23). При помощи формулы (13) и (23) находим частоту авторезонансного хлопка

$$\omega = \omega^* = \frac{2\pi\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}(2|\Delta| + \Delta_0)},$$

всегда лежащую в интервале $(\pi, 2\pi)$. Величина площадки взаимодействия с нижним ограничителем и время взаимодействия с верхним ограничителем даются соотношениями

$$l=l^* = \frac{1}{2} - |\Delta| \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}; \quad \tau^* = 1 - |\Delta| \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}.$$

Всякий авторезонансный режим даёт баланс работ неконсервативных сил за его период:

$$\int_{-1/2}^{1/2} \int_0^{\tau^*} h_0[u_t(x,t)] u_t(x,t) dt dx = 0. \quad (25)$$

В данном случае из формул (23) легко видеть, что на указанных режимах балансируются также и сами неконсервативные силы, так что данная система относится к классу систем с компенсацией сил диссипации в каждый момент времени – (КСД – системам [13, 17]).

Для исследования устойчивости найденного решения система анализируется методом конечных разностей с пересчетом начальных условий. При соответствующем задании начальных условий был получен авторезонансный режим W и установлена его асимптотическая устойчивость. В то же время установлена неустойчивость положения равновесия. Автоколебания оказываются самовозбуждающимися.

Аналитическое исследование устойчивости авторезонансных режимов в вибрирующей струне без ограничителей в случае силы возбуждения, приложенной в изолированной точке, выполнено в классической работе А. А. Витта [18], который дал обоснование существования волн с изломанными профилями в струнных системах, основанное на факте эквидистантности спектра собственных частот линейной струны. Такой спектр способствует одновременному возбуждению большого числа мод колебаний при широкополосных воздействиях. Рассмотренная задача возникает, например, когда распределенная система, моделируемая абсолютно гибким стержнем, взаимодействует с препятствиями, находясь в набегающем потоке жидкости или газа [13, 17].

6. Резонансные колебания. В заключение заметим, что, если вернуться к более общей постановке, когда в уравнении движения (2) $h(t, u, u_t) = h_1(t, u, u_t)h_0(u_t)$, то можно утверждать, что среди возможных стоячих волн будут и только что описанные. Однако, указать эффективный метод их нахождения, а также качественного анализа уравнения движения в общем случае, по-видимому, проблематично.

В случае, когда $h(t, u, u_t) = h_1(u, u_t) + P(x, t)$, где $h_1(u, u_t)$ - распределение сил диссипации, а $P(x, t)$ - распределение T_2 -периодических сил возбуждения, аналогично формуле (25) можно, записав уравнение энергетического баланса и отыскивать при малых $\varepsilon > 0$ решения исходной задачи в виде

$$u(x, t) \approx W(V_0^*; x, t) + \varepsilon \dots \quad (26)$$

Здесь при отыскании стоячих волн периода $n^{-1}qT_2$ ($n, q = 1, 2, \dots$), предполагается, что частота отыскиваемых движений лежит в интервале собственных частот консервативной системы $\omega_2 V^{-1}q \in (\pi, 2\pi)$. Режимы представимые в виде (26) называют резонансными [19]. Величина V_0^* для комбинационных резонансных режимов qn^{-1} оценивается при помощи формулы (13):

$$V_0^*(\omega_n) = \omega_n \frac{2|\Delta| + \Delta_0}{4\pi - 2\omega_n}, \omega_n = \omega_2 qn^{-1}.$$

Предполагается, что при реализации резонансных периодических стоячих волн-хлопков (26) осуществляется баланс работ неконсервативных сил. Так что вместо (25) получим

$$\int_{-1/2}^{1/2} \int_0^{T_2} \{h_{1t}[W(V_0^*; x, t), W_t(V_0^*; x, t)] + P(x, t)\} W_t(V_0^*; x, t) dt dx = 0, \quad (27)$$

Рассмотрим основные резонансные режимы при $q=n=1$. В случае, если имеется периодическое полигармоническое возбуждение

$$P(x, t) = \sum_{k=1}^N P_k(x) \cos[k\omega(t + \varphi)], P_k(x) \geq 0,$$

то соотношение (27) приводится в достаточно общем случае к виду [20]

$$\Gamma(\varphi) \equiv \sum_{k=1}^N Q_k(V_0^*; \omega_2) \sin k\omega_2 \varphi = D(V_0^*; \omega_2), \quad (28)$$

где правая часть определяется механизмами диссипации, а левая – возбуждения. Условие разрешимости уравнения (28) – суть условие существования в данной системе основных резонансных режимов периода T_2 .

Исследование уравнения типа (28) проведено, в частности, в работах [15, 20]. Количество корней этого уравнения определяет число резонансных режимов в системе (2). Число пар решений этого уравнения равно количеству максимумов фазовой функции $\Gamma(\varphi)$ на промежутке $0 \leq \varphi < T$. Условие существования хотя бы одной пары имеет вид

$$\sup_{0 \leq \varphi < T_2} \Gamma(\varphi) \geq D(V_0^*; \omega_2).$$

Было показано, что при превалировании высших гармонических составляющих, могут существовать несколько пар резонансных режимов. В общем случае $q>1$; $n>1$ ситуация усложняется, но анализ все равно сводится к уравнению энергетического баланса подобному (28).

Материал, кратко изложенный в этом п. может позволить построить расчетные схемы струнных систем, применяемых при конструировании струнных датчиков и некоторых измерительных устройств [21, 22].

Список литературы

1. Amerio L., Prouse G. Study of the Motion of a String Vibrating Against an Obstacle //Rend. di Mat. Ser. 6(8). - 1975. - N.2. P.563-585.
2. Cabannes H., Haraus A. Mouvements presque – periodiques d’une corde vibrante en Presence d’un obstacle fixe, rectiligne ou ponctuel // I.J. Non-linear Mechanics. - 1981. - V.55, №5/6. - P.449-457.
3. Bamberger A., Schatzman M. New results of a string vibrating against the obstacles // Saim. J. Math. Anal. - 1983. - Vol. 14, № 3. - P.560-595.
4. Cabannes H. Cordes Vibrantes avec Obstacles//Acustica. - 1984. - V.55. - P. 14-20.
5. Крупенин В.Л. К теории виброударных систем с распределенными ударными элементами // Изв. АН СССР. МТТ. - 1986. - №1. - С.25-32.

6. Веприк А.М., Крупенин В.Л. О резонансных колебаниях системы с распределенным ударным элементом // *Машиноведение*. - 1988. - № 6. - С. 39-47.
7. Крупенин В.Л. Трансформация форм колебаний струны, взаимодействующей с двумя протяженными преградами // *ДАН СССР*. - 1990. - Т.313, №6. - С.1394-1394.
8. Krupenin V.L., Veprik A.M. Vibroconductors equipped with impact elements and distributed vibroimpact systems // *Proceedings of the 2-nd European Nonlinear Oscillations Conference*. - Czech Prague: CTU, 1996. - V.1. - P. 229-234.
9. Асташев В.К., Крупенин В.Л. Волны в распределенных и дискретных виброударных системах и сильно нелинейных средах // *Проблемы машиностроения и надежности машин*. - 1998. - №5. - С.13-30.
10. Крупенин В.Л. К описанию динамических эффектов, сопровождающих колебания струн вблизи однотоавровых ограничителей // *ДАН*. - 2003. - № 388 (3).
11. Крупенин В.Л. Виброударные процессы, порождаемые распределенными ударными элементами, взаимодействующими с вибрирующими препятствиями // *Вестник научно-технического развития*. - 2009. - №11 (27). - С.45-51.
12. В.К. Асташев, В.Л. Крупенин. Эксперименты с протяженными виброударными системами (резонансные движения) // *Вестник научно-технического развития*. - 2010. - №7. - С.3-10.
13. Крупенин В.Л. Автоколебания струны, взаимодействующей с двумя прямыми протяженными препятствиями и находящейся в набегающем потоке жидкости или газа // *Проблемы машиностроения и надежности машин*. - 2015. - №4. - С. 25-34.
14. Владимиров В.С. *Обобщенные функции в математической физике*. - М.: Наука, 1976. - 280 с.
15. Бурд В.Ш., Крупенин В.Л. *Усреднение в квазиконсервативных системах*. Библиотека ВНТР. - М.: «Белый Ветер», 2016. - 172 с.
16. Крупенин В.Л. К расчету резонансных колебаний гибкой нити, взаимодействующей с точечным ограничителем хода // *Проблемы машиностроения и надежности машин*. - 1992. - №2. - С. 29-35.
17. Крупенин В.Л. Стоячие волны с пилообразными профилями, возбуждаемые набегающими потоками жидкости или газа // *Вестник научно-технического развития*. - 2009. - №11 (27). - С.35-39.
18. Витт А. А. К теории скрипичной струны // *ЖТФ*. - 1936. - Т. 6, Вып. 9. - С. 1459—1479.
19. *Вибрации в технике. Справочник Т.2 / Под ред. И.И. Блехмана* - М.: Машиностроение, 1979. - 352 с.
20. Крупенин В.Л. Об оценке числа периодических режимов движения нелинейных колебательных систем при периодическом полигармоническом возбуждении колебаний // *Вестник научно-технического развития*. - 2013. - №4 (68). - С.14-19.
21. Древис Ю.Г. *Системы реального времени: технические и программные средства*. М.: МИФИ, 2010. - 320 с.
22. Асташев В.К., Бабицкий В. И., Герц М.Е. и др. Измерение сил с использованием виброударной системы // *Измерительная техника*. - 1986. - №7. - С.33-35.