УДК 534.1

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЕЙ, УЧИТЫВАЮЩИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКУЮ НЕЛИНЕЙНОСТЬ

© Владимир Иванович Ерофеев[1,2], Владимир Владимирович Кажаев[2], Александр Сергеевич Плехов[1], Надежда Петровна Семерикова[3]
[1]*Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева*
[2]*Институт проблем машиностроения Российской академии наук, г. Нижний Новгород*
[3]*Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Россия*
erof.vi@yandex.ru

Аннотация. *Предложены математические модели крутильных колебаний стержней, обобщающие линейные модели учетом геометрической нелинейности.*
Ключевые слова: *стержень, геометрическая нелинейность, крутильная волна.*

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (Грант № 15-19-10026).

THE MATHEMATICAL MODELS OF TORSIONAL VIBRATIONS OF RODS, TAKING INTO ACCOUNT THE GEOMETRIC NONLINEARITY

© V.I. Erofeev[1,2], V.V. Kazhaev[2], A.S. Plehov[1], N.P. Semerikova[3]
[1]*R.E. Alekseev Nyzhny Novgorod Technical University, Nyzhny Novgorod, Russia*
[2] *Mechanical Engineering Research Institute of the Russian Academy of Sciences, Nizhny Novgorod, Russia*
[3]*Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod, Russia.*
erof.vi@yandex.ru

Abstract. *The offered mathematical model of torsional vibrations of rods, the generalized linear model accounting for geometrical nonlinearity.*
Keywords: *rod, geometric nonlinearity, torsional wave.*

Acknowledgements. *The work was supported by the Russian Science Foundation, project no. 15-19-10026.*

Крутильные волны играют большую роль в формировании вибрационных полей машиностроительных конструкций. Кручению стержней посвящена обширная литература [1-4], в ней рассматриваются различные приближенные теории крутильных колебаний однородных тонких стержней. В данной работе предложены модели крутильных колебаний, обобщающие известные линейные модели учетом геометрической нелинейности.

В основе теории кручения стержней Кулона (технической теории) лежат предположения о недеформируемости поперечного сечения в своей плоскости и об отсутствии депланации, т.е. выхода поперечного сечения из первоначального плоского состояния. Сечения стержня, согласно этим гипотезам, скользят друг по другу, поворачиваясь в своей плоскости на малый угол как жесткие площадки. Перемещения точек стержня имеют вид:

$u_1 = 0, \quad u_2 = -z\,\theta(x,t), \quad u_3 = y\,\theta(x,t)$, где $\theta(x,t)$ - угол поворота сечения или угол закрутки, а крутильные волны описываются волновым уравнением $\rho I_p \theta''_{tt} - \mu I_p \theta''^{\,2}_{xx} = 0$.

Здесь $I_p = \iint\limits_F \left(y^2 + z^2\right) dF$ – полярный момент инерции. Согласно технической теории Кулона, крутильные волны распространяются без дисперсии с той же скоростью $C_\tau = \sqrt{\mu/\rho}$, с которой распространяются сдвиговые волны в неограниченной среде.

По теории Б.Сен-Венана (теория жесткого кручения) кручение стержня складывается из кручения по Кулону и продольных смещений, приводящих к депланации поперечного сечения. Депланация предполагается одинаковой для всех сечений, т.е. не зависит от *x*. Перемещения точек стержня имеют вид $u_1 = \Phi(y,z), \quad u_2 = -z\,\theta(x,t), \quad u_3 = y\,\theta(x,t)$, где функция кручения $\Phi(y,z)$ определяется из решения уравнения Лапласа $\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0$ с граничным условием на контуре $\dfrac{\partial \Phi}{\partial n} = z\cos(n,y) - y\cos(n,z)$, (*n* - нормаль к контуру). Крутильные волны по теории Сен-Венана также описываются волновым уравнением $\rho I_p \theta''_{tt} - \mu I_{kp} \theta''_{xx} = 0$. Однако, в отличие от модели Кулона, скорость крутильной волны $C_{kp} = C_\tau \sqrt{I_{kp}/I_p}$ отличается от скорости волны сдвига на постоянный множитель, зависящий от формы поперечного сечения. Здесь $I_{kp} = \iint\limits_F \left(y^2 + z^2 + y\Phi'_z - z\Phi'_y\right) dF$ – момент инерции при кручении, который совпадает с полярным моментом I_p только для цилиндрического стержня.

Существует также уточненная теория крутильных колебаний стержней, которую принято называть теорией стесненного кручения. В ее основе лежат предположения о том, что кручение стержня складывается из двух связанных друг с другом движений: поворота поперечных сечений в своей плоскости (кручения по Кулону) и их депланации (т.е. выхода из первоначального плоского состояния в результате неодинакового растяжения продольных волокон стержня при кручении). Депланация при этом считается пропорциональной относительному углу закрутки $\dfrac{\partial \theta}{\partial x}$. Тогда система смещений точек стержня будет иметь вид:

$$\begin{cases} u_1 = \Phi(y,z)\theta'_x(x,t) \\ u_2 = -z\,\theta(x,t) \\ u_3 = y\,\theta(x,t) \end{cases}, \tag{1}$$

где функция кручения $\Phi(y,z)$ определяется так же, как в теории Сен-Венана. Крутильные волны в этом приближении описываются уравнением Власова:

$$\rho I_p \theta''_{tt} - \mu I_{kp} \theta''_{xx} + E I_d \theta''''_{xxxx} - \rho I_d \theta''''_{xxtt} = 0 \tag{2}$$

Здесь *E*– модуль Юнга, а величина $I_d = \iint\limits_F \Phi^2(y,z)\,dF$ называется моментом депланации.

Уравнение Власова, наряду с волновой частью, содержит слагаемые, описывающие пространственно и пространственно-временную дисперсии. Оно описывает два связанных между собой волновых процесса: крутильные колебания частиц стержня и продольные движения частиц, связанные с депланацией.

В данной работе предложено обобщение рассмотренных выше линейных моделей крутильных волн учетом геометрической нелинейности. Нелинейность, связанная с геометрией деформирования, определяется двумя факторами. Во-первых, если вектор смещения частиц стержня является большим, в том числе и при малых деформациях, то необходимо учитывать конечные углы закрутки. Во-вторых, если сама деформация кручения, т.е. относительные смещения соседних частей стержня, не является малой, то необходимо учитывать тензор конечных деформаций Коши-Грина. В работе получены различные обобщенные модели геометрически-нелинейных крутильных волн и рассмотрены их свойства.

1. В самом общем случае рассмотрим нелинейность в системе смещений и учтем тензор конечных деформаций. Если в векторе смещений учесть конечные углы закрутки, то смещения точек стержня по теории стесненного кручения [3] имеют следующий вид:

$$\begin{cases} u_1 = \Phi(y,z)\theta'_x(x,t) \\ u_2 = y(\cos\theta - 1) - z\sin\theta \\ u_3 = y\sin\theta + z(\cos\theta - 1) \end{cases} \tag{3}$$

Из (3) видно, если угол поворота сечений $\theta(x,t)$ является малым, то приближенно считается, что $\sin\theta \approx \theta, \cos\theta \approx 1$ и линеаризованная система (3) будет соответствовать системе смещений (1).

Для вывода уравнения динамики воспользуемся вариационным принципом Гамильтона-Остроградского. Для этого вычислим плотность функции Лагранжа $L = W_К - W_П$, равной разности плотностей кинетической $W_К = \iint\limits_F \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}\right)^2 dF$ и потенциальной $W_П = \iint\limits_F \rho U dF$ энергий. Здесь ρ – объемная плотность среды, $\rho U = \frac{\lambda}{2}J_1^2 + \mu J_2$ – объемная плотность внутренней энергии, $J_1 = \varepsilon_{ii}$; $J_2 = \varepsilon_{ik}\varepsilon_{ki}$ –алгебраические инварианты тензора конечных деформаций Коши-Грина $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right)(i, j, k = 1,2,3)$, λ, μ - константы Ламэ, F – площадь поперечного сечения балки. Интегрирование по поперечному сечению объемной плотности кинетической и внутренней энергий позволяет выразить напряженно-деформированное состояние в произвольной точке тела через величины, заданные вдоль оси стержня, т.е. перейти от трехмерных уравнений теории упругости к одномерным уравнениям теории стержней. В нашем случае погонные плотности кинетической и потенциальной энергии описываются выражениями:

$$\begin{gathered} W_К = \frac{\rho I_d}{2}\theta''^2_{xt} + \frac{\rho I_p}{2}\theta'^2_t \\ W_П = \frac{\mu}{2}I_k\theta'^2_x + \frac{\lambda+2\mu}{2}I_d\theta''^2_{xx} + \left(\frac{\lambda+2\mu}{2}I_1 + \mu I_2\right)\theta'^2_x\theta''_{xx} + \frac{\lambda+2\mu}{2}I_d^*\theta''^3_{xx} + \\ + \left(\frac{\lambda}{8}I_3 + \frac{\mu}{4}I_4\right)\theta'^4_x + \frac{\lambda+2\mu}{8}I_d^{**}\theta''^4_{xx} + \frac{\lambda+2\mu}{4}I_5\theta'^2_x\theta''^2_{xx} \end{gathered} \tag{4}$$

Здесь, $I_k = \iint_F \left(\left(\Phi'_y - z \right)^2 + \left(\Phi'_z + y \right)^2 \right) dF$ – геометрический момент инерции при кручении (геометрическая жесткость на кручение), $I_d^* = \iint_F \Phi^3 dF$, $I_d^{**} = \iint_F \Phi^4 dF$ – моменты депланации 3-го и 4-го порядков,

$$I_1 = \iint_F \left(y^2 + z^2 + {\Phi'_y}^2 + {\Phi'_z}^2 \right) \Phi dF, \; I_2 = \iint_F \left(y\Phi'_z - z\Phi'_y \right) \Phi dF$$

$$I_3 = \iint_F \left(y^2 + z^2 + {\Phi'_y}^2 + {\Phi'_z}^2 \right)^2 dF, \; I_4 = \iint_F \left(\left(y^2 + z^2 \right)^2 + \left({\Phi'_y}^2 + {\Phi'_z}^2 \right)^2 \right) dF$$

$$I_5 = \iint_F \left(y^2 + z^2 + {\Phi'_y}^2 + {\Phi'_z}^2 \right) \Phi^2 dF$$ – геометрические моменты 3-го и 4-го порядков.

Уравнение крутильных колебаний стержня с учетом геометрической нелинейности имеет вид:

$$\begin{aligned} &\theta''_{tt} - C_\tau^2 \frac{I_k}{I_p} \theta''_{xx} + C_l^2 \frac{I_d}{I_p} \theta''''_{xxxx} - \frac{I_d}{I_p} \theta''''_{xxtt} - \left(\frac{3\lambda}{2\rho_0} \frac{I_3}{I_p} + 3C_\tau^2 \frac{I_4}{I_p} \right) {\theta'_x}^2 \theta''_{xx} + \\ &+ \frac{C_l^2}{2} \frac{I_5}{I_p} {\theta''_{xx}}^3 + +3C_l^2 \frac{I_d^*}{I_p} {\theta''''_{xxxx}}^2 + 3C_l^2 \frac{I_d^*}{I_p} \theta''_{xx} \theta''''_{xxxx} + 3C_l^2 \frac{I_d^{**}}{I_p} \theta''_{xx} {\theta''''''_{xxxx}}^2 + \\ &+ \frac{3C_l^2}{2} \frac{I_d^{**}}{I_p} {\theta''_{xx}}^2 \theta''''_{xxxx} + 2C_l^2 \frac{I_5}{I_p} \theta'_x \theta''_{xx} \theta'''_{xxx} + \frac{C_l^2}{2} \frac{I_5}{I_p} {\theta'_x}^2 \theta''''_{xxxx} = 0 \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь $C_l = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ – скорость продольных волн в неограниченной среде. В линейном приближении полученное уравнение совпадает с уравнением (2) крутильных волн Власова. Среди нелинейных слагаемых основной вклад дает слагаемое вида $\left(\frac{3\lambda}{2\rho} \frac{I_3}{I_p} + 3C_\tau^2 \frac{I_4}{I_p} \right) {\theta'_x}^2 \theta''_{xx}$, а остальные нелинейности имеют больший порядок малости. Чтобы убедиться в этом, достаточно в (5) перейти к безразмерным переменным $x' = x/\Lambda h$, $t' = C_\tau t/\Lambda h$, где Λ, h – безразмерная длина волны и толщина стержня. Главное нелинейное слагаемое, а также дисперсионные слагаемые входят в уравнение с коэффициентом, пропорциональным $1/(\Lambda h)^2$ (т.е. дисперсию необходимо учитывать одновременно с нелинейностью). Остальные слагаемые имеют коэффициенты, пропорциональные $1/(\Lambda h)^4$, $1/(\Lambda h)^6$, поэтому при $\Lambda h > 1$ (в длинноволновом приближении) ими можно пренебречь, и уравнение крутильных колебаний стержня рассматривать в виде:

$$\theta''_{tt} - C_\tau^2 \frac{I_k}{I_p} \left(1 + \alpha {\theta'_x}^2 \right) \theta''_{xx} + C_l^2 \frac{I_d}{I_p} \theta''''_{xxxx} - \frac{I_d}{I_p} \theta''''_{xxtt} = 0, \tag{6}$$

где $\alpha = \dfrac{3\left(\lambda I_3 + 2\mu I_4 \right)}{2\mu I_k}$ – коэффициент нелинейности.

Введем в (6) замену переменных $\tilde{x} = x\sqrt{I_p / I_d}$, $\tilde{t} = tC_\tau \sqrt{I_k / I_d}$, $\tilde{\theta} = \theta\sqrt{\alpha I_p / I_d}$, позволяющую получить уравнение с одним свободным параметром:

$$\theta''_{tt} - \left(1 + \theta'^2_x\right)\theta''_{xx} + C^2\theta''''_{xxxx} - \theta''''_{xxtt} = 0 \tag{7}$$

Уравнение (7) записано в безразмерных переменных и знак «тильда» над безразмерными переменными опущен. Здесь безразмерный параметр $C = \dfrac{C_l}{C_\tau}\sqrt{\dfrac{I_p}{I_k}}$ равен отношению скоростей продольных волн C_l и крутильных волн $C_k = C_\tau\sqrt{\dfrac{I_k}{I_p}}$ в среде без дисперсии.

Скорость крутильной волны отличается от скорости волны сдвига на постоянный множитель, зависящий от формы поперечного сечения. Как правило, скорость крутильной волны меньше скорости волны сдвига, так что параметр C больше единицы. Например, для тонкой упругой полосы, ширина которой 2H во много раз превышает ее толщину 2h, функция депланации выражается формулой $\Phi(y,z) = -yz$ [3], полярный момент инерции и момент кручения выражаются формулами $I_p = 4/3Hh\left(H^2 + h^2\right)$, $I_k = 16/3Hh^3$, так что их отношение $I_k / I_p = 4h^2/\left(H^2 + h^2\right)$. Очевидно, что при $h << H$ скорость крутильной волны уменьшается по сравнению со скоростью волны сдвига.

Уравнения типа (7), как правило, являются неинтегрируемыми методом обратной задачи рассеяния и их решения, описывающие уединенные волны, не являются солитонами в классическом понимании. В неинтегрируемых системах нелинейные частицеподобные волны при столкновении (попутном или встречном) излучают часть своей энергии в виде квазилинейных волновых пакетов (неупругое взаимодействие). Кроме того, при численном моделировании было обнаружено их расщепление при столкновениях [5], а экспериментально такой эффект наблюдался в [6]

Уравнение (7) имеет решения в виде стационарных волн деформаций, форма которых не изменяется при их распространении. Существование таких типов волн обусловлено «уравновешиванием» факторов нелинейности и дисперсии. Поиск решений в виде стационарной волны приводит к известному уравнению Дуффинга [7], которое имеет как периодические, так и уединенные (солитоноподобные) решения.

Солитоноподобные волны, так называемые кинки, описываются выражениями:

$$\theta(x,t) = \pm A\Delta arctg\left(sh\left(\frac{x \pm Vt}{\Delta}\right)\right), \quad \frac{\partial\theta}{\partial x} = \pm A\cosh^{-1}\left(\frac{x \pm Vt}{\Delta}\right) \tag{8}$$

где V – скорость уединенной волны, причем $V > C$, $A = \sqrt{6\left(V^2 - 1\right)}$ – амплитуда и $\Delta = \sqrt{\left(V^2 - C^2\right)/\left(V^2 - 1\right)}$ – ее ширина. Волны (8) распространяются с постоянной скоростью, не изменяют при движении своей формы, устойчивы относительно малых возмущений и имеют параметр подобия $\sigma = A\Delta/\sqrt{6\left(V^2 - C^2\right)}$, что не отличает их от классических солитонов. Однако амплитуда волн не может быть меньше критического значения $A = \sqrt{6\left(V^2 - C^2\right)}$, а ширина изменяется в пределах $0 < \Delta < 1$. Для таких волн численно обнаружены эффекты неупругого взаимодействия и расщепления при встречных столкновениях, что является их отличительной особенностью от солитона.. В частности, было обнаружено, что расщепление однополярных квасолитонов начинается с некоторой энергии, соответствующей критической ширине $\Delta_{kp} > 0.98$.

2. Учтем геометрическую нелинейность только в системе смещений (3). Будем рассматривать случай, когда при конечных углах закрутки деформации остаются малыми, т.е. $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$. Уравнение крутильных колебаний стержня принимает вид:

$$\theta''_{tt} - C_\tau^2 \frac{I_k^*}{I_p}\theta''_{xx} + C_l^2 \frac{I_d}{I_p}\theta''''_{xxxx} - \frac{I_d}{I_p}\theta''''_{xxtt} = \alpha_1(\cos\theta - 1)\sin\theta$$
$$= 2(\alpha_2 \sin\theta + \alpha_3 \cos\theta)\theta''_{xx} + (\alpha_2 \cos\theta - \alpha_3 \sin\theta)\theta'^2_x \quad (9)$$

Здесь $\alpha_1 = 4\frac{\lambda+\mu}{\rho}\frac{F}{I_p}$, $\alpha_2 = \frac{2\lambda I_d^1 - \mu I_2^*}{\rho I_p}$, $\alpha_3 = \frac{\mu I_2}{\rho I_p}$ – коэффициенты нелинейности, $I_k^* = \iint\limits_F \left(y^2 + z^2 + \Phi'^2_y + \Phi'^2_z\right)dF$, $I_d^1 = \iint\limits_F \Phi dF$, $I_2^* = \iint\limits_F \left(y\Phi'_z + z\Phi'_y\right)dF$ – моменты кручения и депланации. Если разложить тригонометрические функции по степеням θ ($\sin\theta \approx \theta - \frac{\theta^3}{6}$, $\cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$), то получим уравнение в виде:

$$\theta''_{tt} - C_\tau^2 \frac{I_к}{I_p}\theta''_{xx} + C_l^2 \frac{I_d}{I_p}\theta''''_{xxxx} - \frac{I_d}{I_p}\theta''''_{xxtt} = \alpha_2\theta'^2_x + 2\alpha_2\theta\theta''_{xx} + \frac{1}{2}\alpha_1\theta^3 -$$
$$-\alpha_3\theta\theta'^2_x - \frac{1}{2}\alpha_3\theta^2\theta''_{xx} - \frac{1}{3}\alpha_2\theta^3\theta''_{xx} - \frac{1}{2}\alpha_2\theta^2\theta'^2_x + \frac{1}{6}\alpha_3\theta^3\theta'^2_x - \frac{1}{12}\alpha_1\theta^5 \quad (10)$$

Анализ полученного уравнения не проводился, можно только сказать, что кроме кубической и старших нелинейностей здесь присутствует так же квадратичная нелинейность. Квадратичная нелинейность в уравнении позволяет описывать генерацию волны сдвиговой деформации удвоенной частоты, наблюдаемую экспериментально [8].

3. В данном случае нелинейность учтем в тензоре конечных деформаций, а углы закручивания будем считать малыми. Пусть выполнены все гипотезы теории стесненного кручения, тогда система смещений точек стержня будет иметь вид (1). Если вклад от депланационных эффектов учесть только в линейном приближении, то для погонных плотностей внутренней и кинетической энергии получаются следующие выражения:

$$W_{\text{К}} = \frac{\rho I_d}{2}\theta''^2_{xt} + \frac{\rho I_p}{2}\theta'^2_t \quad W_{\Pi} = \frac{\mu}{2}I_k\theta'^2_x + \frac{\lambda+2\mu}{2}I_d\theta''^2_{xx} + \frac{\lambda+2\mu}{8}\tilde{I}_k\,\theta'^4_x + \frac{\lambda+2\mu}{2}I_p\theta^2\theta'^2_x$$

Здесь $\tilde{I}_k = \iint\limits_F (y^2+z^2)\left(\left(\Phi'_y - z\right)^2 + \left(\Phi'_z + y\right)^2\right)dF$ - геометрический момент четвертого порядка.

При сделанных предположениях уравнение крутильных колебаний стержня имеет вид:

$$\theta''_{tt} - C_\tau^2 \frac{I_k}{I_p}\theta''_{xx} + C_l^2 \frac{I_d}{I_p}\theta''''_{xxxx} - \frac{I_d}{I_p}\theta''''_{xxtt} - \left(\frac{3}{2}C_l^2 \frac{\tilde{I}_k}{I_p}\theta'^2_x + C_l^2\theta^2\right)\theta''_{xx} - C_l^2\theta\theta'^2_x + 2C_l^2\frac{F}{I_p}\theta^3 = 0 \quad (11)$$

4. Пренебрежем депланацией поперечного сечения. Депланация отсутствует, если стержень имеет круговое или кольцевое поперечное сечение, а для стержней иных поперечных сечений ее необходимо учитывать. Оставаясь в рамках технической теории Кулона, необходимо в системе смещений (3) положить $u_1 = 0$. В этом случае при конечных углах закрутки и конечных деформациях получаем нелинейное уравнение без дисперсии:

$$\theta_{tt}''^{2} - C_\tau^2 \left(1 + \alpha \theta_x'^2\right) \theta_{xx}''^{2} = 0 \qquad (12)$$

Здесь $\alpha = \dfrac{3C_l^2 I_p^*}{2C_\tau^2 I_p}$, где $I_p^* = \iint_F \left(y^2 + z^2\right)^2 dF$. Из (12) видно, что линейные крутильные волны распространяются со скоростью волн сдвига, как и положено в технической теории Кулона. Оно является частным случаем уравнения (6) при $\Phi(y,z) = 0$, однако, в отличие от (6), не имеет решения в виде стационарных волн. Известны его решения в виде волны Римана [9].

5. При отсутствии депланации наиболее интересным представляется случай малых деформаций. Тогда в выражение для плотностей кинетической и потенциальной энергии входят тригонометрические функции

$$W_{\text{К}} = \frac{1}{2} \rho I_p \theta_t'^2, \qquad W_{\Pi} = \frac{1}{2} \mu I_p \theta_x'^2 + 2(\lambda + \mu) F (\cos\theta - 1)^2$$

а уравнение крутильных колебаний стержня принимает вид:

$$\theta_{ttx}''^{2} - C_\tau^2 \theta_{xx}''^{2} = 4 \frac{\lambda + \mu}{\rho_0} \frac{F}{I_p} (\cos\theta - 1) \sin\theta \qquad (13)$$

В линейном приближении $(\cos\theta \approx 1, \ \sin\theta \approx \theta)$ крутильные волны описываются волновым уравнением и распространяются в стержне без дисперсии со скоростью сдвиговых волн, как и положено в модели Кулона.

Вводя в (13) безразмерные переменные $\tilde{x} = x/(\Lambda d)$, $\tilde{t} = C_\tau t/(\Lambda d)$, $\tilde{\theta} = 2\theta$, где Λ – безразмерная длина волны, d - диаметр стержня, преобразуем (13) к виду:

$$\theta_{tt}'' - \theta_{xx}'' = -2\left(\sin\frac{\theta}{2} - \frac{1}{2}\sin\theta\right) \qquad (14)$$

В (13) знак «тильда» над безразмерными переменными опущен, а безразмерный параметр $4(\lambda d)^2 \dfrac{(\lambda + \mu)F}{\mu I_p}$, без нарушения общности, положен равным единице. Заметим, что уравнение (14) в литературе по солитонам [10] называется уравнением «Двойной синус-Гордона», в котором дисперсия линейных волн отсутствует. Однако имеются солитонные решения типа «кинк». Так, при скорости солитона $V > 1$ (т.е. когда нелинейная крутильная волна движется быстрее линейной) солитонное решение имеет вид:

$$\theta(x,t) = 4arctg\left(\frac{1}{\sqrt{2}} sh\left(\frac{x - Vt}{\Delta}\right)\right), \qquad (15)$$

где $\Delta = \sqrt{\left(V^2 - 1\right)/2}$ – ширина солитона. При скоростях $V < 1$ кинк описывается выражением

$$\theta\left(x,t\right) = 2\pi + 4arctg\left(sh\left(\frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2}}\right)\right) \tag{16}$$

Поскольку в (14) отсутствует дисперсия линейных волн, а стационарные решения в виде кинков существуют, это подтверждает тот факт, что дисперсия может быть обусловлена чисто нелинейными эффектами.

Если в уравнении (14) положить $\sin\theta \approx \theta - \dfrac{\theta^3}{6}$, то оно преобразуется к виду:

$$\theta''_{tt} - \theta''_{xx} + \frac{1}{2}\theta^3 = 0 \tag{17}$$

В уравнении (17) также отсутствует дисперсия линейных волн, но оно имеет решения в виде стационарных волн, зависящих от бегущей координаты $\xi = x - Vt$. Стационарная волна является периодической, она описывается эллиптическим косинусом:

$$\theta\left(\xi\right) = Acn(k\xi, s)\,, \tag{18}$$

где $A = \sqrt[4]{8E\left(V^2 - 1\right)}$ – амплитуда волны, V – скорость, $k = 2\sqrt{E}\,/\,A$ – нелинейный аналог волнового числа, E – константа интегрирования, имеющая смысл начальной энергии, s – модуль эллиптической функции, характеризующий степень нелинейных искажений волны. Обычно, для эллиптических функций $0 \le s \le 1$, но в данном случае этот модуль является строго фиксированным и равным $s = 1/\sqrt{2}$, что не позволяет линейной волне вырождаться либо в линейную, либо в солитон. Скорость периодической волны не является постоянной величиной, она зависит от волнового числа и связана с ним соотношением $V = \sqrt{2E/k^4 + 1}$, которое является нелинейным законом дисперсии. Таким образом, и в данном случае дисперсия обусловлена чисто нелинейными эффектами, что делает возможным существование нелинейной крутильной волны.

6. Теперь при отсутствии депланации считаем углы закручивания малыми, а деформации конечными. В этом случае, в системе перемещений (1) положим $u_1 = 0$. Уравнение крутильных колебаний с учетом сделанных предположений, принимает следующий вид:

$$\theta''_{tt} - C_\tau^2\theta''_{xx} - \left(\frac{3}{2}C_l^2\frac{\tilde{I}_p}{I_p}\theta'^2_x + C_l^2\theta^2\right)\theta''_{xx} - C_l^2\theta\theta'^2_x + 2C_l^2\frac{F}{I_p}\theta^3 = 0 \tag{19}$$

Здесь $\tilde{I}_p = \iint\limits_F \left(y^2 + z^2\right)^2 dF$. Очевидно, что (19) является частным случаем уравнения (11), так как при отсутствии депланации $I_p = I_k,\, I_d = 0$.

В безразмерных переменных $\tilde{\theta} = \theta/\theta_0,\ \tilde{x} = x/\Lambda,\ \tilde{t} = tc_\tau/\Lambda$, где Λ – характерная длина волны, θ_0 – характерный угол закручивания в длинноволновом приближении вместо (19) можно записать уравнение:

$$\theta''_{tt} - \theta''_{xx} + \theta^3 = 0 \tag{20}$$

Здесь знак «тильда» опущен и принято, что $\left(2c_l^2 F\Lambda^2 / c_\tau^2 I_p\right)\theta_0^2 = 1$. Так как по форме уравнения (20) и (17) совпадают, свойства нелинейной периодической волны в данном случае аналогичны рассмотренным выше.

Список литературы

1. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. - М. .: Наука, 1980. - 512с.
2. Новацкий В. Теория упругости. – М.: Мир, 1975. - 872с.
3. Артоболевский И.И., Бобровницкий Ю.И., Генкин М.Д. Введение в акустическую динамику машин. - М.: Наука, 1979. - 296с.
4. Вибрации в технике: Справочник в 6-ти томах./ Ред. совет: Фролов К.В. (пред.). - М.: Машиностроение. - Т.1.: Колебания линейных систем. 2-е изд., испр. и доп. / Под ред. Болотина В.В, 1999. - 504с.
5. Кажаев В.В., Потапов А.И., Семерикова Н.П. Расщепление частицеподобных волн при встречных столкновениях // Изв. высш. уч. зав. Радиофизика. - 1995. - Т.38. - С.67-70.
6. Potapov A.I. and Vesnitsky A.I. Interaction of solitary waves under head-on collision. Experimental investigation // Wave motion. - 1994. - V.19. - P. 29-35.
7. Ерофеев В.И., Кажаев В.В., Семерикова Н.П. Волны в стержнях. Дисперсия. Диссипация. Нелинейность. - М.: Наука. Физматлит, 2002. - 208с.
8. Зарембо Л.К., Красильников В.А. Нелинейные явления при распространении упругих волн в твердых телах // Успехи физических наук. - 1970. - Т.102, №4. - С.549-586.
9. Куликовский А.Г., Свешникова Е.И. Нелинейные волны в упругих средах. - М.: Московский лицей, 1998. - 412с.
10. Солитоны /Под ред. Р.Буллафа, Ф. Кодри. - М.: Мир, 1983. - 408с.